

MECANIQUE DES STRUCTURES
METHODES ENERGETIQUES

SOMMAIRE

I - THEORIE DU POTENTIEL INTERNE.....	3
1°/ INTRODUCTION: TRAVAIL D'UNE FORCE, NOTION DE POTENTIEL D'UNE STRUCTURE.....	3
<i>a - Travail élémentaire d'une force.....</i>	<i>3</i>
<i>b - Travail d'une force.....</i>	<i>3</i>
<i>c - Notion de potentiel d'une structure.....</i>	<i>5</i>
2°/ HYPOTHESES THERMODYNAMIQUES.....	5
3°/ THEOREME FONDAMENTAL DE L'ENERGIE.....	6
<i>a - énoncé du théorème sous la forme utilisée en mécanique des structures.....</i>	<i>6</i>
<i>b - Calcul de W_{ext}, W_{def}.....</i>	<i>7</i>
<i>c - Exemples d'application : utilisation directe du théorème fondamental.....</i>	<i>12</i>
<i>d - Limites de d'utilisation directe du théorème fondamental.....</i>	<i>12</i>
4°/ THEOREMES ENERGETIQUES.....	13
<i>a - Notations utilisées pour les démonstrations.....</i>	<i>14</i>
<i>b - Expression du potentiel, en tant que fonction des variables efforts extérieurs.....</i>	<i>14</i>
<i>c - Recherche du déplacement en un point d'une structure: théorème de Maxwell-Betti et théorème de CASTIGLIANO.....</i>	<i>16</i>
<i>d - Cas où il n y a pas d'effort extérieur appliqué au point et dans le sens où l'on cherche le déplacement: théorème de la charge fictive.....</i>	<i>19</i>
<i>e - Généralisation du théorème de Castigliano : théorème de la charge unité, ou théorème de MULLER-BRESLAU.....</i>	<i>20</i>
II - APPLICATION A LA RESOLUTION DE SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....	22
1°/ INTRODUCTION.....	22
2°/ METHODES DES FORCES.....	22
<i>a - Cas d'une structure hyperstatique de degré 1.....</i>	<i>22</i>
<i>b - Structures hyperstatiques de degré supérieur à 1.....</i>	<i>24</i>
3°/ THEOREME DE MENABREA.....	25

I - THEORIE DU POTENTIEL INTERNE.

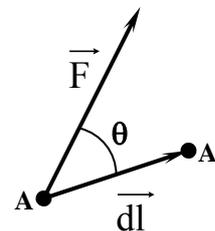
1°/ Introduction: Travail d'une force, notion de potentiel d'une structure.

REMARQUE : l'étude faite ici concerne essentiellement, sauf mention particulière, des structures planes chargées dans leur plan.

a - Travail élémentaire d'une force.

Le travail élémentaire dW d'une force \vec{F} dont le point d'application A se déplace de entre A et A' ($\vec{dl} = \overrightarrow{AA'}$) est égal au produit scalaire de \vec{F} par \vec{dl} .

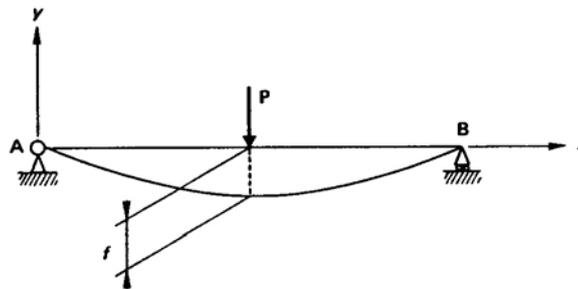
$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F \cdot dl \cdot \cos\theta$$



b - Travail d'une force.

Il ne s'agit ici que de rappel de la notion de travail par l'intermédiaire de deux exemples:

Exemple 1 : étude d'une poutre en flexion, soumise à l'effort P .



Lorsque P augmente, la flèche f de la poutre au droit du point d'application de P augmente proportionnellement à P si le matériau constituant la poutre est élastique linéaire.

On suppose en outre que P est appliqué progressivement, c'est-à-dire de manière réversible (du point de vue thermodynamique) - on reviendra sur cette hypothèse dans le paragraphe suivant.

Soit λ un paramètre compris entre 0 et 1 permettant de décrire l'évolution de l'effort appliqué, entre 0 et P .

L'évolution de P et, conjointement, celle de f est représentée par le tableau suivant:

	P	f	
0 : état initial	0	0	$0 \leq \lambda \leq 1$
⋮	⋮	⋮	
état (λ)	λP	λf	
état ($\lambda + d\lambda$)	$(\lambda + d\lambda) P$	$(\lambda + d\lambda) f$	
⋮	⋮	⋮	
1 : état final	P	f	

où $d\lambda$ représente une variation très faible du paramètre λ .

Expression du travail élémentaire effectué pour passer de l'état (λ) à l'état ($\lambda + d\lambda$) :

$$dW = [(\lambda + d\lambda)f - \lambda f] \cdot (\lambda + d\lambda) P$$

$$= \lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P + (d\lambda)^2 \cdot f \cdot P$$

on néglige le terme $(d\lambda)^2 \cdot f \cdot P$ qui représente un infiniment petit d'ordre 2, par rapport au terme $\lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P$.

Il reste alors: $dW = \lambda \cdot d\lambda \cdot f \cdot P$

W , travail total effectué entre l'instant initial (0) et l'instant final (1) représente donc l'intégration de dW entre 0 et 1, d'où:

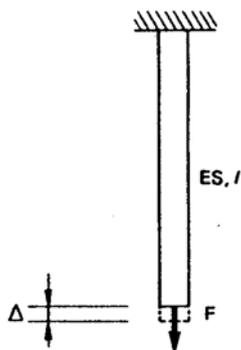
$$W = \int_0^1 dW = \int_0^1 f \cdot P \cdot \lambda d\lambda$$

Soit

$$W = \frac{1}{2} f \cdot P$$

puisque ni f ni P ne dépendent de λ .

