Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Deuxième année cycle d'ingénieurs

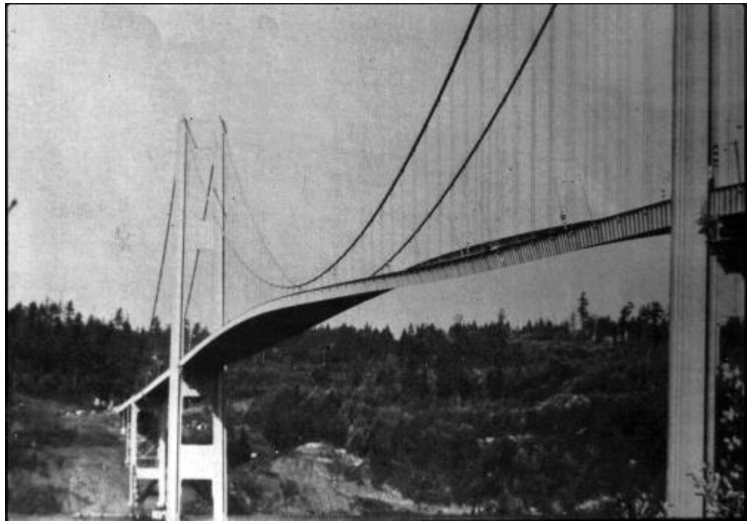
Filière Génie Mécanique

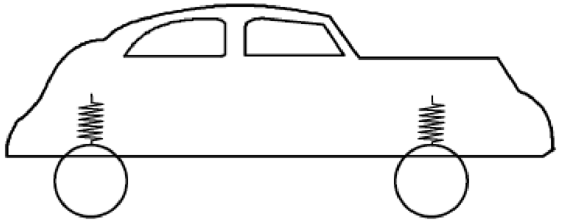
Cours de:

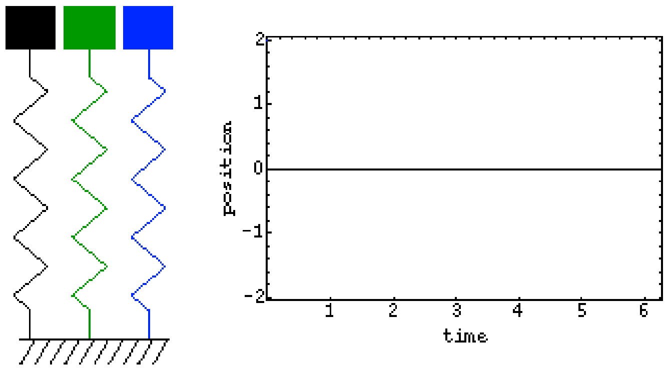
Vibration mécanique

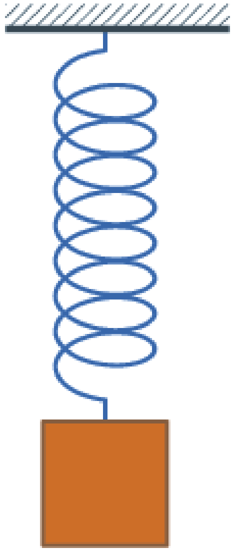
Professeur Basma Benhadou

Année universitaire : 2017-2018









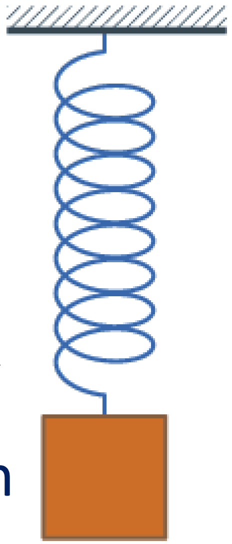
Partie I: Les systèmes à un degré de liberté

A. Les systèmes linéaires libres à un degré de liberté
B. Les systèmes linéaires libres amortis à un degré de liberté
C. Les systèmes linéaires forcés à un degré de liberté

A. Les systèmes linéaires libres à un degré de liberté

Mouvement vibratoire libre

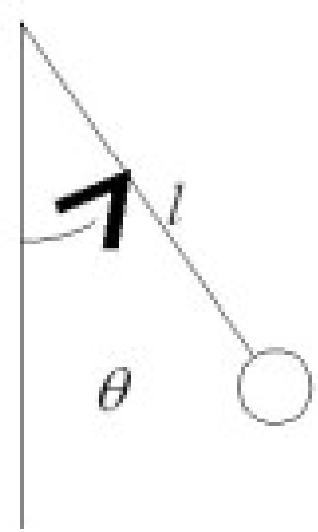
http://lucien.saviot.free.fr/terre/index.html



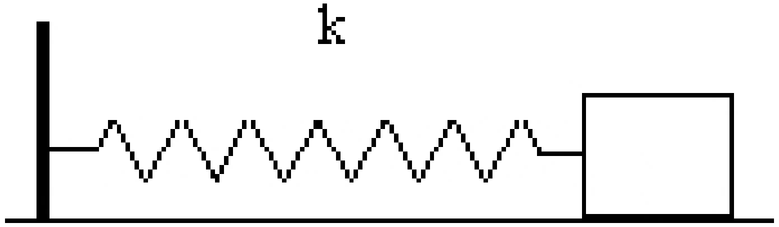
Oscillateur mécanique

- Un oscillateur mécanique est un système mécanique qui effectue un mouvement ***périodique*** autour d'une ***position d'équilibre***.

