

Méthodes Énergétiques

Christian La Borderie

INSTITUT SUPÉRIEUR AQUITAIN DU BÂTIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS



Table des matières

Chapitre 1. Notions énergétiques	5
1. Puissance :	5
2. Travail :	6
3. Énergie :	8
4. Premier principe de la thermodynamique :	9
5. Expression de l'énergie élastique dans une poutre :	9
Chapitre 2. Théorèmes énergétiques :	13
1. Théorème de Maxwell Betti (1864-1872) :	13
2. Théorème de Castigliano	16
Chapitre 3. Applications du théorème de Castigliano :	19
1. Calcul de déplacements de points d'applications de force.	19
2. Calcul de déplacements et de rotations autre part que sous les charges (Méthode des charges fictives)	21
3. Application aux problèmes hyperstatiques.	23
Chapitre 4. Méthode des forces	29
1. Introduction	29
2. Décomposition du problème :	29
3. Calcul de l'énergie interne :	29
4. Calcul des inconnues hyperstatiques.	30
5. Exemples :	32
Chapitre 5. Formule des trois moments	39
1. Introduction :	39
2. Résolution :	39
3. Utilisation	43
4. Cas particulier d'une poutre à travées de même longueur.	44
5. Exemples :	44
Chapitre 6. Calcul des intégrales :	47
1. Intégrales de Mohr	47

Notions énergétiques

1. Puissance :

1.1. Puissance générée par un effort : Soit un effort \vec{F} appliqué en un point A qui se déplace par rapport au repère R . Soit $\vec{V}_{(A/R)}$ la vitesse du point A par rapport à R , alors :

$$(1) \quad P_{(\vec{F}, A/R)} = \vec{F} \cdot \vec{V}_{(A/R)}$$

est la puissance générée par la force \vec{F} dans le mouvement du point A par rapport au repère R .

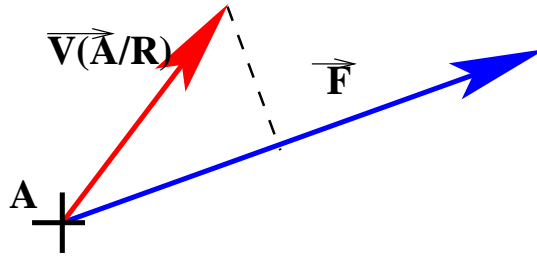


FIG. 1. puissance générée par un effort

La puissance représente de façon instantanée, le taux d'énergie apportée par la force \vec{F} dans le mouvement du point A par rapport au repère R .

- Si $\vec{V}_{(A/R)}$ a une projection positive sur \vec{F} , alors $P_{(\vec{F}, A/R)} > 0$ et \vec{F} participe au mouvement de A .
- Si $\vec{V}_{(A/R)}$ a une projection négative sur \vec{F} , alors $P_{(\vec{F}, A/R)} < 0$ et \vec{F} s'oppose au mouvement de A .
- Si $\vec{V}_{(A/R)}$ a une projection nulle sur \vec{F} (vecteurs orthogonaux ou un des vecteurs nul), alors $P_{(\vec{F}, A/R)} = 0$ et \vec{F} ne participe ni ne s'oppose au mouvement de A .

L'unité SI pour la puissance est le Watt : $1W = 1Nm.s^{-1}$, on trouve toutefois des indications de puissance en chevaux vapeur : $1chV \simeq 736W$

1.2. Puissance générée par un moment : Soit un moment \vec{M}_A appliqué sur un solide S en mouvement par rapport au repère R , soit $\vec{\Omega}_{(S/R)}$ le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R , alors :

$$(2) \quad P_{(\vec{M}_A, S/R)} = \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

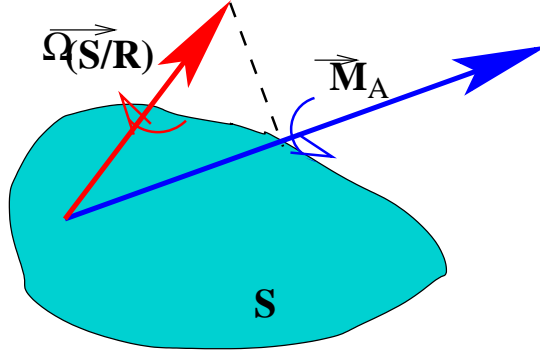


FIG. 2. puissance générée par un moment

1.3. Puissance générée par un torseur : Une action ou un système d'actions peuvent être représentés de façon générale par un torseur \mathfrak{S} représenté par ses éléments de réduction en un point A :

$\mathfrak{S} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$; le mouvement d'un solide S par rapport au repère R est représenté par un torseur cinématique $\wp_{S/R}$ qui a pour éléments de réduction au point A : $\wp : \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A \in S/R} \end{array} \right\}_A$.

La puissance générée par le torseur \mathfrak{S} dans le mouvement de S par rapport à R est :

$$(3) \quad P_{(\mathfrak{S}, S/R)} = \mathfrak{S} \otimes \wp_{S/R} = \vec{F} \cdot \vec{V}_{A \in S/R} + \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

On retrouve de toute évidence les relations 1 et 2 dans chaque cas particulier.

Cette relation peut également être utilisée pour trouver les actions transmissibles par une liaison parfaite entre deux solides en écrivant que la puissance fournie par les actions de liaison dans le mouvement relatif des deux solides est nulle.

2. Travail :

2.1. Définition : Le travail W correspond à une accumulation de puissance pendant un temps déterminé.

$$(4) \quad \boxed{dW = P dt}$$

On obtient donc le travail $W_{1 \rightarrow 2}$ effectué entre les instants t_1 et t_2 par intégration de la puissance P par rapport au temps t :

$$(5) \quad \boxed{W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt}$$

Le travail s'exprime en Joules (J) $1J = 1Nm$, ou en calories : 1 Calorie = 4,185 Joule. Une calorie correspond à la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 gramme d'eau de 1 degré.

2.2. Travail d'une force constante : Soit une force \vec{F} constante en intensité et en direction, appliquée en un point A animé d'une vitesse $\vec{V}_{(A/R)} = \vec{V}_A(t)$ par rapport au repère R.

Appelons $P(t)$ la puissance générée par la force \vec{F} dans le mouvement de A/R, d'après la relation (1) $P(t) = \vec{F} \cdot \vec{V}_A(t)$

En utilisant l'équation (5), le travail de \vec{F} entre les instants t_1 et t_2 est :

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{V}_A(t) dt$$

Or \vec{F} étant constante, $W_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \vec{V}_A(t) dt$ et si O est un point fixe dans le repère R, $\vec{V}_A(t) = \frac{d\vec{OA}}{dt}$ et $W_{12} = \vec{F} \cdot \left[\vec{OA} \right]_{t_1}^{t_2}$ et si A_1 et A_2 sont les positions de A aux instants t_1 et t_2 : $W_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} \cdot \vec{A_1 A_2}$ et si on note $\vec{\delta}_{12} = \vec{A_1 A_2}$ le déplacement du point A par rapport au repère R entre les instants t_1 et t_2 , on obtient :

$$(6) \quad \boxed{W_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} \cdot \vec{\delta}_{12}}$$

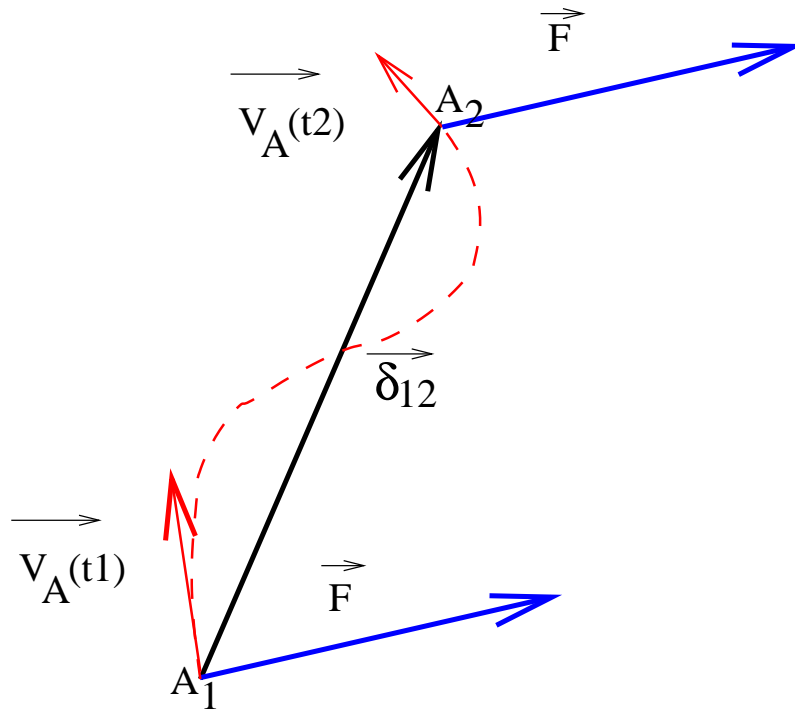


FIG. 3. Travail d'une force constante

Le travail de \vec{F} est indépendant du trajet suivi.

2.3. Force dont l'intensité varie linéairement avec le déplacement :

C'est le cas par exemple d'une force appliquée à une extrémité de ressort :

Soit un ressort $[OA]$ de raideur K , dont l'extrémité O est fixe. On applique en A un effort $\vec{F} = F\vec{x}$. Le déplacement du point A consécutif à l'application de cet effort est $X\vec{x}$ et $F = KX$.

On calcule le travail effectué par \vec{F} entre les instants t_1 et t_2 .

On note $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$.

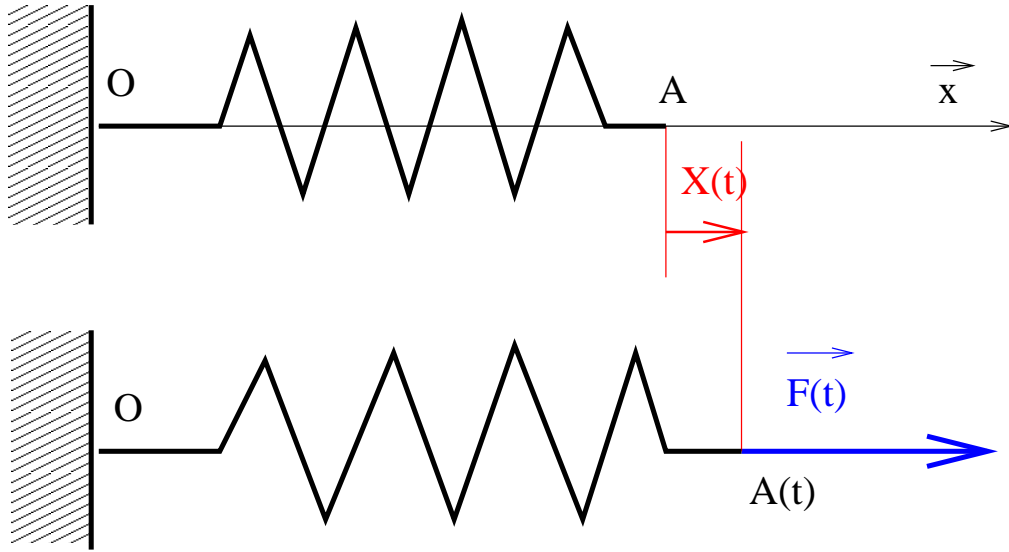


FIG. 4. Travail d'une force appliquée à une extrémité de ressort

La puissance générée par la force \vec{F} dans le mouvement du point A par rapport au repère $R(O, \vec{x})$ est donc $P_{(\vec{F}, A/R)} = \vec{F} \cdot \vec{V}_{(A/R)}$ avec $\vec{V}_{(A/R)} = \frac{dX}{dt} \vec{x}$, on obtient :

$$P_{(\vec{F}, A/R)} = F \frac{dX}{dt} = KX \frac{dX}{dt}.$$

D'après l'équation (5), on peut écrire : $W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} KX \frac{dX}{dt} dt$ soit

$$(7) \quad W_{1 \rightarrow 2} = \left[\frac{1}{2} KX^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} K (X_2^2 - X_1^2)$$

3. Énergie :

On pourra se référer au cours de thermodynamique pour plus de détails sur les significations physique des énergies.

(Voir aussi : <http://www.univ-paris12.fr/www/labos/lmp/watzky/C/ThF/index.html> qui a largement inspiré les définitions suivantes).

3.1. Concept d'énergie : Une énergie est une grandeur homogène à des Joules. Une énergie peut être électrique, thermique mécanique ... etc .. ;

On distingue pour un système isolé, les énergies possédées par le système (énergies propres) et les énergies échangées avec l'extérieur.

3.2. Énergies propres : Les énergies propres se distinguent en :

- Énergies externes : Elles sont liées à la position du système comme l'énergie cinétique : $E_c = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v^2 dv$ ou l'énergie potentielle $E_p = \int_{\Omega} \rho g z dv$
- Énergie interne : L'énergie interne U est liée aux mouvements et interactions entre les particules constitutives du système.

La somme des énergies propres se nomme énergie totale $E = E_c + E_p + U$

3.3. Énergies échangées : Ce sont donc les énergies qui sont échangées avec l'extérieur, les plus courantes sont :

- Le travail mécanique W des efforts appliqués au système
- La chaleur Q .

4. Premier principe de la thermodynamique :

Le premier principe exprime la conservation de l'énergie de l'ensemble {Système + milieu extérieur} pour un système fermé limité par une surface au travers de laquelle peuvent s'effectuer des échanges énergétiques. Il s'écrit sous forme de bilan où, dans un repère galiléen, la variation d'énergie totale du système entre deux états Ξ_1 et Ξ_2 est égale à la somme des travaux et chaleurs reçus par le système pendant son évolution entre ces deux états :

$$\Delta E = W + Q \text{ ou encore}$$

$$(8) \quad \boxed{E_2 - E_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}}$$

5. Expression de l'énergie élastique dans une poutre :

5.1. Hypothèses et notations : Dans ce qui suit, on négligera les variations d'énergies cinétique E_c et potentielle E_p , on supposera que les transformations se font sans échange de chaleur et que l'énergie interne U s'identifie à l'énergie élastique W_e .