Exemple 2 : Etude d'une barre en traction, travail à fournir pour l'allonger de Δ .



Comme dans l'exemple précédent, le matériau constituant la tige est élastique linéaire, et

l'effort F est appliqué progressivement.

Un tableau analogue à celui de l'exemple précédent, traduisant l'évolution de F et de l'allongement associé Δ , par l'intermédiaire du paramètre d'évolution λ , $0 \leq \lambda \leq 1$ s'écrit:

	F	Δ	
0 : état initial	0	0	$0 \leq \lambda \leq 1$
⋮	⋮	⋮	
état (λ)	λF	$\lambda \Delta$	
état ($\lambda + d\lambda$)	$(\lambda + d\lambda) F$	$(\lambda + d\lambda) \Delta$	
⋮	⋮	⋮	
1 : état final	F	Δ	

D'où l'expression du travail élémentaire, par un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'exemple précédent:

$$dW = \lambda \cdot d\lambda \cdot F \cdot \Delta$$

Le travail global W qu'il est nécessaire de fournir au barreau pour l'allonger de Δ a alors pour expression:

$$W = \int_0^1 dW$$

soit

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

c - Notion de potentiel d'une structure

En mécanique des structures, on parle aussi d'énergie potentielle d'un système.

C'est le travail effectué de manière réversible par des forces pour passer de l'état initial (d'indice (0)) à l'état final (d'indice (1)).

2°/ Hypothèses thermodynamiques

REMARQUE : ces hypothèses sont applicables au chapitre sur les méthodes énergétiques dans son ensemble.

Ces hypothèses sont les suivantes:

- le matériau constituant les structures étudiées a une loi de comportement élastique linéaire,
- les transformations sont réversibles: elles se produisent suffisamment lentement pour que le système soit à chaque instant dans un état d'équilibre,
- les effets thermiques ne seront pas pris en compte,
- on négligera le poids propre des structures.

Justification du terme de potentiel:

Avec l'hypothèse de réversibilité des transformations, on peut parler de potentiel pour le travail (en fait de différence de potentiel), car ce travail ne dépendra que de l'état initial et de l'état final du système, indépendamment des états intermédiaires - la force dont dérive ce potentiel étant appelée une force conservative -.

Le potentiel est caractéristique des paramètres de l'état, et non de l'état lui-même.

REMARQUE : le potentiel est toujours défini à une constante additive près, la notion de différence de potentiel élimine l'imprécision introduite par la présence de cette constante.

3°/ Théorème fondamental de l'énergie.

a - énoncé du théorème sous la forme utilisée en mécanique des structures.

Pour un solide isolé, en statique, la somme des travaux des efforts extérieurs et des travaux des efforts intérieurs au système est nulle, dans toute transformation réversible:

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0$$

REMARQUE : autre formulation du théorème fondamental:

Les structures étudiées dans ce cours sont des structures déformables, l'énergie fournie par le travail des efforts extérieurs appliqués à la structure va servir à la déformer.

Le matériau constituant ces structures ayant un comportement élastique linéaire, l'énergie apportée par l'extérieur sert intégralement à déformer le corps, de manière réversible.

On a donc:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{déf}}$$

avec: W_{ext} : énergie apportée par le travail des efforts extérieurs,
 $W_{\text{déf}}$: énergie de déformation.

Ceci nous conduit à l'autre énoncé du théorème fondamental de l'énergie:

La somme des travaux des efforts extérieurs appliqués au système est égale à l'énergie de déformation de ce système.

Corollaire:

on a en effet:
$$\begin{cases} W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = 0 \\ W_{\text{ext}} = W_{\text{déf}} \end{cases}$$

on en déduit l'égalité: $W_{\text{int}} = - W_{\text{déf}}$

qui s'énonce encore:

La somme des travaux des efforts intérieurs au système est égale à l'opposé de l'énergie de déformation de ce système.

L'étape suivante va constituer maintenant en la détermination des différents termes W_{ext} et $W_{\text{déf}}$.

b - Calcul de W_{ext} et $W_{\text{déf}}$:

*** Expression de W_{ext} , travail des efforts extérieurs.**

Reprenons les deux exemples traités au début du chapitre. L'effort extérieur est appliqué progressivement, il induit un déplacement de la structure, déplacement proportionnel à l'effort extérieur lorsque le comportement du matériau est élastique linéaire.

Les deux exemples précédents nous permettent d'écrire, sous réserve de vérifier les hypothèses thermodynamiques:

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} F (\text{dépl}_F)$$

F : représente l'effort extérieur appliqué

(dépl_F) : représente le déplacement dans le sens de cet effort F encore noté y_F

REMARQUE : la notion de travail s'écrit mathématiquement sous la forme d'un produit scalaire. Seule aura donc un effet la composante du déplacement ayant même direction que l'effort, ici F.

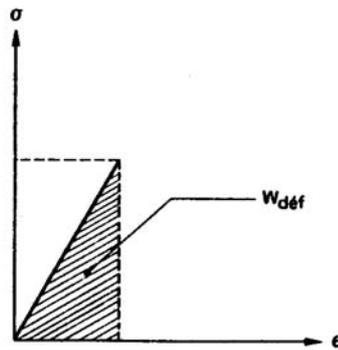
On a donc:
$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} F \cdot y_F$$

*** Expression de $W_{\text{déf}}$, énergie de déformation.**

Calculons maintenant l'expression de l'énergie de déformation $W_{\text{déf}}$. Elle représente le travail dû aux contraintes et aux déformations engendrées par ces contraintes.

REMARQUE : il serait plus exact - mais plus difficile à comprendre - de dire que l'énergie de déformation représente le travail dû aux contraintes, dans le champ de déformations engendré par ces contraintes (élasticité linéaire).

Par analogie avec l'expression précédente (W_{ext}), et avec une écriture purement formelle, l'énergie de déformation se met sous la forme:



$$(W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon)$$

avec une loi de comportement élastique linéaire.

Les parenthèses sont là pour montrer l'aspect formel de cette écriture.