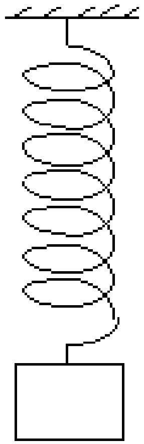
Pendule élastique



Pendule simple



Masse ressort disposé horizontalement



Masse ressort disposé verticalement

Vibration harmonique

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique un oscillateur qui, dès qu'il soit ***écarté de sa position d'équilibre*** d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une ***force de rappel*** opposée et proportionnelle à l'écartement x ou θ.

F= –Cx (C est une constante positive)

• La forme des oscillations est sinusoïdale,

• L'excitation appliquée au système est très brève, elle disparaît dès que le système oscille et les oscillations sont dites libres,

•L'énergie totale du système se conserve au cours du temps

Vibration harmonique

- On appelle vibration harmonique tout système dont le paramètre qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps:

$$x(\mathrm{t}) = Acos(\omega\mathrm{t} + \varphi)$$

- Le fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π. Si T est la période temporelle du mouvement, on aura donc :

$$[\omega(t + T) + \varphi] - [\omega(t) + \varphi] = 2\pi$$

Vibration harmonique

- La fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de $\pi/2$.

On écrit: $$\boldsymbol{x}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{Acos}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{Asin}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}')$$

Avec $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} + \frac{\pi}{2}$

- Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont :
  - L'amplitude A,
  - La période T, $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{\mathbf{T}} = 2\pi f$, pulsation $\boldsymbol{\omega}$ et fréquence f.
  - La phase $\boldsymbol{\varphi}$

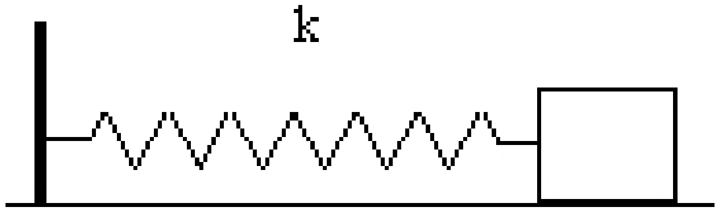
Pendule élastique

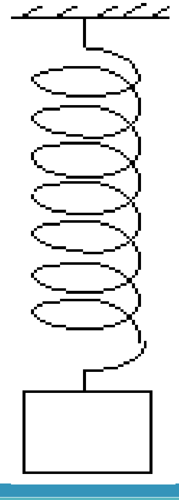
La force de rappel

- Soit un ressort de longueur à vide l_o. On modifie sa longueur en exerçant une force de tension à son extrémité libre, en le comprimant ou l'étirant. La nouvelle longueur du ressort est notée 'l'.
- L'allongement 'a' du ressort est alors: $a = l - l_o$
- Quand on comprime ou étire un ressort, celui ci exerce alors une force de rappel proportionnelle à son allongement.
- La force de rappel d'un ressort est: $\mathbf{F = -kx}$

Pendule élastique

- Un pendule élastique est système constitué d’un solide de masse m attaché à un ressort de raideur k .
- Un pendule élastique est disposé généralement horizontalement et plus rarement verticalement.