Soit une poutre Ω de ligne moyenne Γ orientée par une abscisse s et de section $\Sigma(s)$.

On notera W_e l'énergie élastique sur l'ensemble du système Ω , w_e l'énergie élastique linéique dans la poutre et ψ_e l'énergie élastique volumique.

$$\text{On a donc } W_e = \int_{\Gamma} w_e(s) ds, \quad W_e = \int \int \int_{\Omega} \psi_e(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{et } w_e(s_0) = \int \int_{\Sigma(s_0)} \psi_e(s_0, y, z) dy dz.$$

D'autre part, on choisira de définir une énergie élastique nulle lorsque le système n'est sollicité par aucun chargement.

5.2. Barre soumise à un effort normal constant : Soit une barre $[AB]$ de longueur initiale à $t = 0$ ℓ , de section A et de module d'élasticité E . On peut considérer la barre comme un ressort.

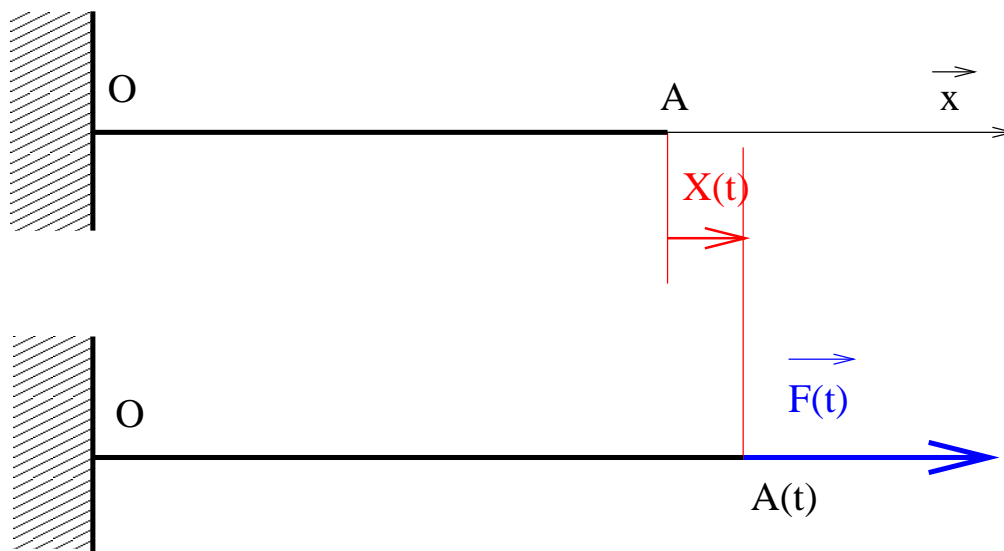


FIG. 5. Barre soumise à un effort normal.

On se propose de calculer le travail de F entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$

Cette barre est sollicitée en traction pure avec :

$$N = F \text{ et } \Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \text{ soit } F = \frac{EA}{\ell} \Delta\ell$$

La raideur de la barre est donc $K = \frac{EA}{\ell}$ et en appliquant la relation (7), le travail de la force F entre l'instant initial et l'instant t_1 est : $W_{01} = \frac{K\Delta\ell^2}{2}$ soit $W_{01} = \frac{EA}{2\ell} \left(\frac{N\ell}{EA}\right)^2$

$$W_{01} = \frac{N^2}{2EA}\ell$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique (8), on obtient : $E_1 - E_0 = W_{e1} - W_{e0} = W_{01}$

On obtient donc l'énergie élastique de la barre à l'instant t_1 :

$$W_{e1} = \frac{N^2}{2EA}\ell$$

si on suppose que l'état de la matière est constant sur l'ensemble de la barre, on a $W_{e1} = \ell w_{e1}$ et $W_{e1} = A\ell\psi_{e1}$ soit :

l'énergie linéique dans la barre est :

$$w_{e1} = \frac{N^2}{2EA}$$

l'énergie volumique dans la barre est $\psi_{e1} = \frac{N^2}{2EA^2}$ avec $\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$, on obtient :

$$\psi_{e1} = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E}$$

5.3. Poutre plane chargée dans son plan : Soit une poutre plane de plan moyen (\vec{x}, \vec{y}) Ω de ligne moyenne Γ orientée par une abscisse s et de section $\Sigma(s)$ l'énergie élastique linéique dans la section d'abscisse s_0 est :

$$w_e(s_0) = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_{fz}^2}{2EI_{Gz}} + \frac{V_y^2}{2GA'_y}$$

avec

– Sollicitations :

- N : effort normal
- M_{fz} : moment fléchissant suivant l'axe \vec{z}
- V_y : effort tranchant.

– Caractéristiques matérielles :

- E : module d'élasticité longitudinal
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: module d'élasticité transversal (ν coefficient de Poisson).

– Caractéristiques géométriques :

- A : aire de la section
- I_{Gz} : moment d'inertie de section autour de l'axe $G\vec{z}$
- A'_y : section réduite.

Le terme en cisaillement est presque toujours négligé.

Le terme en moment est souvent prépondérant devant les autres. Dans ce cas, on dit que la structure est à *énergie de flexion dominante*.

L'énergie élastique dans la poutre est donc :

$$(9) \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} \right) ds}$$

Si on néglige les énergies dues à l'effort tranchant et à l'effort normal, on dit que le problème est à flexion dominante et l'expression de l'énergie élastique devient :

$$(10) \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds}$$

5.4. Cas général : Dans le cas général, nous avons :

$$(11) \quad \boxed{W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{V_z^2}{GA'_z} + \frac{M_x^2}{GI_0} + \frac{M_y^2}{EI_{Gy}} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} \right) ds}$$

Théorèmes énergétiques :

1. Théorème de Maxwell Betti^{1 2}(1864-1872) :

1.1. Travail d'une force appliquée sur une structure élastique : Soit une structure élastique Ω de fibre moyenne initiale Γ_0 et $\overrightarrow{F}(t) = F(t)\overrightarrow{u}$, une charge appliquée en un point A de Γ .

La fibre moyenne se déforme élastiquement sous l'action de la charge et on note $\Gamma(t)$ la configuration déformée.

Le point A situé initialement en A_0 se déplace en $A(t)$ et on note $\overrightarrow{U}_A(t) = \overrightarrow{A_0A(t)}$.

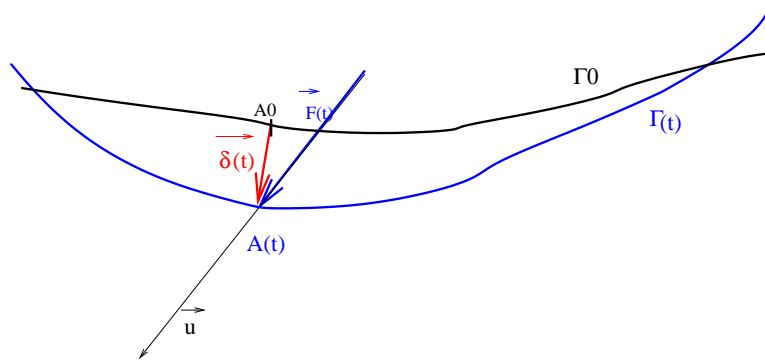


FIG. 1. Charge appliquée sur une structure élastique

La puissance générée par $\overrightarrow{F}(t)$ dans le déplacement de Γ/R est : $P_{(\overrightarrow{F}, \Gamma/R)} = \overrightarrow{F}(t) \cdot \frac{d\overrightarrow{U}_A(t)}{dt} = F(t) \frac{d\overrightarrow{U}_A(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{u}$

Posons

$$\overrightarrow{U}_A(t) \cdot \overrightarrow{u} = \delta(t)$$

alors $F(t) = K\delta(t)$

$$P_{(\overrightarrow{F}, \Gamma/R)} = F(t) \frac{d\delta(t)}{dt}$$

La structure étant élastique, on peut affirmer que $F(t)$ et $\delta(t)$ sont proportionnels : $F(t) = K\delta(t)$ soit $\delta(t) = \frac{F(t)}{K}$ et $P_{(\overrightarrow{F}, \Gamma/R)} = \frac{1}{K} F(t) \frac{dF(t)}{dt}$

Le travail effectué par la force F entre l'instant initial et l'instant t_1 et donc $W_{01} = \int_0^{t_1} \frac{1}{K} F(t) \frac{dF(t)}{dt} dt = \frac{1}{2K} F^2(t_1) = \frac{1}{2} F(t_1) \delta(t_1)$

Le travail effectué par la force \overrightarrow{F} lors de son application sur une structure élastique est donc :

¹Betti, E., IL NUOVO CIMENTO. Series 2, Vol's 7 and 8, 1872

²Maxwell, J.C., "On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames," Philosophical Magazine, vol. 27, pp. 294-299, 1864

$$(12) \quad \boxed{W_F = \frac{1}{2} F \delta}$$

où δ est la projection du déplacement du point d'application de \vec{F} en projection sur sa droite d'action.

1.2. Coefficients d'influence. Soit une poutre élastique Ω de ligne moyenne Γ sollicitée par n forces $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_j, \dots, \vec{F}_n\}$ appliquées respectivement en $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n\}$ points de Γ .

Considérons le déplacement \vec{U}_{A_i} du point A_i lors de l'application successive des forces. Dans l'objectif de calculer le travail de \vec{F}_i , on s'intéresse donc plus particulièrement à la projection de \vec{U}_{A_i} sur \vec{x}_i , le vecteur directeur de la droite d'action de \vec{F}_i

$$\vec{x}_i = \frac{\vec{F}_i}{\|\vec{F}_i\|} \text{ et } \delta_i = \vec{U}_{A_i} \cdot \vec{x}_i$$

Lors de l'application de \vec{F}_1 , le point A_i se déplace de $\vec{U}_{A_i,1}$ et on note $\delta_{i,1} = \vec{U}_{A_i,1} \cdot \vec{x}_i$, comme la structure est élastique, $\delta_{i,1}$ est proportionnel l'intensité de \vec{F}_1 , et on peut écrire :

$$\delta_{i,1} = \lambda_{i1} F_1$$

Lors de l'application de \vec{F}_2 , le point A_i se déplace de $\vec{U}_{A_i,2}$ et on note $\delta_{i,2} = \vec{U}_{A_i,2} \cdot \vec{x}_i$ et on peut écrire $\delta_{i,2} = \lambda_{i2} F_2$.

Lors de l'application de \vec{F}_j , le point A_i se déplace de $\vec{U}_{A_i,j}$ et on note $\delta_{i,j} = \vec{U}_{A_i,j} \cdot \vec{x}_i$ et on peut écrire $\delta_{i,j} = \lambda_{ij} F_j$

Lorsque l'ensemble des forces a été appliqué, $\vec{U}_{A_i} = \vec{U}_{A_i,1} + \vec{U}_{A_i,2} + \dots + \vec{U}_{A_i,j} + \dots + \vec{U}_{A_i,n} = \sum_{j=1}^n \vec{U}_{A_i,j}$ et $\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j}$ soit finalement :

$$(13) \quad \boxed{\delta_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j}$$

Les λ_{ij} sont appelés coefficients d'influence, ils mesurent l'influence de l'application de l'effort \vec{F}_j sur le déplacement du point d'application de \vec{F}_i le long de sa droite d'action.

1.3. Réciprocité : Nous allons démontrer que $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, ce qui signifie que le déplacement du point d'application de \vec{F}_i le long de sa droite d'action lorsque la structure est chargée par une force \vec{F}_j unitaire est égal au déplacement du point d'application de \vec{F}_j le long de sa droite d'action lorsque la structure est chargée par une force \vec{F}_i unitaire.

Calculons le travail effectué par les charges \vec{F}_i et \vec{F}_j dans les deux cas suivants :

- (1) La structure est chargée par \vec{F}_i puis \vec{F}_j , le travail effectué est W_I (Figure 2)

Lors du chargement de \vec{F}_i : le travail de \vec{F}_i est : $\frac{1}{2} F_i \delta_{i,i}$ et $\vec{F}_j = \vec{0}$ donc ne travaille pas.

Lors du chargement de \vec{F}_j : \vec{F}_i est constant et son travail est : $F_i \delta_{i,j}$ et le travail de \vec{F}_j est $\frac{1}{2} F_j \delta_{j,j}$

Nous avons donc : $W_I = \frac{1}{2}F_i\delta_{i,i} + F_i\delta_{i,j} + \frac{1}{2}F_j\delta_{j,j}$ ou encore :

$$(14) \quad W_I = \frac{1}{2}F_i\lambda_{ii}F_i + F_i\lambda_{ij}F_j + \frac{1}{2}F_j\lambda_{jj}F_j$$

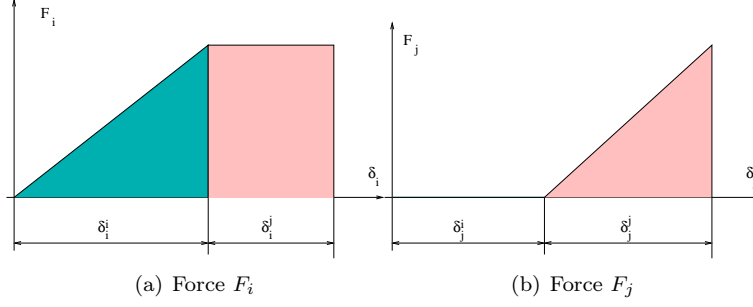


FIG. 2. Travail des forces dans le cas du chargement I

- (2) La structure est chargée par \vec{F}_j puis \vec{F}_i , le travail effectué est W_{II} (Figure 3)

Lors du chargement de \vec{F}_j : le travail de \vec{F}_j est : $\frac{1}{2}F_j\delta_{j,j}$ et $\vec{F}_i = \vec{0}$ donc ne travaille pas.