Cette expression de l'énergie de déformation va donc faire intervenir les différents types de contraintes dus aux diverses sollicitations, et les déformations engendrées par ces contraintes.

Il nous faudra donc prendre en compte les différentes sollicitations, en se limitant ici à l'étude des structures planes, chargées dans leur plan:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| - traction, compression | : σ , ϵ |
| - flexion, . contraintes normales | : σ , χ |
| . contraintes tangentielles | : τ , γ |
| - torsion | : τ , γ |

On calculera de cette manière chacun des termes de l'énergie de déformation de la structure, vis-à-vis des sollicitations élémentaires.

En outre les déformations, ainsi que les déplacements sont infiniment petits, on sait que dans ce cas il est possible d'appliquer le principe de superposition, ce qui nous permet d'écrire l'énergie de déformation comme la somme des énergies de déformation relatives aux sollicitations simples:

$$W_{\text{déf}}^{\text{Total}} = W_{\text{déf}}^{\text{T,C}} + W_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma} + W_{\text{déf}}^{\text{F}\tau} + W_{\text{déf}}^{\text{Torsion}}$$

Cette écriture est relative au cas de structures planes.

$W_{\text{déf}}^{\text{T,C}}$: énergie de déformation relative à la traction (T), ou à la compression (C),

$W_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma}$: énergie de déformation relative à la flexion (F) et aux contraintes normales (σ),

$W_{\text{déf}}^{\text{F}\tau}$: énergie de déformation relative à la flexion (F) et aux contraintes tangentielles (γ),

$W_{\text{déf}}^{\text{Torsion}}$: énergie de déformation relative à la torsion.

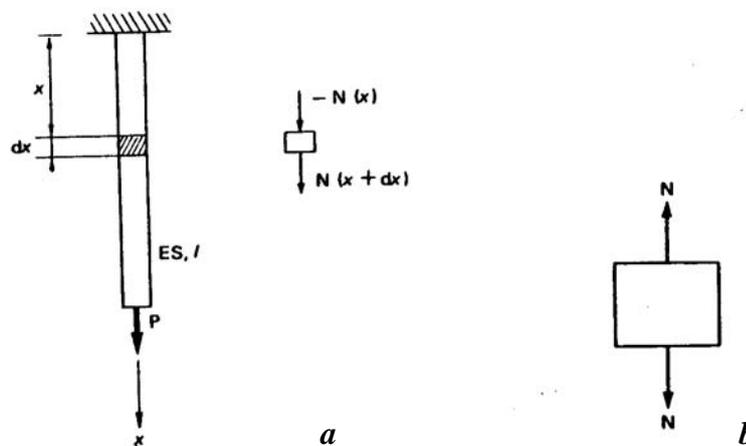
*** Calcul des différents termes de l'énergie de déformation:**

⇒ *Effet de la traction, ou de la compression.*

Il s'agit ici de sollicitation de traction simple, ou de compression simple. On suppose donc, que s'il y a compression simple, il n'y a pas apparition du phénomène de flambement. La démonstration étant alors identique pour l'une ou l'autre des sollicitations, on se place dans le cas de la traction simple.

Considérons le barreau en traction simple de la figure *a* ci-dessous.

Les équations d'équilibre montrent que l'effort normal est constant, donc on adoptera la représentation de la figure *b*.



Isolons à l'intérieur un tronçon de longueur dx . Pour ce tronçon de longueur dx , N est un effort extérieur, on peut alors écrire que l'énergie de déformation du tronçon est égale au travail des efforts extérieurs appliqués à ce tronçon (soit ici N).

on a :

$$dW_{\text{def}} = \frac{1}{2} N \times (\text{allongement du tronçon } dx).$$

$$= \frac{1}{2} N \times dA$$

où l'on appelle dA l'allongement du tronçon de longueur dx . Si l'on se réfère au chapitre sur la traction simple, on avait trouvé :

$$dA = \frac{N dx}{ES} \quad \text{où } N \text{ représente l'effort normal } N(x)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$dW_{\text{def}} = \frac{1}{2} \frac{(N(x))^2}{ES} dx$$

d'où l'expression de l'énergie de déformation relative à la traction simple, ou à la compression simple :

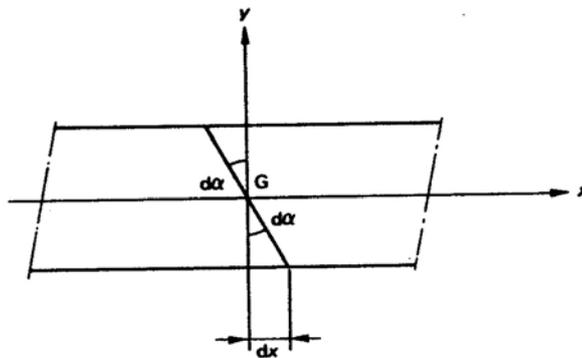
$$W_{\text{déf}}^{\text{T,C}} = \int_{\text{structure}} \frac{(N(x))^2}{2ES} dx$$

L'intégrale étant faite sur toute la longueur de la structure.

⇒ *Effet de la flexion:*

Il faut ici distinguer l'effet des contraintes normales (traduction du travail en terme de moment fléchissant $M(x)$), de l'effet des contraintes tangentielles (traduction du travail en terme d'effort tranchant $V(x)$).

Expression du travail en terme de moment fléchissant $M(x)$



L'énergie de déformation élémentaire, due aux contraintes normales est donnée par :

$$dW_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma} = \frac{1}{2} M(x) \cdot d\alpha$$

Or on a vu, dans l'étude de la sollicitation de flexion que la courbure de la poutre, χ était donnée par:

$$\chi = \frac{M}{EI} = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx}$$

En reportant la valeur de $d\alpha$ dans l'expression de $dW_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma}$, on obtient:

$$dW_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma} = \frac{1}{2} \frac{(M(x))^2}{EI} dx$$

D'où la valeur de l'énergie de déformation relative au terme de moment fléchissant:

$$W_{\text{déf}}^{\text{F}\sigma} = \int_{\text{structure}} \frac{(M(x))^2}{2EI} dx$$

où EI représente le module de rigidité en flexion de l'élément de structure étudié.