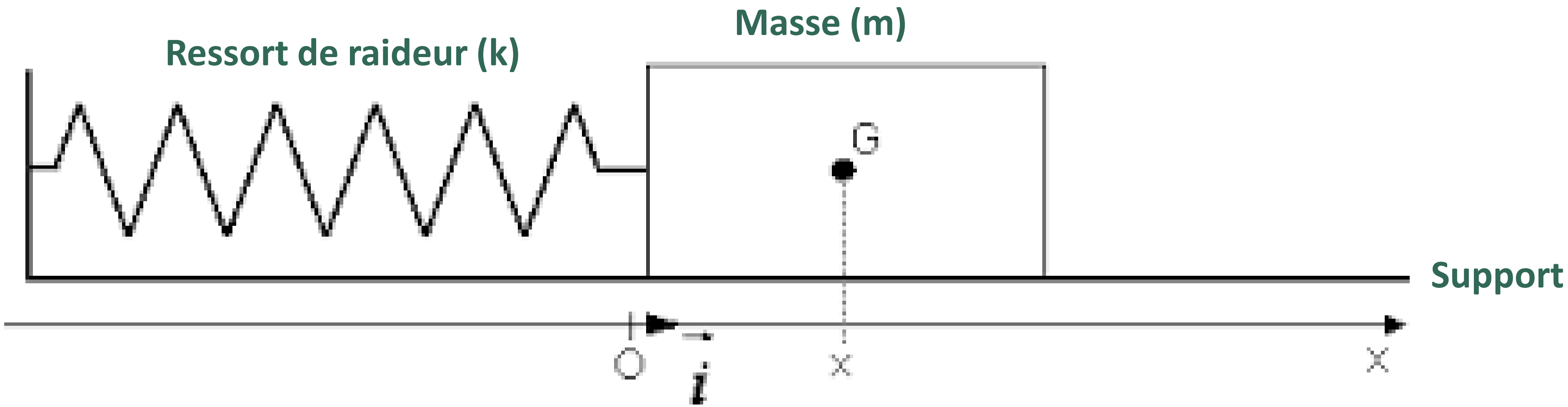




Pendule élastique

Cas 1: pendule élastique horizontale

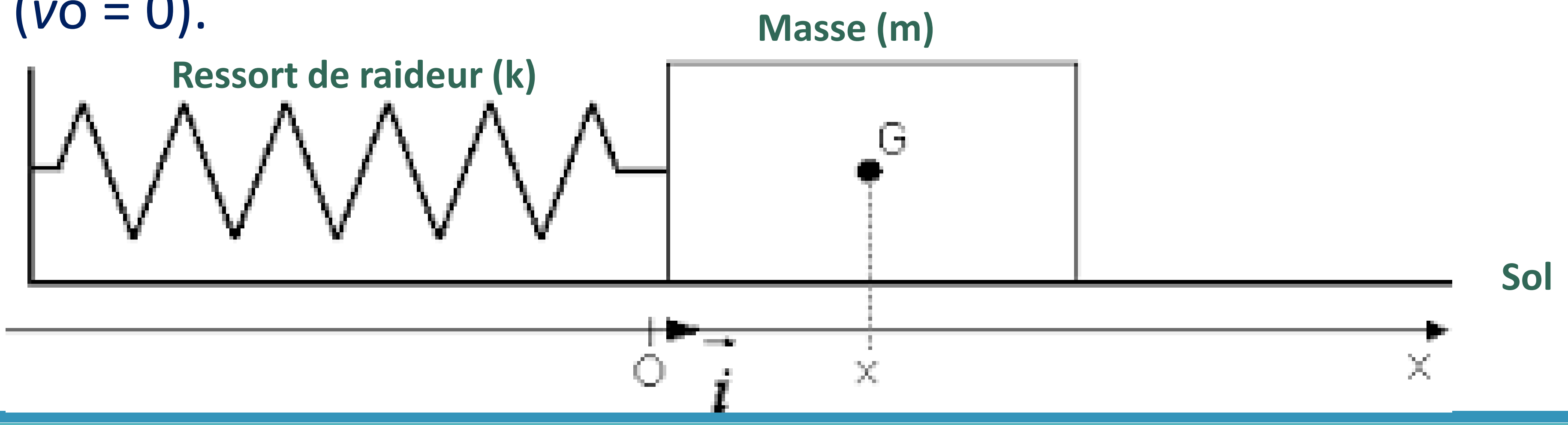
- Un solide de masse m, guidé rectilignement sur un support plan, est attaché à un ressort horizontal de raideur k. Ce ressort, de masse supposée nulle et à spires non jointives, peut travailler en extension comme en compression. Le ressort est attaché à un obstacle fixe.