Lors du chargement de \vec{F}_i : \vec{F}_j est constant et son travail est : $F_j\delta_{j,i}$ et le travail de \vec{F}_i est $\frac{1}{2}F_i\delta_{i,i}$

Nous avons donc : $W_{II} = \frac{1}{2}F_j\delta_{j,j} + F_j\delta_{j,i} + \frac{1}{2}F_i\delta_{i,i}$ ou encore :

$$(15) \quad W_{II} = \frac{1}{2}F_j\lambda_{jj}F_j + F_j\lambda_{ji}F_i + \frac{1}{2}F_i\lambda_{ii}F_i$$

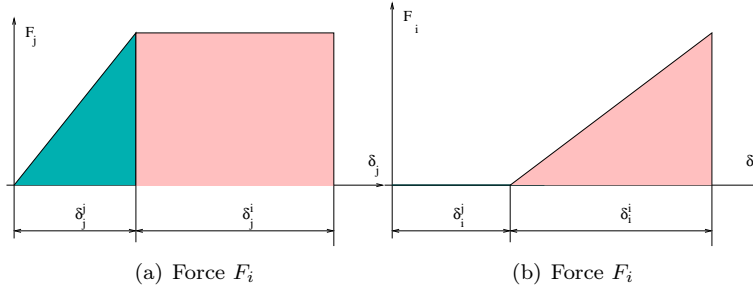


FIG. 3. Travail des forces dans le cas du chargement II

- (3)

La structure étant élastique et les processus étant tous réversibles, on peut affirmer que $W_I = W_{II}$ soit que $\frac{1}{2}F_i\lambda_{ii}F_i + F_i\lambda_{ij}F_j + \frac{1}{2}F_j\lambda_{jj}F_j = \frac{1}{2}F_j\lambda_{jj}F_j + F_j\lambda_{ji}F_i + \frac{1}{2}F_i\lambda_{ii}F_i$, ou finalement :

$$(16) \quad \boxed{\lambda_{ij} = \lambda_{ji}}$$

ce qui démontre le théorème.

2. Théorème de Castigliano

2.1. Travail d'un ensemble de forces appliquées sur une structure :

Soit une poutre élastique Ω de ligne moyenne Γ sollicitée par n forces

$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_j, \dots, \vec{F}_n\}$ appliquées respectivement en $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n\}$ points de Γ .

Calculons le travail W_{ij} effectué par les charges \vec{F}_i et \vec{F}_j lors de leur application, ce travail est donné par la relation 14 ou 15.

En utilisant le théorème de Maxwell-Betti (16), on peut écrire : $W_{ij} = W_I = W_{II} = \frac{1}{2}F_i\lambda_{ii}F_i + \frac{1}{2}F_i\lambda_{ij}F_j + \frac{1}{2}F_j\lambda_{ji}F_i + \frac{1}{2}F_j\lambda_{jj}F_j$ ou encore : $W_{ij} = \frac{1}{2}F_i(\lambda_{ii}F_i + \lambda_{ij}F_j) + \frac{1}{2}F_j(\lambda_{ji}F_i + \lambda_{jj}F_j)$

ou encore en utilisant la relation 13 $W_{ij} = \frac{1}{2}F_i\delta_i + \frac{1}{2}F_j\delta_j$.

Attention, le travail de \vec{F}_i n'est pas $\frac{1}{2}F_i\delta_i$, ce résultat n'est valable que pour la somme.

soit donc W_{ext} , le travail de l'ensemble des forces, nous avons : $W_{ext} = \frac{1}{2}F_1\delta_1 + \frac{1}{2}F_2\delta_2 + \dots + \frac{1}{2}F_n\delta_n$ ou

$$(17) \quad \boxed{W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i}$$

2.2. Dérivée du travail par rapport à l'intensité d'un effort : Dans l'objectif d'obtenir δ_k , calculons $\frac{dW_{ext}}{dF_k}$. D'après la relation 17, nous avons $W_{ext} =$

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$ avec $\delta_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j$ soit : $W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(F_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j \right)$

$$\frac{dW_{ext}}{dF_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{d(F_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j)}{dF_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{dF_i}{dF_k} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j + F_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \frac{dF_j}{dF_k} \right]$$

$$\frac{dW_{ext}}{dF_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{dF_i}{dF_k} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} F_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(F_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \frac{dF_j}{dF_k} \right) \text{ avec } \begin{cases} i = k \rightarrow \frac{dF_i}{dF_k} = 1 \\ i \neq k \rightarrow \frac{dF_i}{dF_k} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dW_{ext}}{dF_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} F_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \lambda_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_{kj} F_j$$

Finalement :

$$\frac{dW_{ext}}{dF_k} = \delta_k$$

2.3. Application du premier principe de la thermodynamique : La variation d'énergie interne, lors du chargement de la structure est égale au travail des efforts appliqués, soit :

$$\Delta W_e = W_{ext} \text{ et donc } \frac{dW_{ext}}{dF_k} = \frac{dW_e}{dF_k}$$

2.4. Théorème de Castigliano⁵ : Soit une poutre élastique chargée par un ensemble de forces (et éventuellement de couples) extérieures, en équilibre dans un repère Galiléen.

La dérivée de l'énergie élastique W_e par rapport à l'intensité de l'effort \vec{F}_k est égale à la projection δ_k du déplacement du point d'application de \vec{F}_k sur sa droite d'action.

$$(18) \quad \boxed{\frac{dW_e}{dF_k} = \delta_k}$$

On a de même pour un couple : La dérivée de l'énergie élastique W_e par rapport à l'intensité du couple \vec{M}_k est égale à la projection ω_k de la rotation du point d'application de \vec{M}_k sur son axe.

⁵*Intorno ai sistemi elastici*, Université polytechnique de Turin, 1873

(19)

$$\frac{dW_e}{dM_k} = \omega_k$$



CARLO ALBERTO CASTIGLIANO

Applications du théorème de Castigliano :

1. Calcul de déplacements de points d'applications de force.

1.1. Méthode : L'application directe du théorème permet de calculer la projection du déplacement d'un point d'application d'un effort sur sa droite d'action. Il faut donc :

- (1) Faire des hypothèses sur la déformée envisagée et choisir en conséquence la forme de l'énergie élastique (3D 11 ; 2D : 9 ; 2D à flexion dominante : 10)
- (2) Calculer les réactions d'appui. (On peut se passer de les calculer dans le cas d'une structure encastrée en un point, sans autre liaison)
- (3) Calculer le torseur des efforts intérieurs en tout point, et tracer les diagrammes des sollicitations intervenant dans l'expression de l'énergie élastique.
- (4) Calculer l'énergie élastique. Lors de la présence de charges ou de moments concentrés, l'expression du moment (et éventuellement des autres sollicitations) est différente pour chaque zone de la poutre délimitée par les charges. Il conviendra d'utiliser la relation de Chasles pour calculer l'intégrale sur toute la poutre.
- (5) Dériver l'énergie par rapport à la force ou au moment pour obtenir le résultat.

1.2. Exemple : Une poutre sur 2 appuis de longueur L , représentée sur la figure 1, est sollicitée par un effort \vec{F} au point A d'abscisse a .

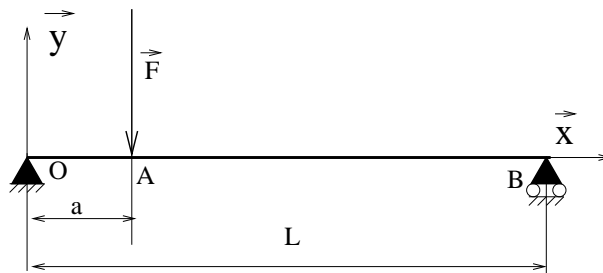


FIG. 1. Poutre sur 2 appuis

NOTE. Le choix de la notation $\vec{F} = F\vec{Y}$ donne la mesure du déplacement δ sur l'axe \vec{Y} soit positif "vers le haut" et négatif "vers le bas". Si on choisit la notation $\vec{F} = -F\vec{Y}$, alors δ sera positif pour un déplacement "vers le bas".

- (1) On néglige l'énergie de déformation due au cisaillement et dans la mesure où l'effort normal est nul, nous avons : $W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds$.

(2) Moment en O : $a\vec{X} \wedge F\vec{Y} + L\vec{X} \wedge Y_B\vec{Y} = \vec{0}$ soit : $Y_B = -\frac{aF}{L}$
 Résultante : $X_o = 0$ et $Y_o = -\frac{(L-a)F}{L}$

- (3) Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant :
 Comme la charge répartie est nulle, l'effort tranchant est constant par morceaux et le moment fléchissant varie de façon linéaire. Les relations de compatibilité avec les liaisons en O et B donnent $V_y(0) = -Y_o$, $V_y(L) = Y_A$ et $M_f(0) = M_f(L) = 0$, il reste à calculer le moment fléchissant en A : $\vec{M}(a) = (L-a)\vec{X} \wedge Y_B\vec{Y}$ soit $M_f(a) = -\frac{a(L-a)F}{L}$. On obtient les diagrammes représentés sur la figure 2

Les équations du moment fléchissant sont $\begin{cases} 0 < x < a & \rightarrow M_f(x) = -\frac{x(L-a)F}{L} \\ a < x < L & \rightarrow M_f(x) = -\frac{a(L-x)F}{L} \end{cases}$

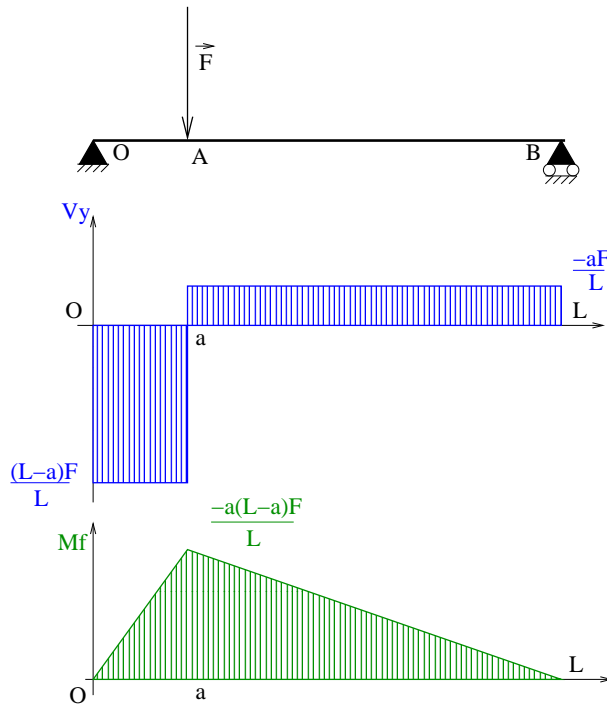


FIG. 2. Diagrammes de V_y et M_f

- (4) $W_e = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} dx$ et dans l'hypothèse où E et I_{Gz} sont constants sur la longueur de la poutre, on a

$$W_e = \frac{1}{2EI_{Gz}} \int_0^L M_{fz}^2 dx = \frac{1}{2EI_{Gz}} \left\{ \int_0^a \left[\frac{x(L-a)F}{L} \right]^2 dx + \int_a^L \left[\frac{a(L-x)F}{L} \right]^2 dx \right\}$$

1

$$W_e = \frac{F^2}{2EI_{Gz}L^2} \left\{ (L-a)^2 \int_0^a x^2 dx + a^2 \int_a^L (L-x)^2 dx \right\} = \frac{F^2}{2EI_{Gz}L^2} \left\{ (L-a)^2 \frac{a^3}{3} + a^2 \frac{(L-a)^3}{3} \right\}$$

¹On verra par la suite une méthode permettant d'obtenir le résultat avec un minimum de calculs, mais pour l'instant quelques petites intégrales ne feront sûrement pas de mal.

$$W_e = \frac{F^2 a^2 (L - a)^2}{6EI_{Gz}L}$$

(5) D'après le théorème de Castigliano (équation 18) $\delta = \frac{dW_e}{dF}$ et donc

$$\delta = \frac{Fa^2(L-a)^2}{3EI_{Gz}L}$$

2. Calcul de déplacements et de rotations autre part que sous les charges (Méthode des charges fictives)

2.1. Méthode. Pour calculer δ_A , la projection du déplacement du point A dans la direction \vec{u} , on applique sur la structure une charge fictive $\vec{\varphi} = \varphi \vec{u}$ au point A .

On calcule l'énergie élastique W_e due aux charges réelles et à la charge fictive dans la structure.

On en déduit

$$\delta_A = \frac{dW_e}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

Dans le cas d'une structure à énergie de flexion dominante, on peut écrire :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds$$

La structure étant élastique dans l'hypothèse des petites perturbations : $M_{fz} = M_0 + M_{\varphi}$, où :

- M_0 est le moment fléchissant dû au chargement réel (sans $\vec{\varphi}$)
- M_{φ} est le moment dû à la charge $\vec{\varphi}$ uniquement, $M_{\varphi} = \varphi \overline{M_{\varphi}}$ où $\overline{M_{\varphi}}$ est le moment fléchissant créé par une charge concentrée unitaire appliquée au point A et portée par le vecteur \vec{u} .

$$\frac{dW_e}{d\varphi} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} \frac{dM_{fz}^2}{d\varphi} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_{fz} \frac{dM_{fz}}{d\varphi} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_{fz} \overline{M_{\varphi}} ds$$

et $M_{fz}|_{\varphi=0} = M_0$.

On en déduit :

$$\delta_A = \frac{dW_e}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_{\varphi}}}{EI_{Gz}} ds$$

Cette relation est également connue sous le nom du théorème de Fontviolant².

On utilise la même méthode pour calculer la rotation ω_A du point A en projection sur l'axe \vec{z} . On applique au point A un moment fictif $\vec{\mu}_A = \mu_A \vec{z}$ et :

$$\omega_A = \frac{dW_e}{d\mu_A} \Big|_{\mu_A=0} = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_{\mu_A}}}{EI_{Gz}} ds$$

2.2. Exemple. Une potence OAB représentée sur la figure 3 est composée d'un poteau $[OA]$ de hauteur $H = 3m$ encastré en O et d'une poutre $[AB]$ de longueur $L = 1m$ sollicitée par une charge $F \vec{y}$ avec $F = -30kN$. Le poteau et la poutre sont de section carrée de côté $b = 0,25m$, le matériau a un module d'élasticité $E = 30GPa$. On supposera que le problème est à énergie de flexion dominante.

²Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1890.

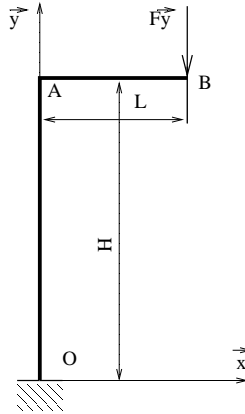


FIG. 3. Potence

2.2.1. *Tracer les diagrammes des sollicitations sur la potence.* Les diagrammes peuvent être tracés directement sans calcul :

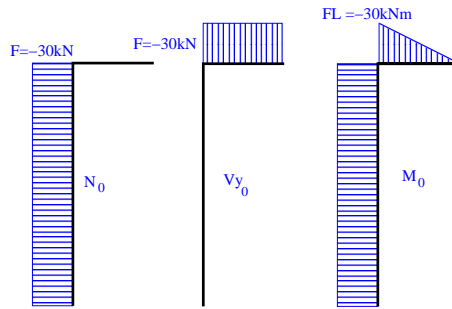


FIG. 4. Diagrammes

2.2.2. *Calculer le déplacement sur l'axe \vec{y} et la rotation du point B.* Pour le déplacement, on utilise directement le théorème de Castigliano :

Soit W_e , l'énergie due au moment fléchissant : $W_e = \int \frac{M_0^2}{2EI_{Gz}} ds$ avec $I_{Gz} = \frac{b^4}{12}$ on a :

$$\delta_B = \frac{dW_e}{dF} = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} M_0 \frac{dM_0}{dF} ds$$

et comme M_0 est proportionnel à F on a $\frac{dM_0}{dF} = \frac{1}{F} M_0$

$$\delta_B = \frac{1}{FEI_{Gz}} \int_{\Gamma} M_0^2 ds$$

La valeur de l'intégrale peut être facilement obtenue facilement à l'aide du tableau des intégrales de Mohr (Voir le chapitre 6 page 47) :

$$\int_{\Gamma} M_0^2 ds = F^2 L^2 H + \frac{F^2 L^3}{3}$$

$$\delta_B = \frac{FL^2}{3EI_{Gz}} (3H + L)$$

Application numérique : $\delta_B \simeq -10,24 \text{ mm}$

Pour la rotation du point B, on met en place un moment fictif $\mu_B \vec{z}$. Ce moment donne lieu au moment fléchissant $M_1 = \mu_b \bar{M}_1$. Par superposition, le moment total

est $M = M_0 + \mu_b \overline{M_1}$ et le théorème de Castigliano donne : $\omega_B = \frac{dW_e}{d\mu_B} |_{\mu_B=0}$, et $\omega_B = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_1}}{EI_{Gz}} ds$. Le diagramme $\overline{M_1}$ est donné sur la figure 5. L'intégrale peut être obtenue facilement à l'aide du tableau des intégrales de Mohr (Voir le chapitre 6 page 47)

$$\int M_0 \overline{M_1} ds = FLH + \frac{FL^2}{2}$$

On obtient $\omega_B = \frac{FL}{2EI_{Gz}} (2H + L)$. A.N. : $\omega_B \simeq 1,075 \cdot 10^{-2} rad$

2.2.3. *Calculer le déplacement sur l'axe \vec{x} et la rotation du point A.* On met en place une force fictive $\varphi_A \vec{x}$ et un moment fictif $\mu_A \vec{z}$ au point A. Ces charges donnent lieu respectivement aux moments fléchissants $\overline{M_2} = \varphi_A \overline{M_2}$ et $\overline{M_3} = \mu_A \overline{M_3}$. Par superposition, le moment total est $M = M_0 + \varphi_A \overline{M_2} + \mu_A \overline{M_3}$ et le théorème de Castigliano donne : $\delta_A = \frac{dW_e}{d\varphi_A} |_{\varphi_A=0}$ et $\omega_A = \frac{dW_e}{d\mu_A} |_{\mu_A=0}$.

on obtient donc : $\delta_A = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_3}}{EI_{Gz}} ds$ et $\omega_A = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_2}}{EI_{Gz}} ds$

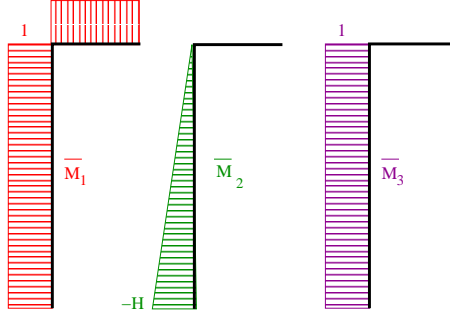


FIG. 5. diagrammes des moments pour les problèmes fictifs

Les valeurs des intégrales peuvent être obtenues facilement (Voir le chapitre 6 page 47) :

$$\int M_0 \overline{M_2} ds = -\frac{FLH^2}{2} \text{ et } \int M_0 \overline{M_3} ds = FLH \text{ et finalement :}$$

$$\delta_A = -\frac{FLH^2}{2EI_{Gz}} \simeq 13,82mm \text{ et } \omega_A = \frac{FLH}{EI_{Gz}} \simeq -9,21 * 10^{-3} rad$$

2.2.4. *Tracer l'allure de la déformée.* Dans l'hypothèse des petits déplacements et d'une énergie de flexion dominante, on néglige la déformée due à l'effort normal. Le déplacement vertical du point A est nul et le déplacement horizontal du point B est égal au déplacement horizontal du point A. D'autre part, l'encastrement en O impose que le déplacement et la rotation du point O soient nuls, on peut donc tracer l'allure de la déformée représentée sur la figure 6.

3. Application aux problèmes hyperstatiques.

Cette méthode s'applique généralement aux problèmes hyperstatiques d'ordre 1, pour les problèmes dont le degré d'hyperstaticité est supérieur, il est préférable d'utiliser la méthode des forces (Voir au chapitre 4)

3.1. Méthode.

- (1) On dénombre dans un premier temps les inconnues de liaisons l et les mobilités m . Le nombre d'équations disponibles est 3 en 2D et 6 en 3D, les mobilités rendent les équations correspondantes inopérantes. On en déduit



FIG. 6. Allure de la déformée

le degré d'hyperstaticité h :

$$h = l - (3 - m) \text{ en 2D ou } h = l - (6 - m) \text{ en 3D}$$

$h = 1$ pour la suite si $h > 1$ on utilisera la méthode des forces

- (2) On choisit un problème isostatique noté P_0 qui est le problème initial rendu isostatique en enlevant une inconnue de liaison notée X dans la suite (Attention à ce que la suppression du blocage lié à l'inconnue X ne crée pas de mobilité, car dans ce cas le problème ne sera pas rendu isostatique pour autant).
- (3) On superpose au problème P_0 , le problème P_1 ayant les liaisons du problème P_0 mais chargé par l'inconnue de liaison X enlevée en 2.
- (4) Le déplacement (la rotation si X est un moment) du point d'application de X est nul(le), le théorème de Castigliano donne donc :

$$\frac{dW_e}{dX} = 0$$

On a $M_{fz} = M_0 + M_1 = M_0 + X\overline{M}_1$ où

- M_0 est le moment du problème P_0 ,
- M_1 est le moment du problème P_1
- \overline{M}_1 est le moment du problème \overline{P}_1 qui est le problème P_1 pour une valeur unitaire de l'inconnue hyperstatique X

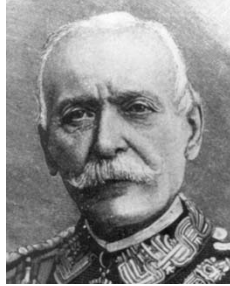
Pour un problème à flexion dominante, $W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds$.

$$\frac{dW_e}{dX} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} \frac{dM_{fz}^2}{d\varphi} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_{fz} \frac{dM_{fz}}{dX} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_{fz} \overline{M}_1 ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} (M_0 + X\overline{M}_1) \overline{M}_1 ds = 0$$

$$\text{On a donc : } \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_0 \overline{M}_1 ds + X \int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} \overline{M}_1 \overline{M}_1 ds = 0$$

$$X = - \frac{\int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} M_0 \overline{M}_1 ds}{\int_{\Gamma} \frac{1}{EI_{Gz}} \overline{M}_1 \overline{M}_1 ds}$$

Cette relation est également connue sous le théorème de Menabréa. Toutefois, une polémique s'est élevée du vivant même de Menabrea, celui-ci s'étant approprié l'énoncé du théorème de Castigliano, décédé prématurément.³



LUIGI FEDERICO MENABREA

3.2. Exemple. Une poutre encastree/simplement appuyée est représentée sur la figure 7.

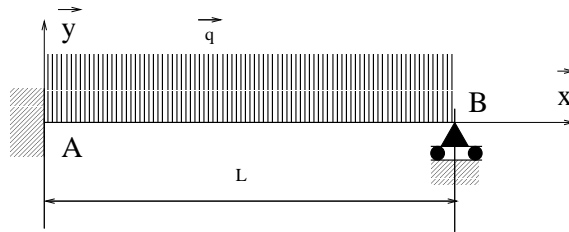


FIG. 7. Problème hyperstatique

Ce problème noté P est plan, possède 4 inconnues de liaisons, et n'a aucune possibilité de mouvement. Le problème est hyperstatique d'ordre 1. On choisit comme inconnue hyperstatique le moment d'encastrement M_A .

Décomposition du problème : Le problème peut être considéré comme la superposition de deux problèmes isostatiques :

Le problème P_0 (Figure 8) dont les liaisons sont celles du problème hyperstatiques auxquelles on a enlevé le blocage correspondant à l'inconnue hyperstatique. Ce problème reçoit le même chargement extérieur que le problème initial.

Le problème P_1 (Figure 9) qui possède les mêmes liaisons que le problème P_0 mais dont le chargement est un chargement unitaire correspondant à l'inconnue hyperstatique.

$$P = P_0 + M_A \overline{M_1}$$

Résolution des problèmes isostatiques :

Problème P_0 :

$$\vec{R}_0 + qx\vec{Y} - \frac{qL}{2}\vec{Y} = \vec{0} \text{ soit } : \vec{R}_0 = q\left(\frac{L}{2} - x\right)\vec{Y} \text{ et } V_0 = q\left(\frac{L}{2} - x\right), N_0 = 0$$

$$\vec{M}_0 - \frac{qx}{2}\vec{X} \wedge qx\vec{Y} - x\vec{X} \wedge \left(-\frac{qL}{2}\vec{Y}\right) = \vec{0} \text{ soit } M_0 = -\frac{qx}{2}(L - x)$$

³Études de Statique Physique - Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique, 1868

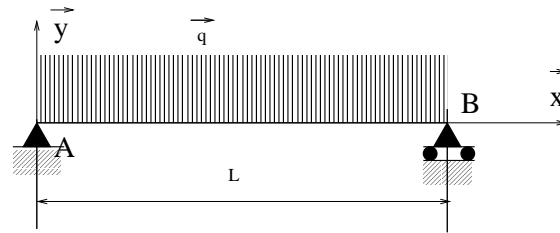
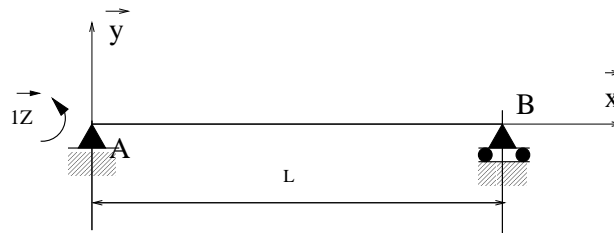
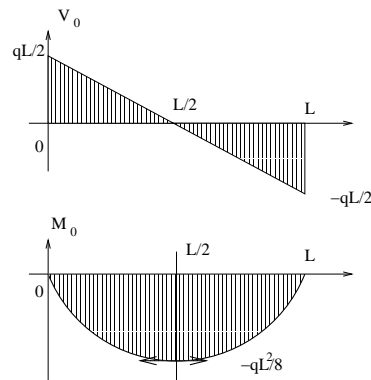
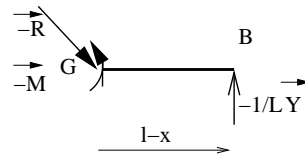
FIG. 8. Problème isostatique associé P_0 FIG. 9. Problème normé associé à l'inconnue hyperstatique \bar{P}_1 

FIG. 10. Diagrammes, problème 0

Problème \bar{P}_1 : Remarque : Le chargement correspondant à ce problème est un moment unitaire, les moments correspondant n'auront pas d'unité et les efforts correspondants auront pour unité des m^{-1} .

Calcul des réactions d'appui :

$$\bar{X}_A = 0, \bar{Y}_{A1} + \bar{Y}_{B1} = 0, 1\bar{Z} + l\bar{X} \wedge \bar{Y}_{B1}\bar{Y} = \vec{0} \text{ soit : } \bar{Y}_{B1} = -\frac{1}{L} \text{ et } \bar{Y}_{A1} = \frac{1}{L}$$



$$\vec{R}_1 = -\frac{1}{L}\vec{Y} \text{ soit } \bar{V}_1 = -\frac{1}{L}, \bar{N}_1 = 0$$

$$\vec{M}_1 = -\frac{L-x}{L}\vec{Z} \text{ soit } \bar{M}_1 = -\frac{L-x}{L}$$

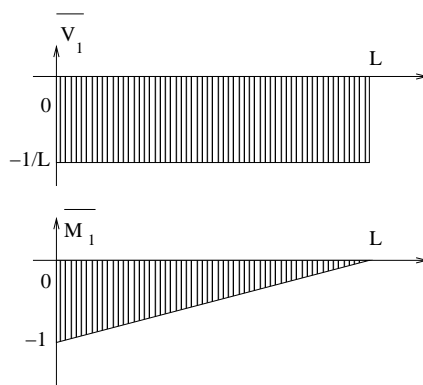


FIG. 11. Diagrammes, problème 0

Calcul de l'inconnue hyperstatique : L'inconnue hyperstatique est le moment d'encastrement au point A. On calcule la valeur de ce moment de manière à ce que la liaison initiale soit respectée, c'est à dire que la rotation du point A soit nulle.