Il s'agit là encore d'une intégrale à calculer sur toute la longueur de la structure.

Expression du travail en terme d'effort tranchant $V(x)$

Par analogie avec l'étude conduite en terme de moment fléchissant, on détermine l'énergie de déformation relative au terme d'effort tranchant, pour laquelle interviennent:

- la contrainte de cisaillement τ ,
- la déformation associée γ .

On obtient pour cette énergie de déformation, sous sa forme intégrée :

$$W_{\text{déf}}^{F\tau} = \int_{\text{structure}} \frac{(V(x))^2}{2GS'} dx$$

Où S' représente la section réduite, à prendre en compte vis-à-vis du cisaillement,
 G représente le module d'élasticité transversal, défini en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν du matériau, par la relation:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Expression du travail en terme de moment de torsion M_t

On admettra le résultat, démontré d'une manière analogue à celle utilisée pour les effets de $N(x)$, $M(x)$, ou $V(x)$.

Sous sa forme intégrée, on obtient, pour l'énergie de déformation de la structure:

$$W_{\text{déf}}^{\text{Torsion}} = \int_{\text{structure}} \frac{(M_t)^2}{2GK} dx$$

où GK représente le module de rigidité en torsion,
 K représente la rigidité en torsion, encore appelée constante de Leduc.

On en déduit la forme générale du **POTENTIEL TOTAL** de la structure, dans le cas d'une structure plane, chargée dans son plan:

$$W_{\text{déf}} = W = \int_{\text{structure}} \left(\frac{N^2}{2ES} + \frac{V^2}{2GS'} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_t^2}{2GK} \right) dx$$

REMARQUES :

1. - Afin de simplifier l'écriture précédente, la dépendance vis-à-vis de x dans les termes $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ n'apparaît pas explicitement; elle est toutefois toujours sous-entendue pour les calculs.
2. - Lorsqu'il n'y a pas de phénomène de torsion, l'énergie de déformation se réduit à trois termes:

$$W = \int_{\text{structure}} \left(\frac{N^2}{2ES} + \frac{V^2}{2GS'} + \frac{M^2}{2EI} \right) dx$$

3. - A l'intérieur de l'intégrale, le terme dx représente l'élément différentiel de longueur, pris sur la ligne moyenne de l'élément de structure considéré, mais l'intégrale est prise sur l'ensemble de la structure.
4. - Dans la plupart des calculs, il s'avère que la contribution apportée par le terme $\frac{V^2}{2GS'}$ est faible, pour la flexion elle est de l'ordre de quelques % par rapport à la contribution apportée par le terme $\frac{M^2}{2EI}$. Dans la plupart des cas, on négligera donc l'effet du terme $\frac{V^2}{2GS'}$: on dit, dans ce cas, que l'on néglige l'effet de l'effort tranchant.

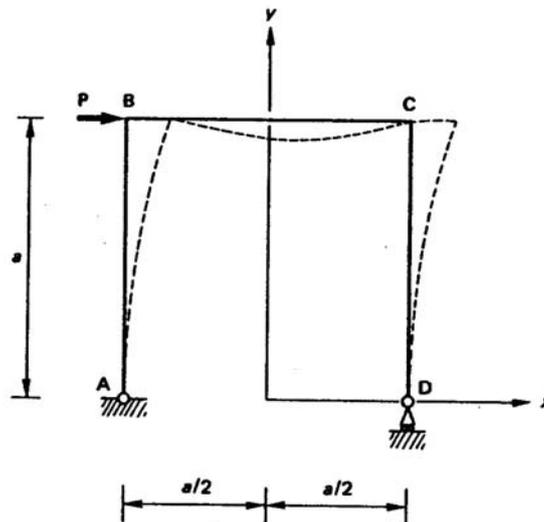
c - Exemples d'application : utilisation directe du théorème fondamental.

⇒ Voir T.D.

d - Limites de d'utilisation directe du théorème fondamental.

Le calcul précédent nous a permis de calculer la flèche en B parce que l'effort P appliqué était vertical, donc dans le sens du déplacement cherché.

Considérons maintenant la structure suivante:



On pourrait, ici encore, calculer directement le déplacement horizontal en B, car l'effort extérieur est, d'une part appliqué lui-même en B, d'autre part cet effort est horizontal (penser à la signification mathématique du travail sous la forme d'un produit scalaire).

Mais si l'on s'intéresse à la rotation du nœud B (le terme déplacement est à prendre ici dans sa forme générale, translation ou rotation), il est impossible de la calculer en employant la méthode directe.

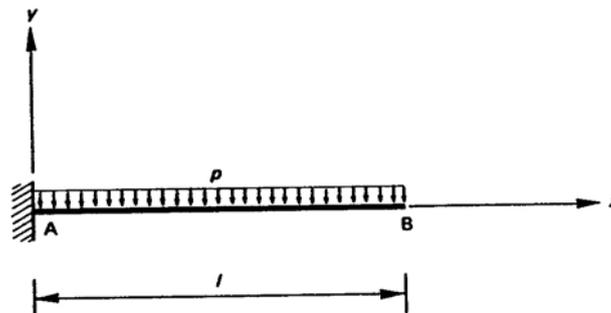
On trouve là, donc, une première justification de l'intérêt de fabriquer une méthode plus générale, à partir d'idées analogues à celles qui ont conduit notre raisonnement jusqu'ici.

En outre, l'application directe du théorème fondamental suppose que l'on peut accéder au calcul de $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$. Or $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ se calculent à partir des équations d'équilibre de la structure, déterminées par la statique.

Dans le cas de structures hyperstatiques, le théorème fondamental ne peut pas s'appliquer, il faudra donc avoir recours à une méthode plus générale.

Enfin la méthode directe suppose l'existence d'un effort concentré au point et dans le sens où l'on recherche le déplacement, là encore elle ne permet pas de déterminer le déplacement en un point d'une poutre soumise à une densité de charge.