Pendule élastique

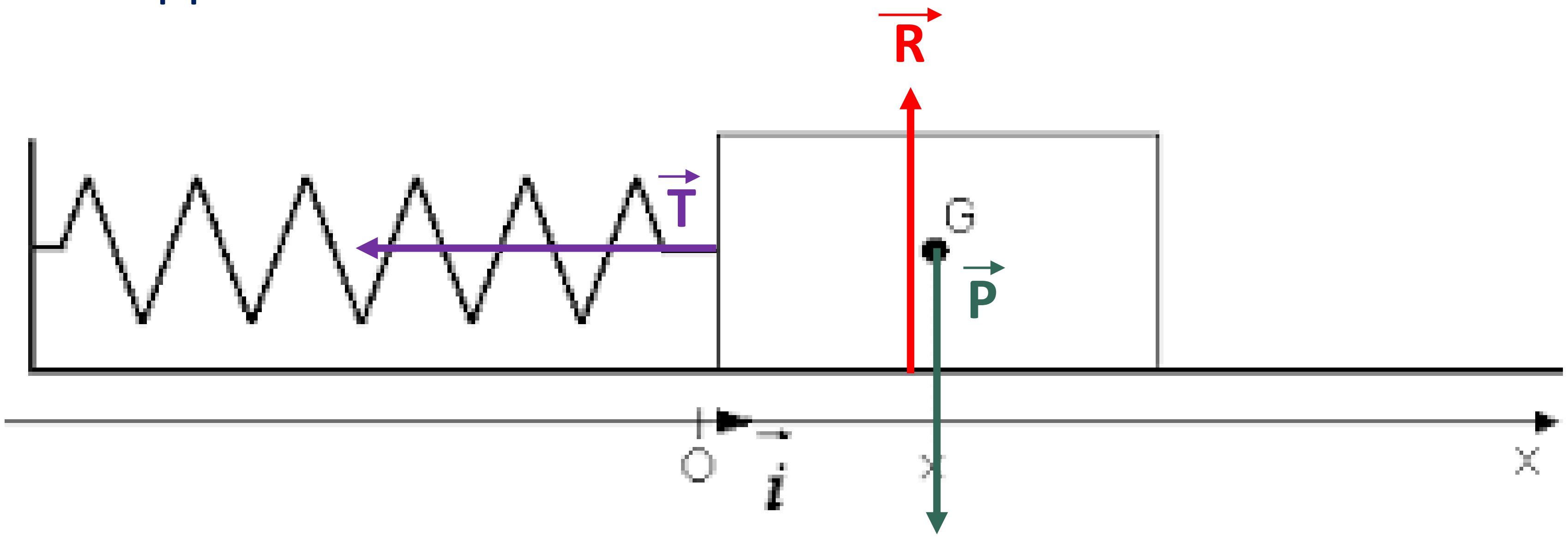
Cas 1: pendule élastique horizontale

- Dans notre étude on va négliger les frottements.
- Ecarter le solide vers la droite d'une distance x et le lâcher sans vitesse initiale (vo = 0).



Pendule élastique

- Le solide est soumise à 3 forces:
  - Son poids $\vec{P}$
  - La réaction du support (sol) $\vec{R}$
  - La force de rappel $\vec{T}$



Pendule élastique

- Application du principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton)

PFD: $\sum \vec{F}\text{ext} = \mathbf{m}.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \mathbf{m}.\vec{a}$

Projection/$\vec{ox}$:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

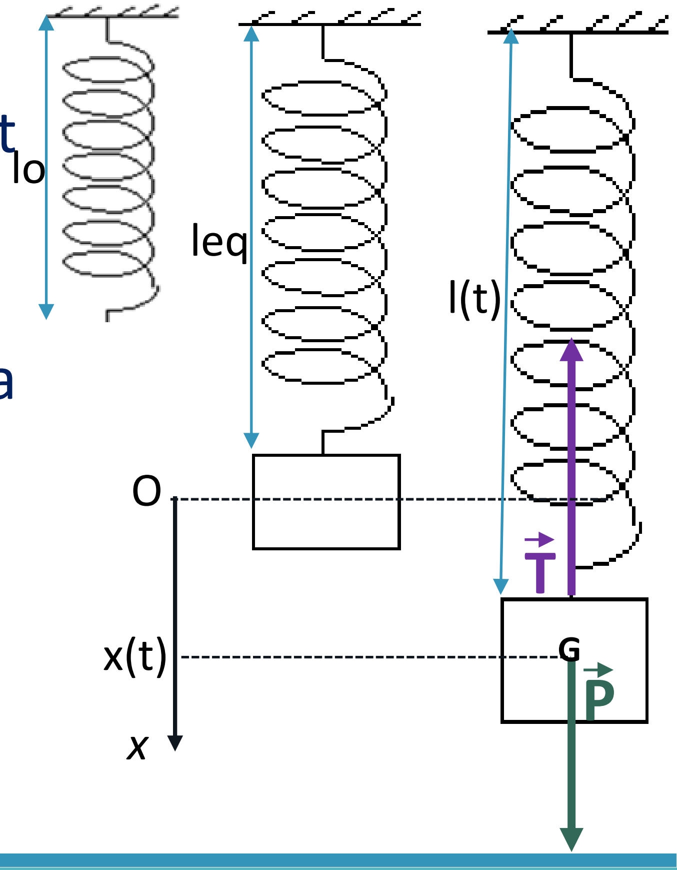
équation différentielles d'oscillation harmonique linéaire du second ordre à coefficient constant sans second membre

Pendule élastique

- *Cas 2: pendule élastique est disposé verticale*

- Le cas d'une mass m accrochée à l'extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction $\vec{ox}$ verticale.
- A l'équilibre, la masse m est soumise à deux forces, son poids et la force de rappel de la tension du ressort.
- A l'équilibre:

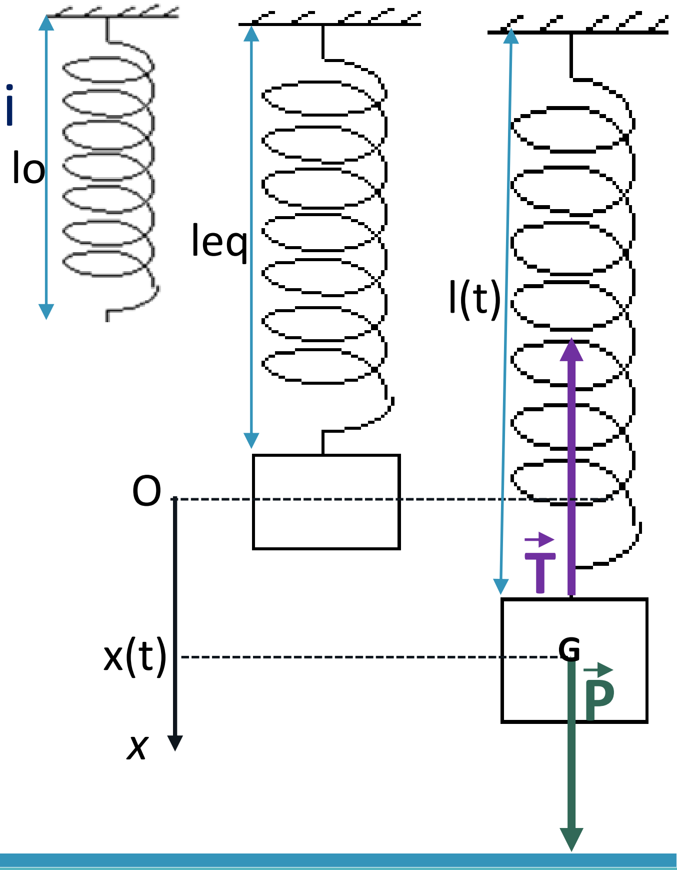
$$\sum \vec{F}\,\mathbf{ext} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$



