# Chapitre IX :

## *Flambement des poutres comprimées.*

| | |
|---|---|
| ***Objectifs*** | Définir le flambage, la charge d'Euler et la contrainte critique<br>Vérifier Dimensionner une poutre sollicitée au flambement. |
| ***Pré-requis*** | Compression.<br>Moments quadratiques par rapport aux axes de section. |
| ***Eléments de contenu*** | Elancement.<br>Charge critique.<br>Condition de résistance.<br>Charge admissible. |

## I. Introduction :

Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt. Cette valeur critique est appelée : charge de flambement.
Dans le cas du flambage, les formules établies tiennent compte des déformations qui ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents, de même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations.
Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.
Les formules de flambage sont utilisées avec prudence, c'est-à-dire en prenant un coefficient de sécurité très grand. Les pièces soumises au flambage doivent impérativement être droite et ne doivent pas avoir subit des déformations précédemment.

### II. Phénomène de flambement:

Dans tout ce qui suit on considère que le matériau est élastique, linéaire de module de Young E et de caractéristiques mécaniques constantes.
Considérons une barre rectiligne homogène soumise à deux fores $\vec{F}$ égales et opposées.

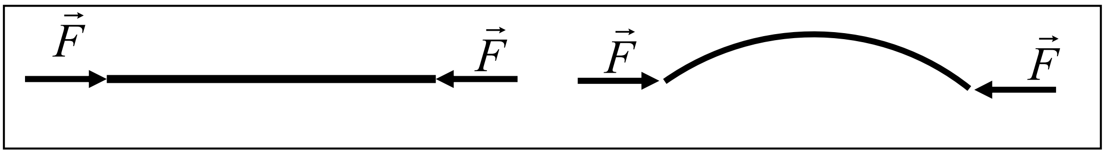



***Figure 9.1 : Flambement.***

On observe qu'en dessous d'une certaine valeur de F la barre est en équilibre stable (Si on l'écarte de sa position (légère flexion), lorsque la perturbation cesse, elle retrouve sa rectitude). Au-delà d'une certaine valeur, l'état d'équilibre devient instable (Si l'on écarte la barre de sa position d'équilibre, elle atteint un autre état d'équilibre stable cette fois là).
Le problème du flambement revient donc à déterminer le seuil de compression à partir duquel il y a bifurcation d'équilibre, une instabilité de structure. Ce seuil est la force critique d'Euler.

### III. Charge critique d'Euler :

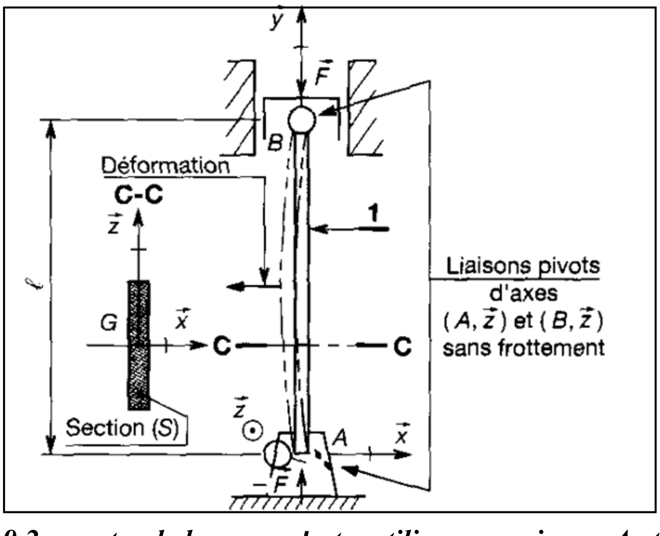



***Figure 9.2 : poutre de longueur L et rectiligne soumise en A et B à deux glisseurs directement opposés, qui augmentent progressivement.***

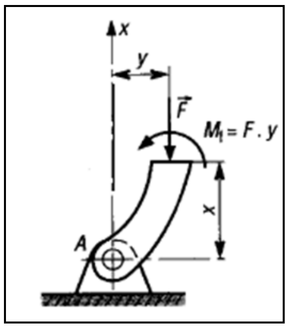



***Figure 9.3 : $M_f = F y$***

Prenons le cas d'une poutre droite avant déformation, articulée à ses deux extrémités A et B, et chargée de $\vec{F}$ rigoureusement suivant son axe ou sa ligne moyenne ( figure 9.2).