Considérons par exemple la poutre suivante :



Si l'on s'intéresse au déplacement vertical en B, il n'y a pas ici d'effort concentré appliqué en B, tel que l'on puisse écrire le travail des efforts extérieurs sous la forme $\frac{1}{2} F \cdot Y_B$. Là encore il faudra avoir recours à une méthode plus générale.

La construction de cette méthode générale va faire l'objet de la suite du cours. Le point de départ est l'expression du potentiel de la structure, et c'est à partir de lui seul, exprimé de plusieurs manières que l'on va fabriquer les théorèmes énergétiques généraux.

4°/ Théorèmes énergétiques

Le potentiel sera maintenant exprimé:

- tantôt en fonction des efforts extérieurs,
- tantôt en termes d'énergie de déformation.

On en déduira:

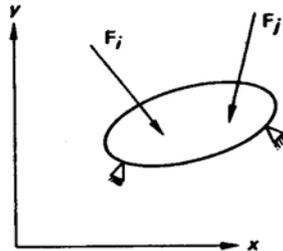
- le théorème de Castigliano (théorème intermédiaire: Théorème de Maxwell-Betti),
- le théorème de Menabrea (dans le seul cas des structures hyperstatiques).

Pour les applications, deux méthodes de calculs peuvent être utilisées:

- la méthode analytique (calcul de l'intégrale, analytiquement),
- la méthode géométrique (théorème de Verechtchaguine).

a - Notations utilisées pour les démonstrations.

Considérons la structure suivante, (S) :



où i et j sont des indices muets.

On appelle:

Δ_i : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_i , dû à l'ensemble des efforts extérieurs appliqués à la structure.

Δ_{ii} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_i , dû à F_i ;
on pose $\Delta_{ii} = F_i \delta_{ii}$.

δ_{ii} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_i , dû à $F_i = 1$ (déplacement unitaire).

Δ_{ij} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_i , dû à F_j ;
on pose $\Delta_{ij} = F_j \delta_{ij}$.

δ_{ij} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_i , dû à $F_j = 1$ (déplacement unitaire)

Δ_{ji} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_j , dû à F_i ;
on pose $\Delta_{ji} = F_i \delta_{ji}$

δ_{ji} : la valeur algébrique du déplacement dans le sens de F_j , dû à $F_i = 1$ (déplacement unitaire).

b - Expression du potentiel, en tant que fonction des variables efforts extérieurs

Par analogie avec l'expression utilisée lors de l'étude du paragraphe précédent, et par généralisation, on obtient pour le potentiel exprimé comme fonction des variables efforts extérieurs:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \Delta_i$$

Si n efforts extérieurs F_i sont appliqués à la structure.

On a d'autre part:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij}$$

On reporte l'expression de Δ_i dans l'écriture de W :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \delta_{ij}$$

où i, j sont des indices muets (jouant le même rôle) servant à numérotter l'effort extérieur appliqué : il y a ici n efforts extérieurs désignés par F_i ou F_j .

REMARQUES : - W apparaît comme une forme quadratique des variables d'efforts extérieurs.

- Les coefficients δ_{ij} sont parfois appelés coefficients d'influence, on démontrera par la suite leur symétrie: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ (Maxwell-Betti).

C'est en travaillant sur les deux expressions ci-dessous du potentiel, que l'on va mettre en place les théorèmes énergétiques:

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \delta_{ij}$$

$$(2) \quad W = \int_{\text{structure}} \left(\frac{N^2}{2ES} + \frac{T^2}{2GS'} + \frac{M^2}{2EI} \right) dx$$

(cas d'une structure plane chargée dans son plan, il n'y a pas de torsion).

Méthode utilisée pour la mise en place des théorèmes:

Les égalités (1) et (2) ne sont que deux écritures différentes de la même quantité W , potentiel de la structure.

l'égalité (1) → va être reliée au déplacement que l'on cherche,

l'égalité (2) → donnera la valeur de ce déplacement en fonction des efforts extérieurs appliqués à la structure.

REMARQUE: De ce fait, il sera maintenant possible de calculer des déplacements en chaque point de la structure, indépendamment de l'existence ou non d'efforts extérieurs en ces points.

c - Recherche du déplacement en un point d'une structure: théorème de Maxwell-Betti et théorème de CASTIGLIANO.

Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

Ce théorème, relatif à la symétrie des termes Δ_{ij} est nécessaire à la démonstration du théorème.

Ce théorème concerne la symétrie du produit $F_i \Delta_{ij}$ vis-à-vis des indices:

Le déplacement d'un point j de la structure appartenant au support de F_i , lorsqu'est appliqué en i l'effort F_i est égal au déplacement du point i appartenant au support de F_j ; lorsqu'est appliqué en j l'effort F_j .

Les deux points sont supposés être à la même température

$$F_i \cdot \Delta_{ij} = F_j \cdot \Delta_{ji}$$

Démonstration:

Considérons une structure de configuration initiale (S_1) lorsqu'elle n'est pas chargée, son énergie de déformation est W_1 - On charge cette structure de deux manières:

cas (α): on applique d'abord $F_i \rightarrow$ configuration intermédiaire (S_2)

puis on applique $F_j \rightarrow$ configuration finale (S_3)

cas (β): on applique d'abord $F_j \rightarrow$ configuration intermédiaire (S'_2)

puis on applique $F_i \rightarrow$ configuration finale (S_3)

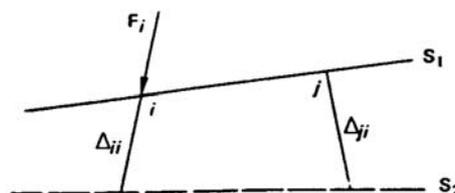
Les deux trajets de chargement (α) et (β) sont différents, mais conduisent au même état final : on suppose en effet vérifiées les conditions d'application du principe de superposition : petits déplacements, petites déformations.

On a donc, pour l'état final, noté (S_3) même valeur de l'énergie de déformation W_3 .