Pendule élastique

◦ *Cas 2: pendule élastique est disposé verticale*

◦ Application du principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton)



PFD: $\sum \vec{F}ext = m.\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

Projection/$\vec{ox}$: $m\ddot{x} = mg - k(\, l - l_0 \,)$

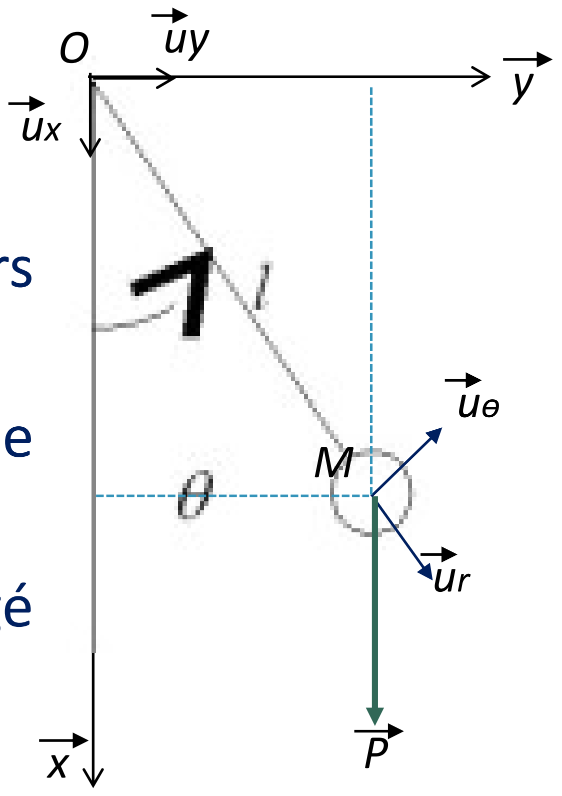
$$m\ddot{x} = mg - k(\, x + l_{eq} - l_0 \,)$$

En équilibre (principe d'inertie) : $mg - k(l_{eq} - l_0\,) = 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Pendule simple

- Dans le cas de la pendule simple nous avons un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Nous allons utiliser un repère de base polaire (ur , uϴ)



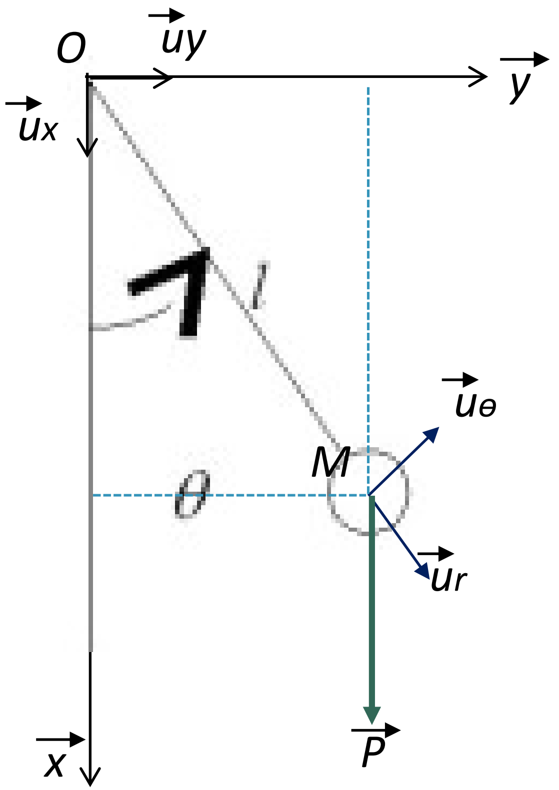
- Cette base est une base mobile composée de deux vecteurs perpendiculaires entre eux:
  - Un vecteur unitaire u_r collinaire et dirigé suivant $\overrightarrow{OM}$; on l'appelle vecteur ***radial***,
  - Un vecteur unitaire u_θ perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ et dirigé comme l'angle θ; on l'appelle vecteur ***orthoradial***.
- On repère alors le point M par une longueur, ici l, et par un angle θ

Pendule simple

A l'équilibre, la masse m est soumise à deux forces, son poids et la force de rappel de la tension du ressort.