On obtient d'après le théorème de Castigliano (équation 19) :

$$\omega_A = \frac{dW_e}{dM_A} = 0$$

avec pour une poutre à énergie de flexion dominante (c.f. la relation 10) $W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M^2}{EI} ds$ et $M = M_0 + M_A \overline{M}_1$

dans le cas d'une poutre homogène d'inertie constante, on peut écrire : $\int_{\Gamma} \frac{dM^2}{dM_A} ds = 0$ soit encore $\int_{\Gamma} 2M \frac{dM}{dM_A} ds = 0$ avec $\frac{dM}{dM_A} = \overline{M}_1$

On obtient alors : $\int_{\Gamma} (M_0 + M_A \overline{M}_1) \overline{M}_1 ds = 0$ et

$$M_A = - \frac{\int_{\Gamma} M_0 \overline{M}_1 ds}{\int_{\Gamma} \overline{M}_1 \overline{M}_1 ds}$$

Les intégrales peuvent être obtenues par le calcul ou en utilisant le tableau donné plus loin (chapitre 6 page 47)

$$\int_{\Gamma} M_0 \overline{M}_1 ds = \int_{\Gamma} \frac{qx}{2} (l-x) \frac{l-x}{l} ds = \frac{-qL^2}{8} (-1) \frac{1}{3} = \frac{qL^2}{24}$$

$$\int_{\Gamma} \overline{M}_1 \overline{M}_1 ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{l-x}{l}\right)^2 ds = (-1) (-1) \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

On obtient finalement : $M_A = -\frac{qL^2}{8}$

Solution du problème hyperstatique : La solution du problème hyperstatique est obtenue par superposition des problèmes P_0 et $M_A * \overline{P}_1$.

Actions de liaisons : $Y_A = -\frac{qL}{2} - \frac{qL^2}{8} \frac{1}{L} = -\frac{5qL}{8}$

$$Y_B = -\frac{qL}{2} - \frac{qL^2}{8} \frac{-1}{L} = -\frac{3qL}{8}$$

$$M_A = -\frac{qL^2}{8}$$

Sollicitations : $V_y = q\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{qL^2}{8} \frac{-1}{L} = \frac{q}{8}(5L - 8x)$ $V_y(0) = \frac{5qL}{8}$, $V_y(L) = -\frac{3qL}{8}$ et $V_y\left(\frac{5L}{8}\right) = 0$

$M = -\frac{qx}{2}(L-x) - \frac{qL^2}{8}\left(-\frac{L-x}{L}\right) = \frac{q(L-x)}{8}(L-4x)$, $M(0) = \frac{qL^2}{8}$, $M(L) = 0$, $M\left(\frac{L}{4}\right) = 0$ et $M\left(\frac{5L}{8}\right) = -\frac{9qL^2}{128}$

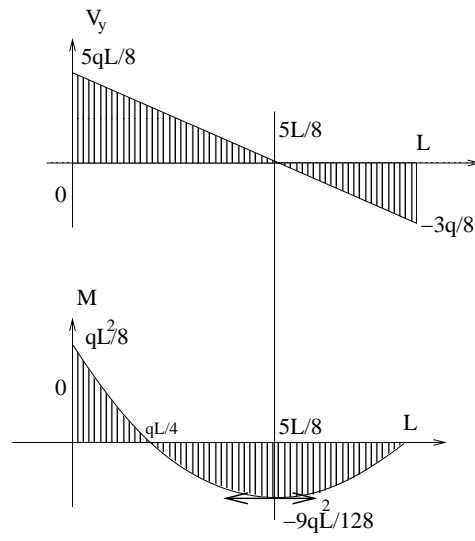


FIG. 12. Diagrammes des sollicitations

Méthode des forces

1. Introduction

La méthode des forces est basée sur le théorème de Castigliano et s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites.

On obtient un système d'équations dont la dimension est le degré d'hyperstaticité du problème étudié.

2. Décomposition du problème :

Soit une structure hyperstatique d'ordre N , sollicitée par un chargement extérieur.

Le problème hyperstatique, noté Pb , peut se décomposer en

- Un problème isostatique obtenu à partir du problème initial, en enlevant les liaisons qui rendent le problème hyperstatique et en conservant le chargement extérieur. Ce problème sera noté : Pb_0
- N problèmes correspondant aux inconnues hyperstatiques X_i ($i = 1, n$) obtenus à partir du problème isostatique chargé uniquement avec les inconnues hyperstatiques. Ces problèmes seront notés Pb_i ($i = 1, n$). Les X_i peuvent être des forces ou des moments. Voir la table 1 pour un exemple.

On peut noter :

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^n Pb_i$$

ou encore

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^n X_i \overline{Pb}_i$$

où le problème \overline{Pb}_i est le problème correspondant au Pb_i mais avec une charge (ou un moment) unitaire.

Pour toute variable Δ , on notera Δ_0 la valeur de cette variable dans le problème Pb_0 et $\overline{\Delta}_i$, sa valeur dans le problème \overline{Pb}_i et on a donc :

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta}_i$$

Δ peut être une réaction d'appui, un moment fléchissant, etc ...

3. Calcul de l'énergie interne :

L'expression de l'énergie interne peut être plus ou moins complexe en fonction de la dimension de l'espace et des hypothèses sur l'énergie.

3.1. Cas général : On ne néglige pas l'énergie due à l'effort normal ni à l'effort tranchant, on se place dans l'espace à 3 dimensions :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{V_z^2}{GA'_z} + \frac{M_x^2}{GI_0} + \frac{M_y^2}{EI_{Gy}} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} \right) ds$$

où s désigne l'abscisse curviligne de la poutre.

3.2. Cas bidimensionnel : On se place dans un espace à 2 dimensions mais on ne néglige aucune énergie.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} \right) ds$$

3.3. Cas bidimensionnel à flexion dominante : On néglige les énergies dues aux efforts tranchant et normal, seul le terme en moment fléchissant subsiste. C'est le cas le plus courant, Il faut être conscient que la déformée due aux efforts tranchants mais aussi aux efforts normaux est négligée.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} ds$$

4. Calcul des inconnues hyperstatiques.

4.1. Résolution des problèmes associés : Il faut premièrement résoudre le problème isostatique associé ainsi que les problèmes associés à chaque inconnue hyperstatique.

Il faudra notamment, tracer les diagrammes des projections locales du torseur des efforts intérieurs à prendre en compte dans l'énergie.

Voir le tableau 2 pour un exemple.

4.2. Application du théorème de Castigliano. Si les liaisons sont rigides, alors les déplacements associés à chaque projection des actions hyperstatiques sont nuls. Dans le cas où l'action est un moment, la rotation correspondante est nulle. $\delta_k = \frac{dW_e}{dX_k} = 0$ si X_k est une force ou $\omega_k = \frac{dW_e}{dX_k} = 0$ si X_k est un moment. soit dans tous les cas : $\frac{dW_e}{dX_k} = 0$

Suivant les hypothèses faites et la dimension de l'espace considéré, l'énergie est la somme de m termes provenant des types de sollicitations Δ_j affectés des caractéristiques de raideur λ_j correspondantes.

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 = N & \lambda_1 = EA \\ \Delta_2 = V_y & \lambda_2 = GA'_y \\ \Delta_3 = V_z & \lambda_3 = GA'_z \\ \Delta_4 = M_x & \lambda_4 = EI_0 \\ \Delta_5 = M_y & \lambda_5 = EI_{Gy} \\ \Delta_6 = M_z & \lambda_6 = EI_{Gz} \end{array}$$

Dans le cas général, on a : $m = 6$,

$$W_e = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j^2}{2\lambda_j} ds$$

avec

$$\Delta_j = \Delta_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_{ji}}$$

$$\frac{dW_e}{dX_k} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\lambda_j} \frac{d\Delta_j^2}{dX_k} ds$$

soit

$$\frac{dW_e}{dX_k} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j}{\lambda_j} \frac{d\Delta_j}{dX_k} ds$$

avec

$$\frac{d\Delta_j}{dX_k} = \overline{\Delta_{jk}}$$

$$\frac{dW_e}{dX_k} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds$$

$$\frac{dW_e}{dX_k} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds = 0$$

$$\int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} \overline{\Delta_{jk}}}{\lambda_j} ds + \sum_{i=1}^n X_i \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds = - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} \overline{\Delta_{jk}}}{\lambda_j} ds$$

Ce qui donne un système de N équations à N inconnues.

Les intégrales pouvant être calculées séparément et on peut poser :

$$S_{ik} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds$$

et

$$U_k = - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} \overline{\Delta_{jk}}}{\lambda_j} ds$$

U_k est homogène à un déplacement si X_k est un effort et à une rotation si X_k est un moment. S_{ik} est une souplesse

on a donc :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots etc... & S_{1n} \\ S_{12} & S_{22} & \dots etc... & S_{2n} \\ & & \dots etc... & \\ S_{1n} & S_{2n} & \dots etc... & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots etc... \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots etc... \\ U_n \end{bmatrix}$$

Ce qui se réduit au système suivant si le problème est bidimensionnel à flexion prédominante :

$$\begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_1 M_1}}{EI_{Gz}} ds & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_1 M_2}}{EI_{Gz}} ds & \dots etc... & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_1 M_n}}{EI_{Gz}} ds \\ \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_1 M_2}}{EI_{Gz}} ds & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_2 M_2}}{EI_{Gz}} ds & \dots etc... & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_2 M_n}}{EI_{Gz}} ds \\ & & \dots etc... & \\ \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_1 M_n}}{EI_{Gz}} ds & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_2 M_n}}{EI_{Gz}} ds & \dots etc... & \int_{\Gamma} \frac{\overline{M_n M_n}}{EI_{Gz}} ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots etc... \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_1}}{EI_{Gz}} ds \\ - \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_2}}{EI_{Gz}} ds \\ \dots etc... \\ - \int_{\Gamma} \frac{M_0 \overline{M_n}}{EI_{Gz}} ds \end{bmatrix}$$

5. Exemples :

5.1. Poutre bi-encastée : On traite l'exemple donné dans le tableau 1. C'est le cas d'une poutre bi-encastée de longueur L sollicitée par une charge uniformément répartie $\vec{q} = q\vec{y}$. On fera l'hypothèse d'un calcul plan, et on négligera l'énergie due à l'effort tranchant. $L = 4m$ $q = -50kN/m$. Le problème est hyperstatique d'ordre 3.

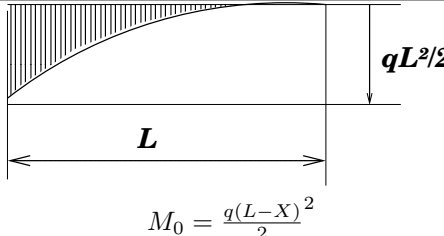
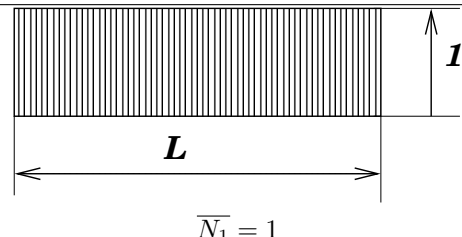
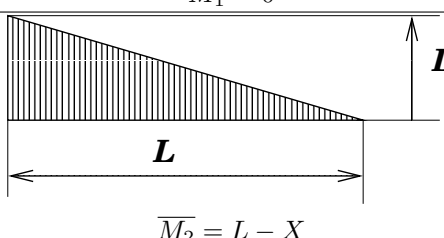
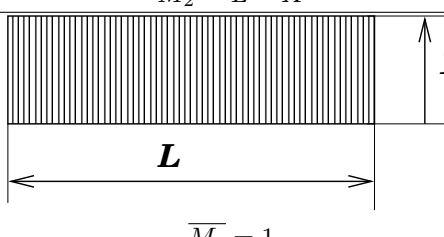
5.1.1. *Décomposition :* Le choix du problème isostatique associé est libre, il est néanmoins conseillé de choisir une décomposition qui facilitera la suite des calculs. Ici on fait le choix de garder un encastrement et de décomposer le second en inconnues hyperstatiques (tableau 1).

Problème	Représentation
Complet: Pb	
Isostatique Pb_0	
Associé à X_a : $\overline{Pb_1}$	
Associé à Y_a : $\overline{Pb_2}$	
Associé à M_a : $\overline{Pb_3}$	

TAB. 1. Exemple de décomposition d'un problème hyperstatique

5.1.2. *Résolution des problèmes isostatiques :* Les problèmes sont classiques et ne posent aucune difficulté. Comme l'énergie de cisaillement est négligée, il suffit de calculer le moment fléchissant et l'effort normal.

Les résultats sont donnés dans le tableau 2

	Moment Fléchissant	Effort Normal
Pb_0	 $M_0 = \frac{q(L-X)^2}{2}$	$N_0 = 0$
$\overline{Pb_1}$	$\overline{M_1} = 0$	 $\overline{N_1} = 1$
$\overline{Pb_2}$	 $\overline{M_2} = L - X$	$\overline{N_2} = 0$
$\overline{Pb_3}$	 $\overline{M_3} = 1$	$\overline{N_3} = 0$

TAB. 2. Calcul des sollicitations.