Cas de chargement (α) :

L'application de l'effort F_i , de manière progressive : le déplacement induit au point i est noté Δ_{ii} , le point j s'est déplacé de Δ_{ji} . La structure se déplace de S_1 en S_2 .

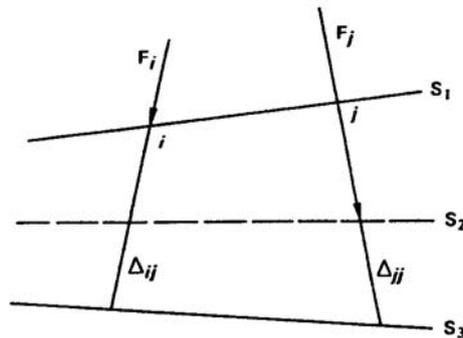
Valeur du travail effectué : $W_2 - W_1 = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii}$



A partir de l'état S_2 , on applique progressivement en j l'effort F_j , l'effort F_i étant déjà appliqué à la structure. La structure se déplace de S_2 en S_3 .

La valeur du travail effectué entre S_2 et S_3 est égale à :

$$W_3 - W_2 = \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj} + F_i \Delta_{ij}$$

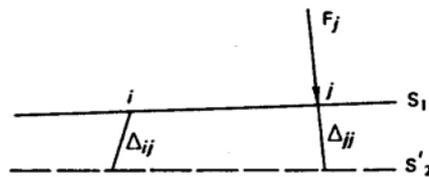


L'énergie de déformation globale est égale à :

$$W_3 - W_1 = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj} + F_i \Delta_{ij}$$

Cas de chargement (β) :

Application de l'effort F_j , de manière progressive : le déplacement induit en j est noté Δ_{jj} , le point i s'est déplacé de Δ_{ij} . La structure se déplace de S_1 en S'_2 .



Valeur du travail effectué : $W'_2 - W_1 = \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj}$

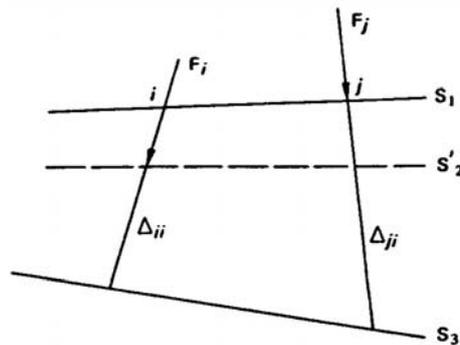
A partir de l'état S'_2 , on applique progressivement en i l'effort F_i , l'effort F_j étant déjà appliqué à la structure. La structure se déplace de S'_2 en S_3 .

La valeur du travail effectué entre S'_2 et S_3 est égale à :

$$W_3 - W'_2 = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii} + F_j \Delta_{ji}$$

L'énergie de déformation globale est égale à :

$$W_3 - W_1 = \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii} + F_j \Delta_{ji}$$



S_3 représente le même état final que celui auquel on arrive par le trajet de chargement (α). On part du même état initial S_1 . Les énergies de déformation sont donc identiques, que l'on suive le trajet (α), ou (β) :

$$\frac{1}{2}F_i\Delta_{ii} + \frac{1}{2}F_j\Delta_{jj} + F_i\Delta_{ij} = \frac{1}{2}F_j\Delta_{jj} + \frac{1}{2}F_i\Delta_{ii} + F_j\Delta_{ji}$$

D'où

$$F_i\Delta_{ij} = F_j\Delta_{ji}$$

REMARQUES:

1. Si F_i et F_j sont unitaires, cela signifie $F_i = 1$ et $F_j = 1$,

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

ou encore

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (\text{symétrie des coefficients})$$

2. Seules interviennent ici les composantes des déplacements qui sont dans le sens de l'effort F_i , ou F_j : cela est dû au fait que le travail s'écrit sous la forme d'un produit scalaire.

Enoncé du théorème de CASTIGLIANO.

Théorème: Le déplacement algébrique du point d'application d'une force sur son support est égal à la dérivée du potentiel par rapport à cet effort.

$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

REMARQUE : F_i est pris au sens large de la définition d'un effort (force ou couple).

Il en résulte que Δ_i constitue un déplacement au sens large (translation ou rotation).

Démonstration du théorème:

L'expression du potentiel en fonction des variables efforts extérieurs est donnée par:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \delta_{ij}$$

on a d'autre part $\Delta_i = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij}$ et $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

Calcul de $\frac{\partial W}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{ij} = \Delta_i$

REMARQUE: pour la démonstration du théorème de CASTIGLIANO, on constate que le théorème de Maxwell-Betti est fondamental. C'est en effet lui qui permet d'effectuer le regroupement, après dérivation, de tous les termes δ_{ij} et δ_{ji} égaux, donc de faire disparaître le coefficient $\frac{1}{2}$ qui intervient dans W.

Exemples d'application: \Rightarrow voir T.D.

d - Cas où il n'y a pas d'effort extérieur appliqué au point et dans le sens où l'on cherche le déplacement: théorème de la charge fictive

Méthode utilisée: charge fictive.

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement Δ_i dans le sens et au point où est appliqué un effort F_i , par la relation:

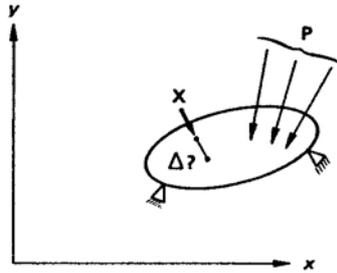
$$\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

Si, à l'endroit où l'on désire calculer un déplacement, il n'y a pas d'effort appliqué, on fera intervenir un effort fictif X, au point et dans le sens du déplacement Δ cherché. L'expression de Δ sera donnée par la relation obtenue en appliquant sur X le théorème de Castigliano :

$$\Delta = \left(\frac{\partial W(P, X)}{\partial X} \right)_{X=0}$$

où $W(P, X)$ représente l'énergie de déformation de la structure, calculée en fonction de :

P \rightarrow désignant globalement l'ensemble des efforts extérieurs appliqués à la structure,
X \rightarrow effort fictif.