A l'équilibre:

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}\mathbf{ext} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$



Pendule simple

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l.\vec{u}_r$

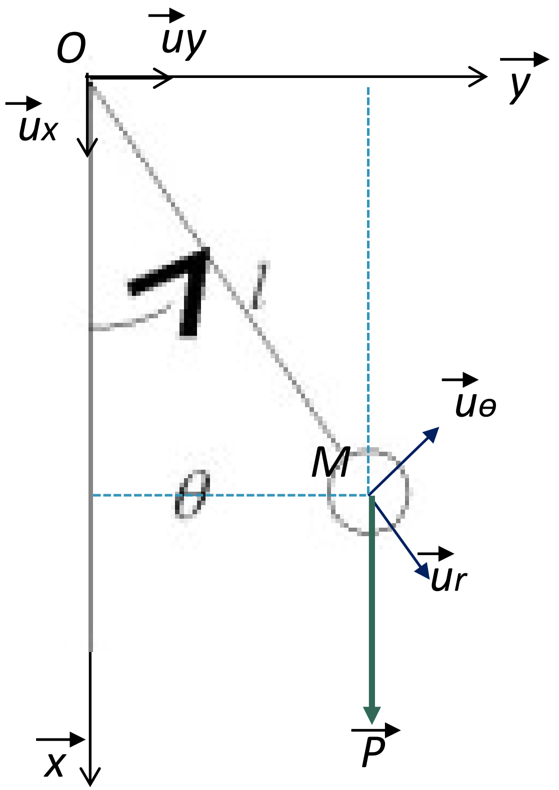
Vecteur vitesse : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(l.\vec{ur})}{dt} = \dfrac{d(l)}{dt}\,\vec{ur} + l\,\dfrac{d(\vec{ur})}{dt}$

$$\vec{v} = \dot{l}\,\vec{u}_r + l\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Vecteur accélération : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{d^2t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

On procède de la même manière que pour le vecteur vitesse pour obtenir :

$$\vec{a} = (\ddot{l} - l\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$



Pendule simple

PFD: $\sum \vec{F}_{ext} = \mathbf{m}.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{T} = \mathbf{m}.\vec{a}$

Projection/u_r : $ml\dot{\theta} = mg\cos(\theta) - T$

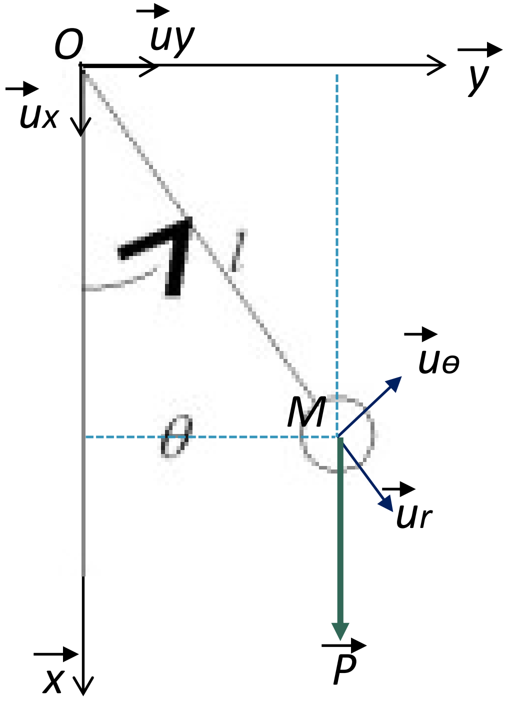
Projection/u_θ : $ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta)$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

équation différentielles non linéaire

Pour qu'elle soit linéaire: $\sin\theta = \theta$ $\theta <<<< 14°$

Equation pendule simple en rotation autour d'un axe fixe: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$



Pendule simple

Solution de l'équation différentielle du mouvement :