5.1.3. *Calcul des intégrales.* EI_{Gz} est constant sur la poutre et peut être sorti de toutes les intégrales qui peuvent être calculées à l'aide du tableau 1

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M_0 \overline{M_1} ds &= 0 \\ \int_{\Gamma} M_0 \overline{M_2} ds &= \frac{qL^4}{8} \\ \int_{\Gamma} M_0 \overline{M_3} ds &= \frac{qL^3}{6} \\ \int_{\Gamma} \overline{M_2} \overline{M_2} ds &= \frac{L^3}{3} \\ \int_{\Gamma} \overline{M_2} \overline{M_3} ds &= \frac{L^2}{2} \\ \int_{\Gamma} \overline{M_3} \overline{M_3} ds &= L \\ \int_{\Gamma} \overline{N_1} \overline{N_1} ds &= L \end{aligned}$$

5.1.4. *Calcul des inconnues hyperstatiques.* Les termes de la matrice de souplesse sont calculés à partir des expressions des moments et des efforts normaux.

$$S_{11} = \frac{1}{EA} \int_{\Gamma} \overline{N_1} \overline{N_1} ds + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} \overline{M_1} \overline{M_1} ds = \frac{L}{EA}$$

$$S_{22} = \frac{1}{EA} \int_{\Gamma} \overline{N_2 N_2} ds + \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} \overline{M_2 M_2} ds = \frac{L^3}{3EI_{Gz}}$$

Les autres termes de la matrice ne comportent que des moments. Comme $N_0 = 0$, le second membre ne comporte que des termes en moment.

Les intégrales peuvent être calculées à l'aide du tableau 1

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_{Gz}} & \frac{L^2}{2EI_{Gz}} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_{Gz}} & \frac{L}{EI_{Gz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^4}{8EI_{Gz}} \\ -\frac{qL^3}{6EI_{Gz}} \end{bmatrix} \text{ ou : } \begin{cases} X_A = 0 \\ (1) : 2L^3 Y_A + 3L^2 M_A = -\frac{3qL^4}{4} \\ (2) : L^2 Y_A + 2L M_A = -\frac{qL^3}{3} \end{cases}$$

La méthode permet de calculer X_A , mais il n'y a pas de couplage entre la flexion et l'effort normal compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations. (Les efforts sont calculés sur la structure non déformée). Le système peut être résolu par une méthode quelconque. Des combinaisons judicieuses d'équations donnent généralement une solution rapide. Je vous conseille vivement de vérifier constamment l'homogénéité de vos équations.

$$\begin{cases} 2 * (1) - 3L * (2) \rightarrow: L^3 Y_A = -\frac{qL^4}{2} \\ 3 * (1) - 2L * (2) \rightarrow: -L^2 M_A = -\frac{qL^4}{12} \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} Y_A = -\frac{qL}{2} \\ M_A = \frac{qL^2}{12} \end{cases}$$

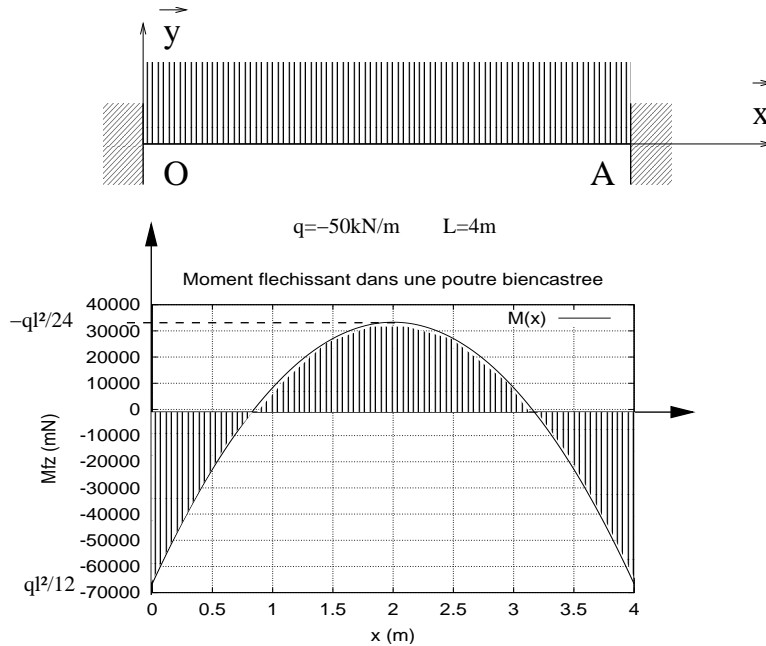
5.1.5. *Solution du problème hyperstatique.* Pour toute variable Δ du problème hyperstatique on a :

$$\Delta = \Delta_0 + X_A \overline{\Delta_1} + Y_A \overline{\Delta_2} + M_A \overline{\Delta_3}$$

$$N = 0$$

$$M = \frac{q(L-x)^2}{2} - \frac{qL}{2}(L-x) + \frac{qL^2}{12}$$

$$M = -\frac{qx(L-x)}{2} + \frac{qL^2}{12}$$



5.2. Portique : Un portique bi-encasté est sollicité par une charge répartie $q\vec{x}$ sur $[OA]$ et $-q\vec{x}$ $[BC]$ (Figure 1). La section et l'inertie sont constants et le problème est supposé à flexion dominante.

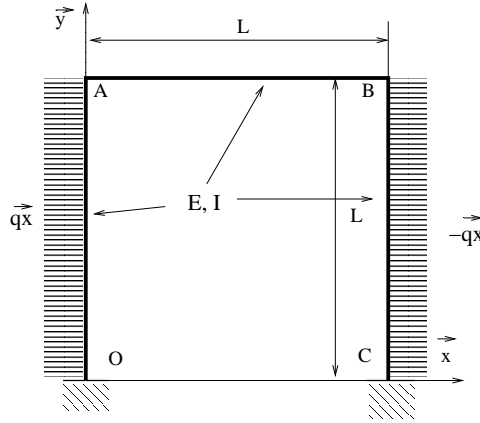


FIG. 1. Portique

5.2.1. *Décomposition du problème.* Le problème original est hyperstatique d'ordre 3, il y a une symétrie représentée sur la figure 2 par une liaison glissière en D. Le problème symétrique est hyperstatique d'ordre 2. Je choisis comme inconnues hyperstatiques, les actions de liaison en D : X_D et M_D et le problème se décompose comme montré sur la figure 3.

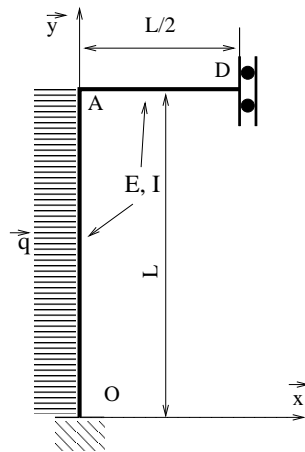


FIG. 2. Problème symétrique

5.2.2. *Tracé des diagrammes des sollicitations.* Les diagrammes des sollicitations pour chaque problème se trouvent sans faire de calcul, il faut néanmoins faire attention à l'orientation du repère local de projection sur le poteau $[OA]$: $\vec{X} = \vec{y}$ et $\vec{Y} = -\vec{x}$

5.2.3. *Calcul des inconnues hyperstatiques.* Les intégrales sont obtenues directement :

$$\begin{aligned} - \int M_O \bar{M}_1 &= \frac{qL^4}{8}, \int M_O \bar{M}_2 = -\frac{qL^3}{6}, \\ - \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 &= \frac{L^3}{3}, \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 = -\frac{L^3}{2}, \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

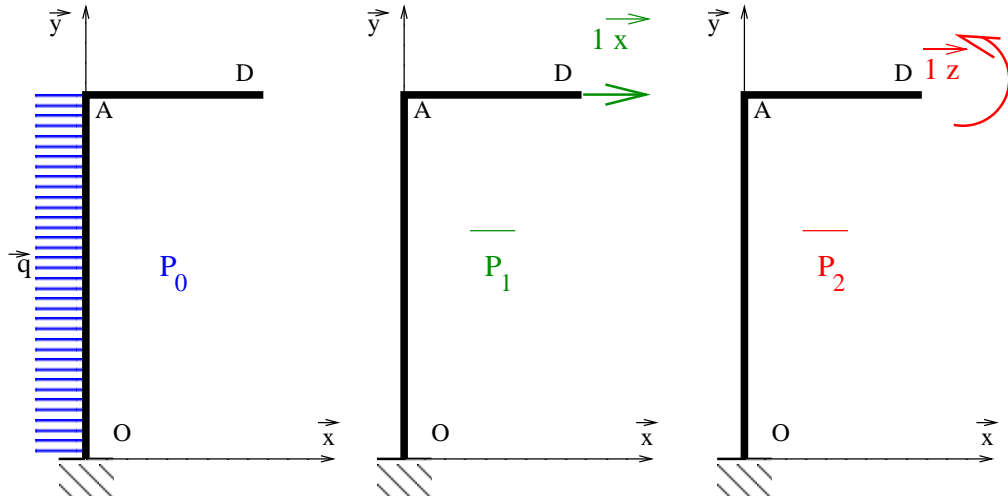


FIG. 3. Décomposition du problème

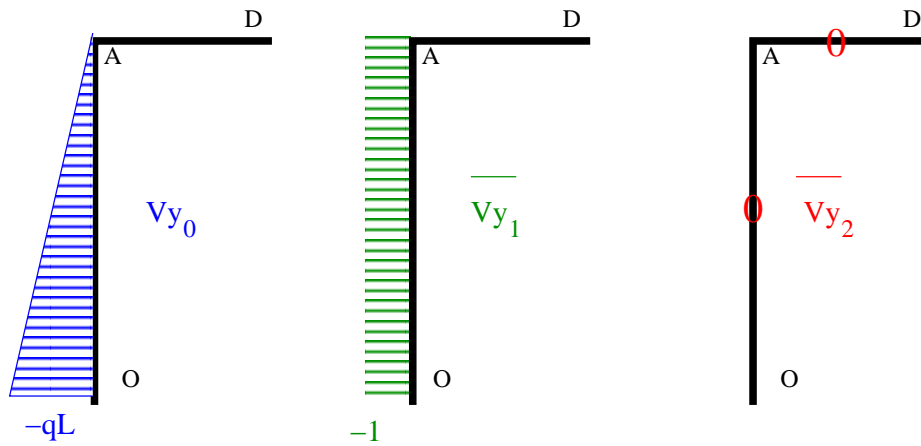


FIG. 4. Efforts tranchants

On peut alors écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{L^3}{3} X_D + -\frac{L^2}{2} M_D = \frac{qL^4}{8} \\ -\frac{L^2}{2} X_D + \frac{3L}{2} M_D = \frac{qL^3}{6} \end{cases}$$

soit en simplifiant :

$$\begin{cases} 2LX_D - 3M_D = -\frac{3qL}{12} & (1) \\ -LX_D + 3M_D = \frac{qL^2}{3} & (2) \end{cases}$$

Ce système se résout facilement par combinaison des équations :

$$\begin{cases} (1) + (2) \rightarrow X_D = -\frac{5qL}{12} \\ 2 * (2) + 1 \rightarrow M_D = -\frac{qL^2}{36} \end{cases}$$

5.2.4. *Solution du problème hyperstatique.* On peut alors tracer le diagramme de l'effort tranchant par superposition des problèmes :

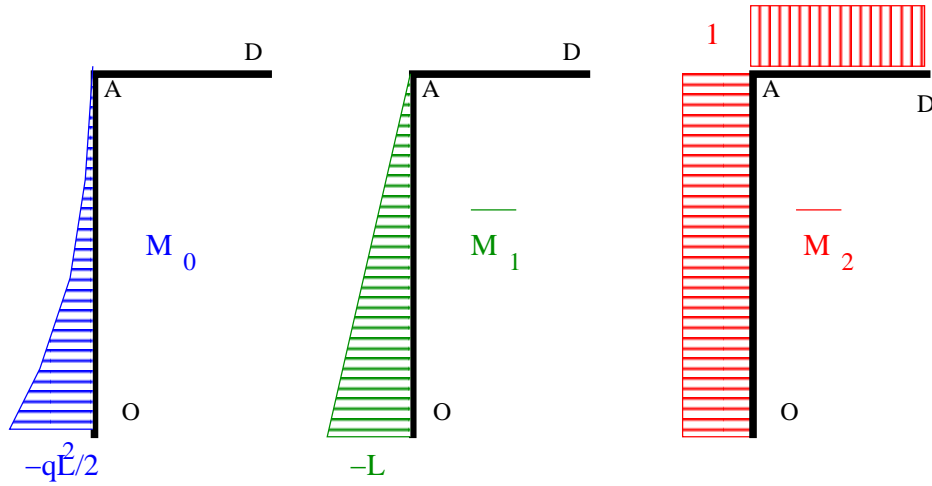


FIG. 5. Moments fléchissants

pour tout point $M, V_y(M) = V_{y0}(M) + X_D \overline{V_{y1}}(M) + M_D \overline{V_{y2}}(M)$.

$$V_y(O) = -qL - 1 \cdot X_D + 0 \cdot M_D = -qL + \frac{5qL}{12} = \frac{7qL}{12}, V_y(A) = 0 - 1 \cdot X_D + 0 \cdot M_D = -\frac{5qL}{12} \text{ et } V_y(B) = 0$$

L'effort tranchant s'annule pour le point E d'ordonnée $y = \frac{7L}{12}$

de même pour le moment fléchissant, nous avons :

$$M_{fz}(0) = -\frac{qL^2}{2} + \frac{5qL^2}{12} - \frac{qL^2}{36} = -\frac{qL^2}{9}, M_{fz}(A) = M_{fz}(D) = -\frac{qL^2}{36} \text{ et } M_{fz}(A) - M_{fz}(E) = -\int_E^A V_y ds = -\frac{1}{2} \frac{5qL}{12} * \frac{5L}{12} = -\frac{25qL^2}{288} \text{ soit } M_{fz}(E) = \frac{17qL^2}{288}$$

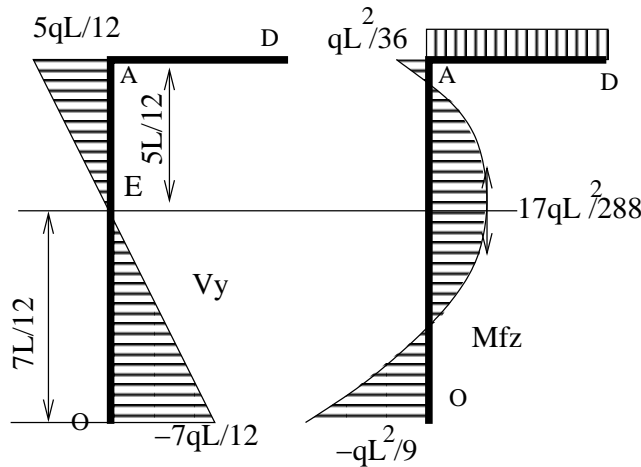


FIG. 6. Sollicitations du problème hyperstatique

Formule des trois moments

1. Introduction :

Les moments sont comme les petits cochons, il se regroupent souvent par trois ... Heuu non ce n'est pas ça!!