REMARQUE : X est un effort fictif, qui donc n'existe pas dans la structure réelle: c'est pour cette raison qu'après avoir calculé $\frac{\partial W}{\partial X}$ on prend la valeur de cette expression pour $X = 0$.

X ne fait que servir d'intermédiaire, afin de permettre le calcul de Δ par application du théorème de Castigliano.

Exemples d'application: \Rightarrow voir T.D.

e - Généralisation du théorème de Castigliano : théorème de la charge unité, ou théorème de MULLER-BRESLAU

Enoncé du théorème :

Le travail d'un effort unitaire appliqué à une structure chargée est égal au travail des efforts internes qu'il développe dans cette structure, dans les déformations élastiques dues aux charges extérieures.

$$\Delta_i = \int_{\text{structure}} \left[\frac{M\bar{M}_i}{EI} + \frac{N\bar{N}_i}{ES} + \frac{V\bar{V}_i}{GS'} \right]$$

(cas d'une structure plane chargée dans son plan)

Démonstration :

on a: $\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$ (Castigliano)

$$W = \int_{\text{structure}} \frac{(M(x))^2}{2EI} dx$$

REMARQUE : La démonstration est faite sur le seul terme de moment fléchissant, ceci dans le but de simplifier les écritures. Elle est, bien évidemment vraie sur l'ensemble des termes que comporte l'énergie de déformation.

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_{\text{structure}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_i} dx$$

où M représente le moment fléchissant en un point courant de la structure. Il faudrait écrire $M(x)$.

F_i représente un effort concentré appliqué en i .

\overline{F}_i représente un effort concentré unitaire appliqué en i dans le même sens que F_i .

M est toujours linéaire par rapport à un effort concentré : c'est le produit de cet effort par la distance au point en lequel on le calcule (en expression formelle). On peut donc écrire:

$$\frac{\partial M}{\partial F_i} = \text{«distance»} = M (F_i = 1) = \overline{M}_i$$

on note en effet \overline{M}_i le moment dû à $F_i = 1$ (ou \overline{F}_i) appliqué en i .

Si l'on reporte la valeur de $\frac{\partial M}{\partial F_i}$ dans l'expression de $\frac{\partial W}{\partial F_i}$; on obtient :

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_{\text{structure}} \frac{M \overline{M}_i}{EI} dx$$

Rappel: signification de Δ_i : c'est le déplacement dans le sens de F_i dû à l'ensemble des forces appliquées à la structure.

REMARQUE : Les intégrales du type $\int_{\text{structure}} \frac{M \overline{M}_i}{EI} dx$, $\int_{\text{structure}} \frac{N \overline{N}_i}{ES} dx$, $\int_{\text{structure}} \frac{V \overline{V}_i}{GS'} dx$, sont appelées intégrales de MOHR

Exemples d'application : \Rightarrow voir T.D.

II - APPLICATION A LA RESOLUTION DE SYSTEMES HYPERSTATIQUES.

1°/ Introduction.

Deux méthodes sont très utilisées pour le calcul des structures hyperstatiques, l'une pour laquelle le point de départ est la notion d'effort, l'autre qui prend comme point de départ les déplacements. Ces deux méthodes, différentes mais aboutissant aux mêmes résultats sont :

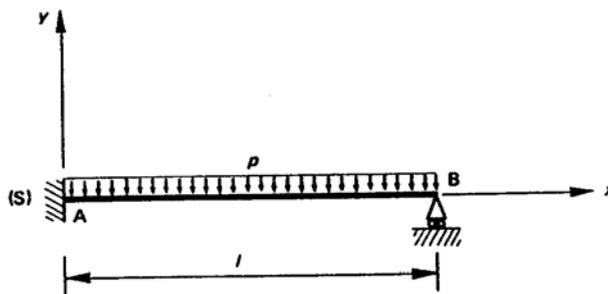
- la méthode des forces,
- la méthode des déplacements.

Nous allons, en ce qui nous concerne, étudier la méthode des forces.

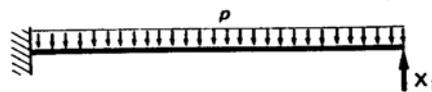
2°/ Méthodes des forces.

a - Cas d'une structure hyperstatique de degré 1.

Considérons une poutre de longueur l , de rigidité en flexion $EI = \text{constante}$, encadrée en A, sur appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie p . Soit (S) cette structure :



Cette structure est hyperstatique de degré 1. Choisissons pour inconnue hyperstatique l'action de liaison en B notée X_1 .

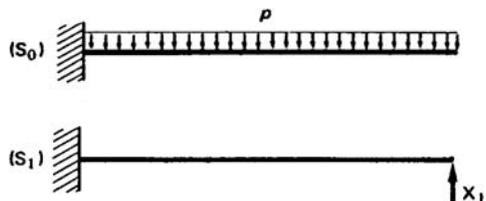


La structure (S') est la *structure isostatique associée* à (S).

(S') sera identique à (S) si l'inconnue hyperstatique X_1 est telle que le déplacement vertical du point B sous l'effet de p et de X_1 est nul (la liaison l'empêche).

Soit $\Delta_1 = 0$

En utilisant le principe de superposition, on peut écrire que (S') est la superposition de 2 systèmes :



$$(S') = (S_0) + (S_1)$$

(S₀) : structure soumise au seul chargement extérieur (ici p),

(S₁) : structure soumise à l'inconnue hyperstatique X₁.