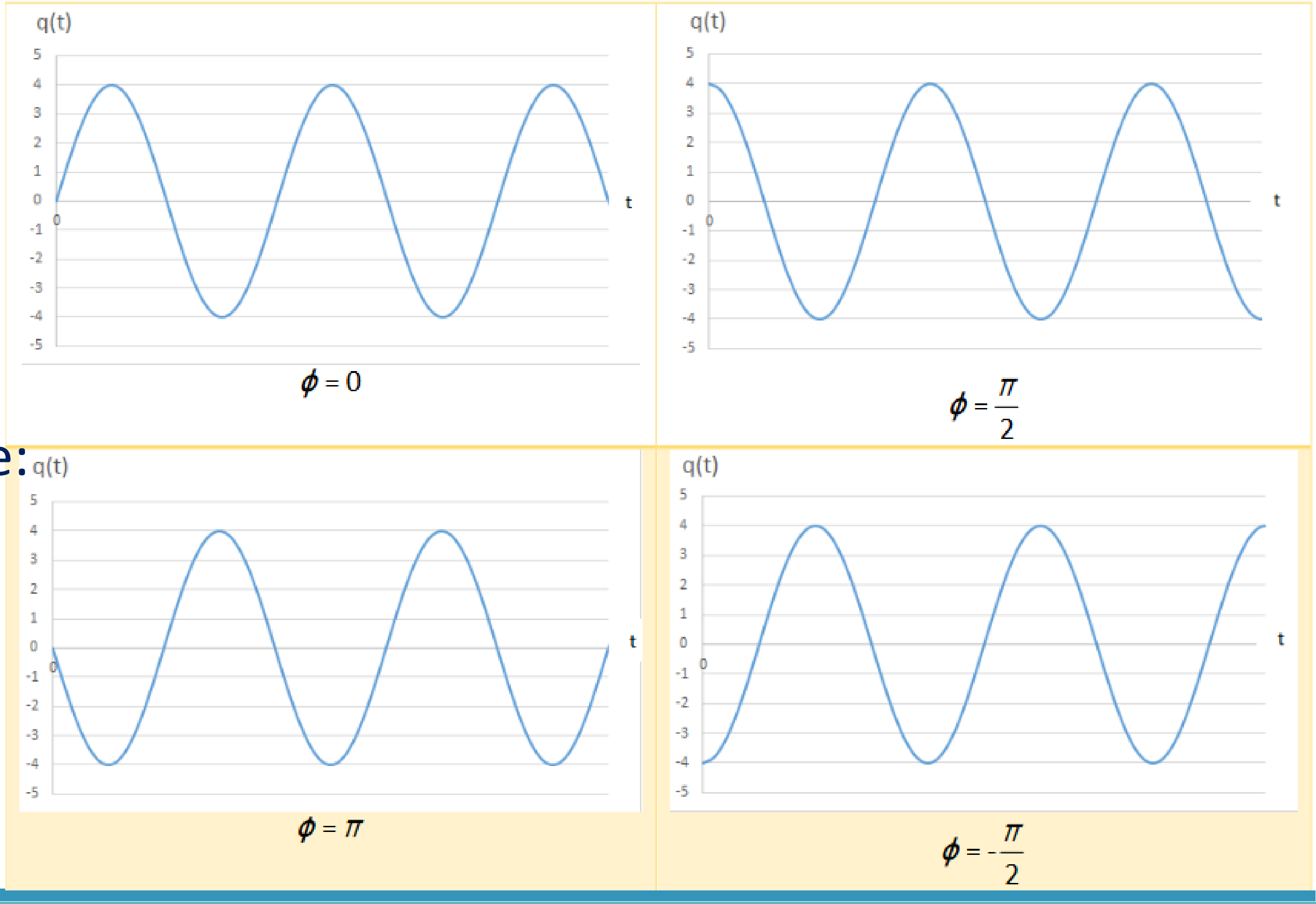
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

L'équation horaire solution de l'équation différentielle du mouvement est de la forme:

$$\mathbf{q(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

À t= 0, 4 situations possibles:

$\varphi = 0$ | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ | $\varphi = \pi$ | $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



Etude énergétique d'un oscillateur harmonique

Principe de la conservation d'énergie totale (ou énergie mécanique) :

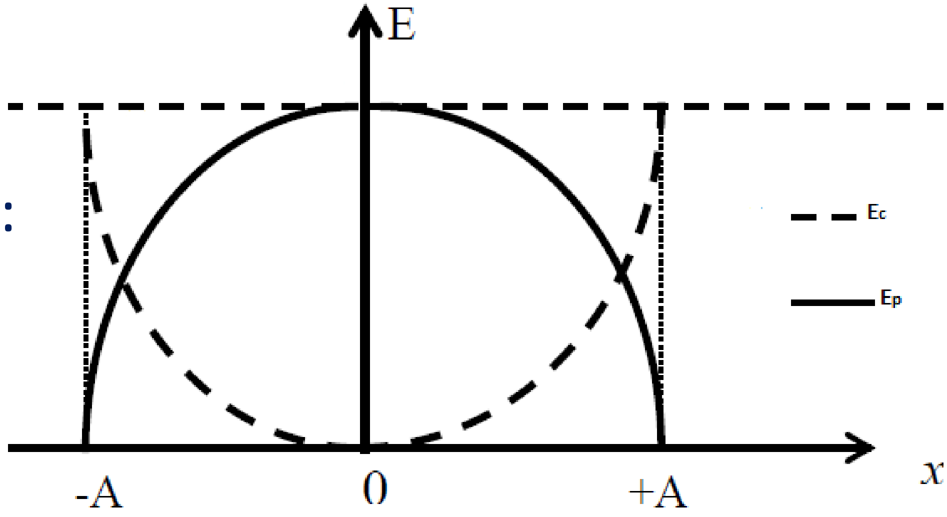
$$E_m = E_c + E_p$$

E_c : énergie cinétique peut se présenter sous deux formes:

- Énergie cinétique de translation : $\frac{1}{2}mv^2$
- Énergie cinétique de rotation : $\frac{1}{2}m\,J\Delta\dot{\theta}^2$

E_p : énergie potentielle peut se présenter sous trois formes:

- Énergie potentielle de pesanteur
- Énergie potentielle élastique ressort
- Énergie potentielle torsion fil