1.1. Motivation : La formule des trois moments est une écriture particulière de la méthode des forces adaptée aux poutres continues.

1.2. Hypothèses : Nous traiterons par la suite d'une poutre droite posée sur $N + 2$ appuis simples chargée par des forces concentrées ou réparties dont la direction est perpendiculaire à l'axe de la poutre.

(Figure 1)

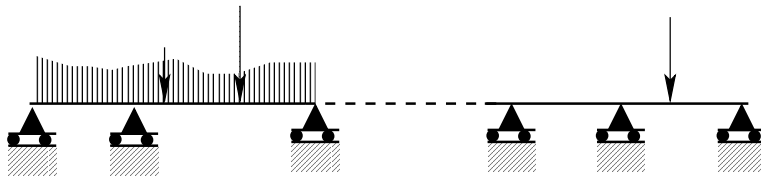


FIG. 1. Poutre continue

Le problème posé possède une mobilité correspondant à la translation suivant l'axe de la poutre. Si cette mobilité est gênante, il suffit de remplacer une liaison ponctuelle par une rotule.

Le problème se situe dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) et est à flexion dominante. L'inertie de section et le module d'élasticité sont constants sur la poutre.

1.3. Notations : Les appuis sont notés C_0, C_1, \dots, C_{n+1} .

La portion de poutre $\Gamma_i = [C_{i-1}, C_i]$ est la travée i de longueur l_i (Figure 2)

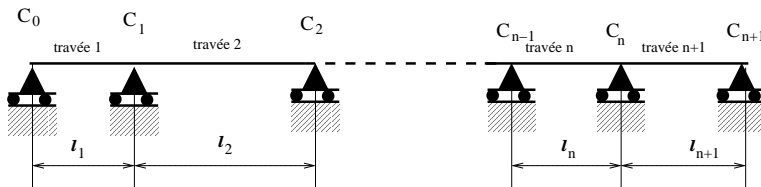


FIG. 2. Notations

2. Résolution :

Le problème est hyperstatique d'ordre N , on utilise la méthode des forces avec une décomposition particulière.

2.1. Décomposition du problème : Plutôt que de considérer que le problème isostatique associé est une poutre sur deux appuis - dans ce cas les inconnues hyperstatiques seraient N réactions d'appuis - on introduit une rotule entre chaque travée au droit des appuis C_1 à C_n . (Voir figure 3).

Le problème isostatique associé correspond à $N + 1$ poutres sur deux appuis correspondant à chaque travée.

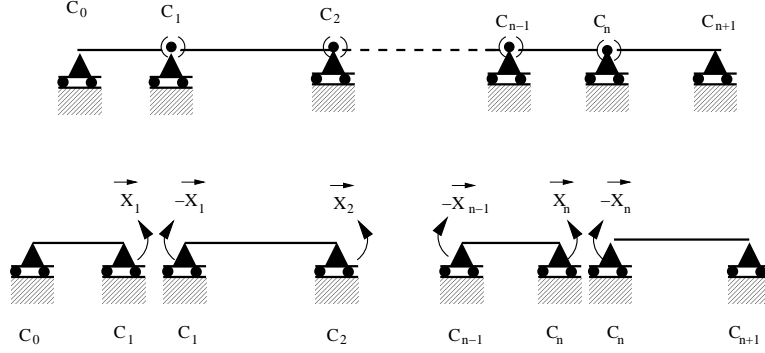


FIG. 3. Décomposition du problème hyperstatique

Les inconnues hyperstatiques sont les moments X_i exercés par la travée $i + 1$ sur la travée i .

Le moment exercé par la travée i sur la travée $i + 1$ étant $-X_i$

Les moments X_i sont également les moments fléchissant du problème hyperstatique au droit des appuis.

2.2. Équations de continuité de la rotation. Les inconnues X_i sont calculées de façon à ce que la rotation de section soit continue.

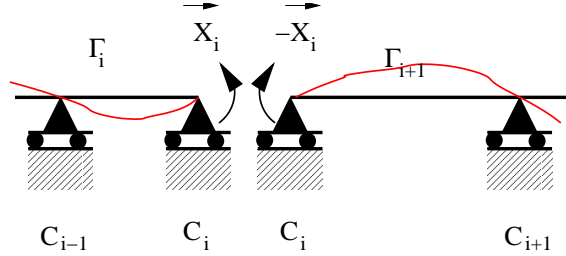


FIG. 4. Appui i

On a donc la rotation de section ω_{i_i} au droit de l'appui C_i pour la travée Γ_i est égale à la rotation de section $\omega_{i_{i+1}}$ au droit de l'appui C_i pour la travée Γ_{i+1} .

Soit : $\omega_{i_i} = \omega_{i_{i+1}}$

D'après le théorème de Castigliano, on a :

$$\omega_{i_i} = \frac{dW_e^{\Gamma_i}}{dX_i} = \int_{\Gamma_i} \frac{M}{EI_{Gz}} \frac{dM}{dX_i} ds \text{ et } \omega_{i_{i+1}} = \frac{dW_e^{\Gamma_{i+1}}}{dX_i} = \int_{\Gamma_{i+1}} \frac{M}{EI_{Gz}} \frac{dM}{d-X_i} ds$$

soit $\int_{\Gamma_i} \frac{M}{EI_{Gz}} \frac{dM}{dX_i} ds + \int_{\Gamma_{i+1}} \frac{M}{EI_{Gz}} \frac{dM}{dX_i} ds = 0$ avec EI_{Gz} constant.

Si on définit x_i l'abscisse curviligne de la travée i et x_{i+1} l'abscisse curviligne de la travée $i + 1$ (Figure 5)

$$\int_0^{l_i} M \frac{dM}{dX_i} dx_i + \int_0^{l_{i+1}} M \frac{dM}{dX_i} dx_{i+1} = 0$$

Pour chaque inconnue X_i ce qui donne un système de N équations à N inconnues.

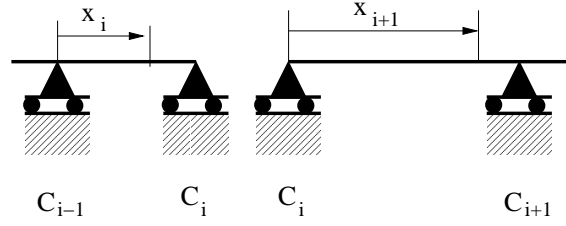
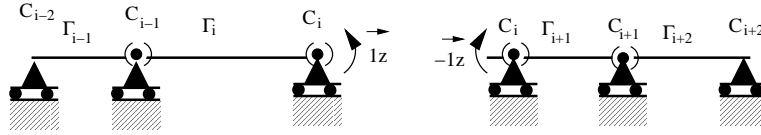
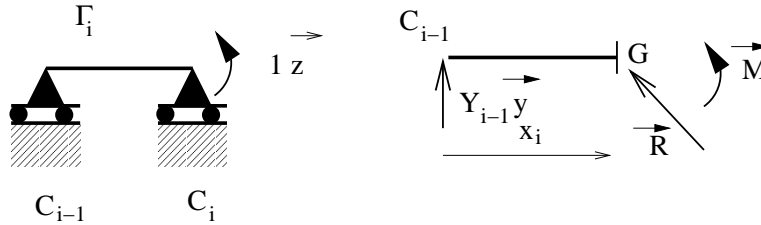


FIG. 5. Abscisses locales

2.3. Calcul des moments : Pour que les problèmes traités soient les mêmes dans chaque travée et que l'on puisse écrire $M = M_0 + \sum_{i=1}^n X_i \bar{M}_i$ (où M_0 est le moment fléchissant obtenu à partir du chargement extérieur appliqué indépendamment sur chaque travée), les \bar{M}_i sont les moments fléchissants obtenus par application d'un moment unitaire au droit des appuis C_i (Figure 6) affectés d'un signe positif sur la travée Γ_i et d'un signe négatif sur la travée Γ_{i+1} .

FIG. 6. Problème $\bar{P}b_i$

Étant donnée la présence des rotules, le moment appliqué n'a d'actions que sur les travées Γ_i et Γ_{i+1} .

FIG. 7. Calcul de \bar{M}_i sur la travée Γ_i

2.3.1. *Calcul de \bar{M}_i sur la travée Γ_i .*

Réactions d'appuis : Isolons la poutre.

L'équation de moment en C_{i-1} donne : $l_i \vec{x} \wedge Y_i \vec{y} + 1 \vec{z} = \vec{0}$ soit : $Y_i = \frac{-1}{l_i}$

L'équation de la résultante donne : $Y_{i-1} \vec{y} + Y_i \vec{y} = \vec{0}$ soit : $Y_{i-1} = \frac{1}{l_i}$

Calcul des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion : Isolons Ω^-

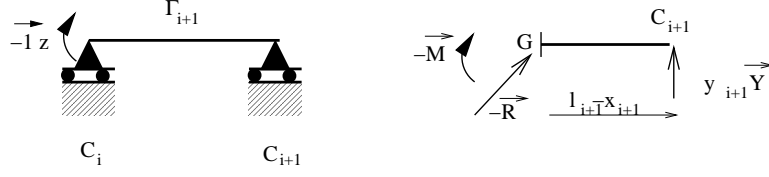
$$\vec{R} + Y_{i-1} \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \frac{-1}{l_i} \vec{y} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ V_y = \frac{-1}{l_i} \end{cases}$$

$$\vec{M} + \overrightarrow{GC_{i-1}} \wedge Y_{i-1} \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} - x_i \vec{x} \wedge \frac{1}{l_i} \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} = \frac{x_i}{l_i} \vec{z}$$

On a donc sur la travée Γ_i :

$$\begin{cases} \bar{N}_i = 0 \\ \bar{V}_{yi} = \frac{-1}{l_i} \\ \bar{M}_i = \frac{x_i}{l_i} \end{cases}$$

On aurait pu tracer directement le diagramme des moments fléchissants en sachant que le moment varie linéairement et que $\bar{M}_i(0) = 0$ et $\bar{M}_i(l_i) = 1$

FIG. 8. Calcul de \overline{M}_i sur la travée Γ_{i+1}

2.3.2. Calcul de \overline{M}_i sur la travée Γ_{i+1} .

Réactions d'appuis : Isolons la poutre.

L'équation de moment en C_i donne : $l_{i+1} \overline{x} \wedge Y_{i+1} \overline{y} - 1 \overline{z} = \overline{0}$ soit : $Y_{i+1} = \frac{1}{l_{i+1}}$

L'équation de la résultante donne : $Y_i \overline{y} + Y_{i+1} \overline{y} = \overline{0}$ soit : $Y_i = \frac{-1}{l_{i+1}}$

Calcul des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion : Isolons

Ω^+

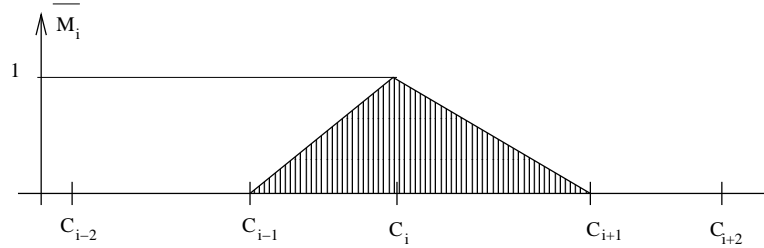
$$-\overline{R} + Y_{i+1} \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{R} = \frac{1}{l_{i+1}} \overline{y} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ V_y = \frac{1}{l_{i+1}} \end{cases}$$

$$-\overline{M} + G C_{i+1} \wedge Y_{i+1} \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow -\overline{M} + (l_{i+1} - x_{i+1}) \overline{x} \wedge \frac{1}{l_{i+1}} \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{M} = \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} \overline{z}$$

On a donc sur la travée Γ_{i+1} :

$$\begin{cases} \overline{N}_i = 0 \\ \overline{V}_{yi} = \frac{1}{l_{i+1}} \\ \overline{M}_i = \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} \end{cases}$$

On aurait pu tracer directement le diagramme des moments fléchissants en sachant que le moment varie linéairement et que $\overline{M}_i(0) = 1$ et $\overline{M}_i(l_{i+1}) = 0$

FIG. 9. Diagramme de \overline{M}_i sur la poutre

2.4. Moment fléchissant résultant sur la travée Γ_i . Les moment qui interviennent sur la travée Γ_i sont :

- Le moment dû au chargement extérieur M_0
- Le moment généré par l'inconnue X_{i-1} : $X_{i-1} * \overline{M}_{i-1}$ avec $\overline{M}_{i-1} = \frac{l_i - x_i}{l_i}$
- Le moment généré par l'inconnue X_i : $X_i * \overline{M}_i$ avec $\overline{M}_i = \frac{x_i}{l_i}$

$$M = M_0 + X_{i-1} * \overline{M}_{i-1} + X_i * \overline{M}_i \text{ avec } \begin{cases} \overline{M}_{i-1} = \frac{l_i - x_i}{l_i} \\ \overline{M}_i = \frac{x_i}{l_i} \end{cases}$$

2.5. Moment fléchissant résultant sur la travée Γ_{i+1} . On a de la même manière :

$$M = M_0 + X_i * \overline{M}_i + X_{i+1} * \overline{M}_{i+1} \text{ avec } \begin{cases} \overline{M}_i = \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} \\ \overline{M}_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{l_{i+1}} \end{cases}$$