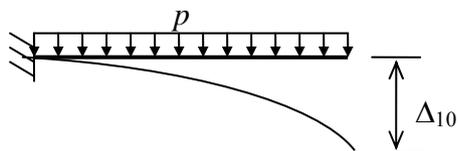
(S') est identique à (S) si on rajoute la condition sur le déplacement Δ₁, Δ₁ = 0

On a donc
$$\begin{cases} (S) = (S_0) + (S_1) \\ \text{et } \Delta_1 = 0 \end{cases}$$

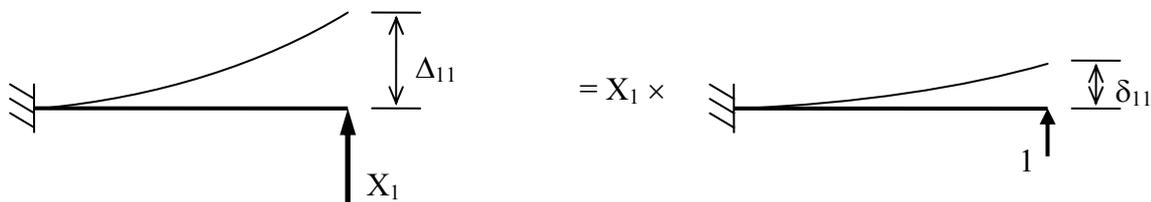
Traduction au niveau des déplacements :

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} = 0$$

Δ₁₀ : déplacement dans le sens de X₁ dû aux charges extérieures (structure S₀)



Δ₁₁ : déplacement dans le sens de X₁ dû à X₁ (structure S₁). $\Delta_{11} = \delta_{11} \times X_1$



On peut donc écrire : $\Delta_{10} + \delta_{11} \times X_1 = 0$

$$\Leftrightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Calcul de Δ_{10} et de δ_{11} :

Pour cela, on applique le théorème de la charge unité :

$$\Delta_{10} = \int_{\text{structure}} \frac{M_0(x) \overline{M}_1(x)}{EI} dx$$

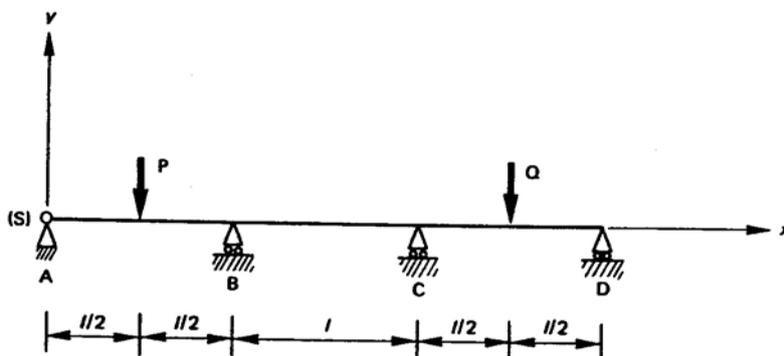
et
$$\delta_{11} = \int_{\text{structure}} \frac{\overline{M}_1(x) \overline{M}_1(x)}{EI} dx$$

$M_0(x)$: moment fléchissant dû au chargement extérieur (ici p),

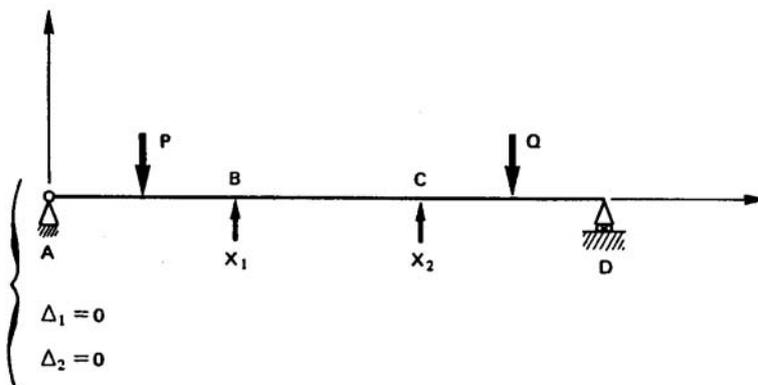
$\overline{M}_1(x)$: moment fléchissant dû à $X_1 = 1$.

b - Structures hyperstatiques de degré supérieur à 1.

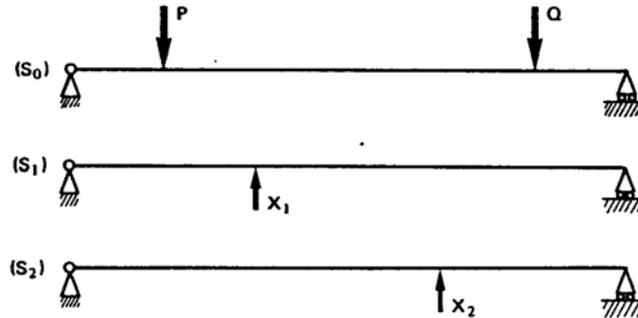
Le principe reste identique à ce que nous venons de voir. Considérons une structure hyperstatique de degré 2 :



Le nombre d'inconnues hyperstatiques étant égal au degré d'hyperstaticité. Lorsqu'on rend la structure isostatique, on fait apparaître 2 inconnues hyperstatiques X_1 et X_2 , ainsi que deux conditions sur les déplacements en B et C :



En appliquant le principe de superposition, on peut écrire :



$$(S) = (S_0) + (S_1) + (S_2)$$

La traduction de ce principe au niveau des déplacements donne :

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} = 0$$

Ce système s'écrit encore :

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = -\Delta_{10} \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = -\Delta_{20} \end{cases}$$

On a un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

REMARQUE :

1.-Théorème de Maxwell-Betti, on a $\delta_{21} = \delta_{12}$

2.-Les inconnues hyperstatiques X_i peuvent être un effort ou un couple.

3°/ Théorème de Ménabréa.

Ce théorème est une application de théorème de Castigliano au calcul des actions hyperstatiques.

Le théorème de Castigliano permet d'écrire : $\Delta_i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$

où W est l'énergie exprimé en fonction de toutes les variables et Δ_i le déplacement dans le sens de l'effort F_i .

Si on remplace l'effort F_i par l'inconnue hyperstatique X_i , le déplacement Δ_i dans la structure réelle étant nul, on obtient :

$$\text{Théorème de Ménabréa : } \frac{\partial W}{\partial X_i} = 0$$