Etude énergétique d'un oscillateur harmonique

- Oscillateur harmonique est soumis à une force conservatrice :

$$\mathbf{F(x) = -\frac{dEp}{dx} = -kx}$$

$$\mathbf{Ep = \frac{1}{2}kx^2 + cte}$$

- L'énergie est conservée dans le cas d'un oscillateur harmonique

$\Downarrow$

Pas de frottement

$\Downarrow$

$$\mathbf{\frac{dEp}{dt} = 0}$$

Etude énergétique d'un oscillateur harmonique

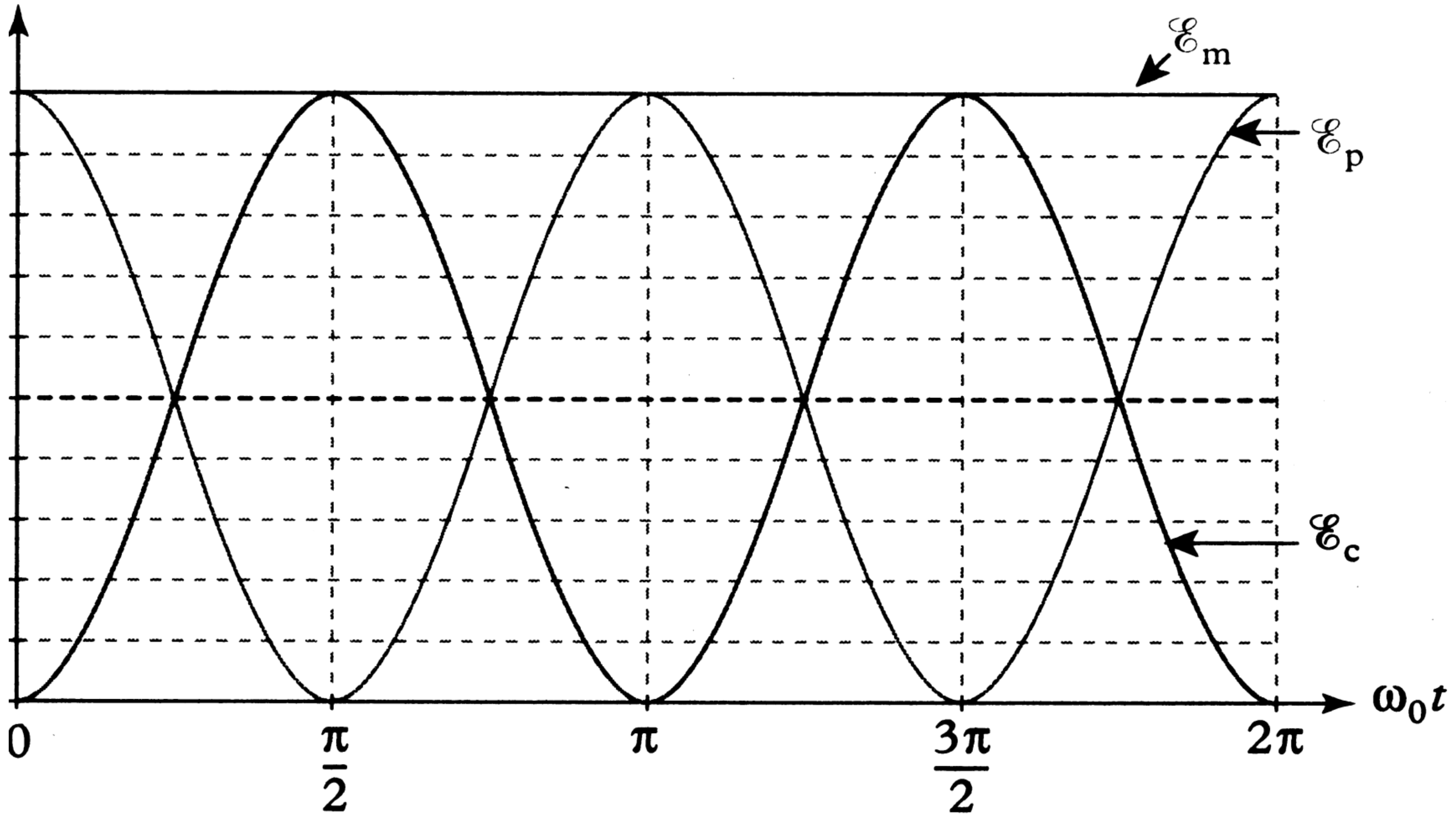
En équilibre: **x = x0**

F = 0

$F\big|_{x = x0} = 0$

$F(x) = -\dfrac{dEp}{dx}$

$\dfrac{dEp}{dx}\Big|_{x = x0} = 0$



Etude énergétique d'un oscillateur harmonique

Equation système

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} < 0$$

Conditions d'oscillation

Equation Lagrange-Euler d’un oscillateur harmonique

- Pour un système conservatif l’équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

- L’équation Lagrangienne du mouvement est:

$$\mathbf{L = E_c - E_p}$$

Analogie système mécanique masse-ressort et le système électrique L-C

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : x(t)	*Charge électrique q(t)*
Vitesse : $\dot{x}(t)$	*Courant électrique* $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : $\ddot{x}$	*Variation du courant :* $\ddot{q}$
Masse : m	*Inductance, bobine, self : L*
Ressort k	*Inverse de la capacité 1/C*
Force de rappel : k x	*d.d.p entre les bornes d'in condensateur :* $\frac{q}{c}$
Force d'inertie : $m\ddot{x}$	*d.d.p entre les bornes de la bobine :* $L\,\ddot{q}$
Energie potentielle : $\frac{1}{2}k\,x^2$	*Energie électrique :* $\frac{1}{2c}q^2$
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	*Energie magnétique :* $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$