2.6. Équation de continuité de la rotation en C_i . La continuité des rotations donne :

$$\int_0^{l_i} M \frac{dM}{dX_i} dx_i + \int_0^{l_{i+1}} M \frac{dM}{dX_i} dx_{i+1} = 0$$

avec

$$\frac{dM}{dX_i} = \overline{M}_i$$

$$\int_0^{l_i} (M_0 + X_{i-1} * \overline{M}_{i-1} + X_i * \overline{M}_i) \overline{M}_i dx_i + \int_0^{l_{i+1}} (M_0 + X_i * \overline{M}_i + X_{i+1} * \overline{M}_{i+1}) \overline{M}_i dx_{i+1} = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_i} M_0 \overline{M}_i dx_i + \int_0^{l_{i+1}} M_0 \overline{M}_i dx_{i+1} + X_{i-1} \int_0^{l_i} \overline{M}_{i-1} \overline{M}_i dx_i + \\ & + X_i \left[\int_0^{l_i} \overline{M}_i \overline{M}_i dx_i + \int_0^{l_{i+1}} \overline{M}_i \overline{M}_i dx_{i+1} \right] + X_{i+1} \int_0^{l_{i+1}} \overline{M}_{i+1} \overline{M}_i dx_{i+1} = 0 \end{aligned}$$

les valeurs des intégrales peuvent être obtenues à partir du tableau 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{l_i} \overline{M}_{i-1} \overline{M}_i dx_i = \int_0^{l_i} \frac{l_i - x_i}{l_i} \frac{x_i}{l_i} dx_i = \frac{l_i}{6} \\ \int_0^{l_i} \overline{M}_i \overline{M}_i dx_i = \int_0^{l_i} \frac{x_i^2}{l_i^2} dx_i = \frac{l_i}{3} \\ \int_0^{l_{i+1}} \overline{M}_i \overline{M}_i dx_{i+1} = \int_0^{l_{i+1}} \frac{(l_{i+1} - x_{i+1})^2}{l_{i+1}^2} dx_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{3} \\ \int_0^{l_{i+1}} \overline{M}_{i+1} \overline{M}_i dx_{i+1} = \int_0^{l_{i+1}} \frac{x_{i+1}}{l_{i+1}} \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} dx_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{6} \end{array} \right.$$

Soit :

$$\int_0^{l_i} M_0 \frac{x_i}{l_i} dx_i + \int_0^{l_{i+1}} M_0 \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} dx_{i+1} + X_{i-1} \frac{l_i}{6} + X_i \frac{l_i + l_{i+1}}{3} + X_{i+1} \frac{l_{i+1}}{6} = 0$$

En multipliant par 6 on obtient la fameuse formule :

$$X_{i-1} l_i + 2X_i (l_i + l_{i+1}) + X_{i+1} l_{i+1} + 6 \int_0^{l_i} M_0 \frac{x_i}{l_i} dx_i + 6 \int_0^{l_{i+1}} M_0 \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} dx_{i+1} = 0$$

Remarques :

$\int_0^{l_i} \frac{M_0}{EI} \frac{x_i}{l_i} dx_i$ est également la rotation du point C_i pour la travée i isostatique et est souvent noté ω_i^+ ou ω''_i

$\int_0^{l_{i+1}} \frac{M_0}{EI} \frac{l_{i+1} - x_{i+1}}{l_{i+1}} dx_{i+1}$ est l'opposé de la rotation du point C_i pour la travée $i + 1$ isostatique et est souvent appelée $-\omega_{i+1}^-$ ou $-\omega'_{i+1}$

3. Utilisation

La formule des trois moments est applicable sur chaque appui pour lequel on a introduit une rotule (Figure 3) soit sur les appuis C_i pour $i = 1$ à n

On prendra de toute évidence de $X_0 = 0$ et $X_n = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_1 (l_1 + l_2) + X_2 l_2 + 6 \int_0^{l_1} M_0 \frac{x_1}{l_1} dx_1 + 6 \int_0^{l_2} M_0 \frac{l_2 - x_2}{l_2} dx_2 = 0 \\ X_1 l_2 + 2X_2 (l_2 + l_3) + X_3 l_3 + 6 \int_0^{l_2} M_0 \frac{x_2}{l_2} dx_2 + 6 \int_0^{l_3} M_0 \frac{l_3 - x_3}{l_3} dx_3 = 0 \\ \dots \text{etc} \dots \\ X_{n-2} l_{n-1} + 2X_{n-1} (l_{n-1} + l_n) + X_n l_n + 6 \int_0^{l_{n-1}} M_0 \frac{x_{n-1}}{l_{n-1}} dx_{n-1} + 6 \int_0^{l_n} M_0 \frac{l_n - x_n}{l_n} dx_n = 0 \\ X_{n-1} l_n + 2X_n (l_n + l_{n+1}) + 6 \int_0^{l_n} M_0 \frac{x_n}{l_n} dx_n + 6 \int_0^{l_{n+1}} M_0 \frac{l_{n+1} - x_{n+1}}{l_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

Chaque équation comporte 3 inconnues sauf la première et la dernière qui n'en ont que 2. Le système est dit tri-diagonal, sa résolution est généralement aisée.

4. Cas particulier d'une poutre à travées de même longueur.

C'est un cas relativement courant, la formule générale se simplifie pour donner :

$$X_{i-1} + 4X_i + X_{i+1} + 6 \int_0^l M_0 \frac{x_i}{l^2} dx_i + 6 \int_0^l M_0 \frac{l-x}{l^2} dx_{i+1} = 0$$

5. Exemples :

Un exemple particulièrement simple est traité dans la suite, vous trouverez un autre exemple légèrement plus complexe sur :

le site de l'ISA-BTP http://web.univ-pau.fr/~clb/rdm/isa2/exos/10mars03/exo_poutcont.pdf.

Dans ces exemples j'ai pris l'option montrer comment on peut utiliser la méthode sans pour autant connaître la formule des 3 moments. La méthode consiste simplement à utiliser la méthode des forces avec la décomposition proposée pour les 3 moments.

5.1. Poutre continue à 3 travées égales : Une poutre continue à travées égales, inertie I_{gz} et module d'élasticité E constants est donnée sur la figure Figure 10.

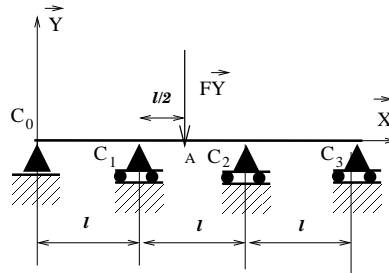


FIG. 10. Poutre hyperstatique

Le problème est hyperstatique d'ordre 2 (il est symétrique, mais la prise en compte de la symétrie ne réduit pas le nombre d'inconnues et ne simplifie pas le problème) et la décomposition se fait classiquement pour les poutres continues en introduisant une rotule au droit des appuis intermédiaires.

5.1.1. *Calcul des inconnues hyperstatiques.* Les inconnues hyperstatiques sont alors les moments fléchissants X_1 et X_2 au droit des appuis C_1 et C_2 . Les diagrammes de sollicitations des problèmes se tracent sans faire de calculs et sont reportés sur le tableau 1.

Les intégrales s'obtiennent graphiquement :

$$\int M_O \bar{M}_1 = -\frac{FL^2}{16}, \int M_O \bar{M}_2 = -\frac{FL^2}{16}, \\ \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \frac{2L}{3}, \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 = \frac{L}{6}, \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{2L}{3}$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} (1) \quad \frac{2L}{3} X_1 + \frac{L}{6} X_2 = -\frac{FL^2}{16} \\ (2) \quad \frac{L}{6} X_1 + \frac{2L}{3} X_2 = -\frac{FL^2}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) - (2) \rightarrow X_1 = X_2 \\ (1) \rightarrow X_1 = \frac{3FL}{40} \end{cases}$$

P_0	\overline{P}_1	\overline{P}_2

TAB. 1. Décomposition du problème

5.1.2. *Tracé des diagrammes de sollicitations.* Les diagrammes sont alors obtenus par superposition (figure 11).

Le moment en A est $M_{fz}(A) = -\frac{FL}{4} + \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = -\frac{7FL}{40}$.

Le problème étant symétrique, le moment fléchissant est symétrique et l'effort tranchant antisymétrique.

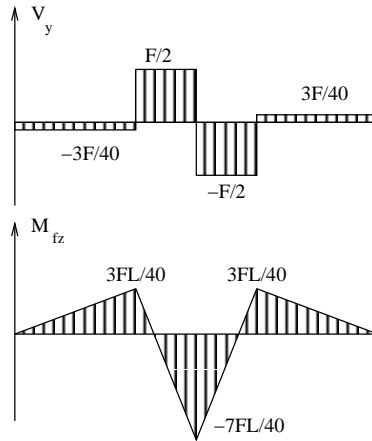


FIG. 11. Diagrammes des sollicitations dans la poutre

5.2. Calcul du déplacement du point A. On utilise le théorème de Castigliano :

$$\delta_A = \frac{dW_e}{dF} \text{ avec } W_e = \frac{1}{2EI_{Gz}} \int_{\Gamma} (M_0 + X_1 \overline{M}_1 + X_2 \overline{M}_2)^2 ds$$

on peut écrire en utilisant les dérivées partielles $\frac{dW_e}{dF} = \frac{\partial W_e}{\partial F} + \frac{\partial W_e}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dF} + \frac{\partial W_e}{\partial X_2} \frac{dX_2}{dF}$

or les équations (1) et (2) sont $\frac{\partial W_e}{\partial X_1} = 0$ $\frac{\partial W_e}{\partial X_2} = 0$

on en déduit donc que $\delta_A = \frac{\partial W_e}{\partial F}$. (On peut retrouver le même résultat en développant et en reconnaissant les équations (1) et (2)).

On obtient donc $\delta_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} \frac{\partial M_0}{\partial F} (M_0 + X_1 \overline{M_1} + X_2 \overline{M_2}) ds$
avec $\frac{\partial M_0}{\partial F} = \frac{M_0}{F} = \overline{M_0}$.

La plupart des intégrales sont déjà calculées, il reste à calculer

$$\int_{\Gamma} M_0 \overline{M_0} = 2 * \frac{FL^2}{16} \frac{L}{2} \frac{1}{3} = \frac{FL^3}{18}$$

On obtient $\delta_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\frac{FL^3}{18} + \frac{3FL}{40} \frac{-L^2}{16} + \frac{3FL}{40} \frac{-L^2}{16} \right)$

$$\delta_A = \frac{11FL^3}{960EI_{Gz}}$$

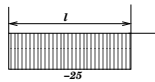
Calcul des intégrales :

Les fonctions à intégrer sont le plus souvent des polynômes dont le degré reste faible, la méthode la plus courante pour obtenir la valeur des intégrales l'utilisation des résultats donnés par le tableau dit des "intégrales de Mohr".


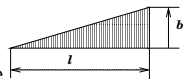
1. Intégrales de Mohr

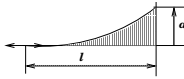
La valeur de $\int_0^l M_a M_b dx$ est donnée dans le tableau 1 pour différentes formes de M_a et de M_b .

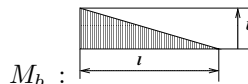
- La longueur l correspond à la longueur d'intégration est n'est pas toujours confondue avec une valeur l ou L du problème que vous traitez.
- Les coefficients α et β sont des valeurs adimensionnelles comprises entre 0 et 1 à ne pas confondre avec des longueurs qui sont en fait αl et βl
- Les valeurs de a et de b sont algébriques donc si par exemple M_a a la forme

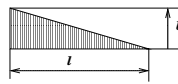


on appliquera la formule avec $a = -25$

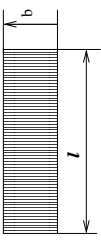
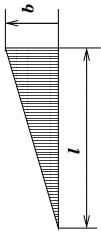
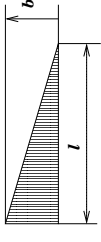
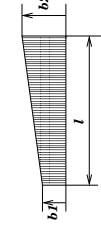
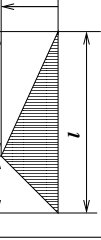

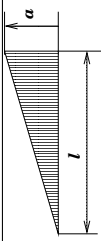
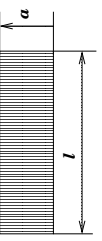
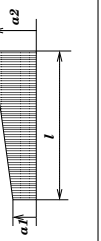
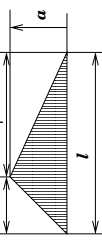

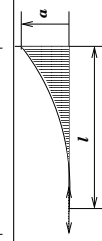
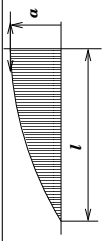
- Si par exemple M_a a la forme  et M_b a la forme , la valeur n'est pas disponible directement dans le tableau, on pourra alors

inverser le sens de description de M_a :  mais également de



M_b : . On prend la valeur correspondante dans le tableau

$$\int_0^l M_a M_b dx = \frac{abl}{12}$$

X						
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{6}$	$\frac{abl}{6}(1 + \alpha)$	$\frac{abl}{6}(1 + \alpha)$	
	abl	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}(b_1 + 2b_2)$	$\frac{abl}{2}(b_1 + b_2)$	
	$\frac{bl}{6}(a_1 + a_2)$	$\frac{bl}{6}(a_1 + 2a_2)$	$\frac{bl}{6}(2a_1 + a_2)$	$\frac{l}{6}[2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2]$	$\frac{bl}{6}[(1 + \beta)a_1 + (1 + \alpha)a_2]$	
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{6}(1 + \alpha)$	$\frac{abl}{6}(1 + \beta)$	$\frac{abl}{6}[(1 + \beta)b_1 + (1 + \alpha)b_2]$	$\frac{abl}{3}$	
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{3}(b_1 + b_2)$	$\frac{abl}{3}(1 + \alpha\beta)$	
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{12}$	$\frac{abl}{12}(b_1 + 3b_2)$	$\frac{abl}{12}(1 + \alpha + \alpha^2)$	
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{12}(3b_1 + 5b_2)$	$\frac{abl}{12}(5 - \beta - \beta^2)$	

TAB. 1. Valeurs de $\int_0^l M_a M_b dx$