Utilisons la formule de la déformée en flexion : Mf= - E I y'' .

Le moment de flexion est : $M_f$ = F y ( figure 9.3).

On aura une l'équation différentielle E I y''+ F y=0 dont la solution après intégration nous donne : $y(x) = C \sin\frac{n\pi x}{L}$.

Sa dérivée seconde est : $y''(x) = -C\,\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}$

Pour n=1 : la déformée est une arche de sinusoïde et la poutre est flambée.

L'équation différentielle devient $F\,y(x) = FC\sin\frac{\pi x}{L} = EIC\frac{\pi^2}{L^2}\,\sin\frac{\pi x}{L}$ d'où $F = EI\frac{\pi^2}{L^2}$.

Cette valeur de F est donc l'effort de compression qui est le seuil de flambement, nommée Charge critique d'Euler et notée : $\boldsymbol{F_c = \mathbf{EI}\frac{\pi^2}{L^2}}$

*Remarque* : La flexion se produit selon la direction perpendiculaire à l'axe de la section (S) qui donne le moment quadratique le plus faible.

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $F < F_c$: la barre est rectiligne, en équilibre stable en compression simple.
- $F = F_c$ : La barre est en équilibre instable, il peut y avoir changement d'état d'équilibre pour atteindre un état d'équilibre stable en flexion composée
- $F > F_c$ : Le seul état possible est instable.

### *IV. Elancement :*

La compression est remplacée par du flambage si la poutre est longue et ses dimensions transversales sont faibles.
Cette proportion est caractérisée par :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

$\lambda$ : élancement d'une poutre (sans unité).

$L$ : longueur libre de flambage (mm).

$\rho$ : rayon de giration de la section (mm), défini par :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}}$$

S : air de la section droite (mm2).

$I_{Gz}$ : moment quadratique minimal de la section suivant l'axe principal perpendiculaire à la direction de la déformation (mm4).

Remarque : l est la longueur de la poutre, la longueur libre de flambage L, en fonction du type d'appui. Elle est donnée par le tableau à la figure 9.4.

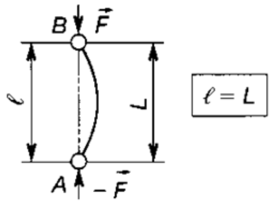
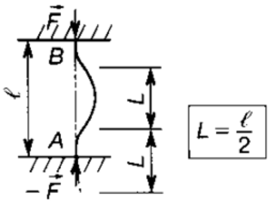
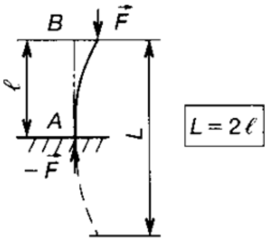
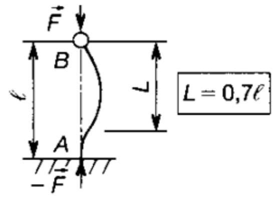
| **LONGUEURS LIBRES DE FLAMBAGE** | | | |
|---|---|---|---|
| Types de liaisons | Valeurs de *L* | Types de liaisons | Valeurs de *L* |
| ① **En *A* et *B* : liaisons pivots.** |   | ③ **En *A* et *B* : liaisons encastrement.** |   |
| ② **En *A* : liaison encastrement. En *B* : extrémité libre.** |   | ④ **En *A* : liaison encastrement. En *B* : liaison pivot.** |   |

***Figure 9.4 : Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre***

## *V. Contrainte critique :*

La longueur libre de flambage *L* sera prise d'après le tableau précédent, cherchons la charge critique $F_c$ en fonction de l'élancement de la poutre $\lambda$ .

On a $\begin{cases} \lambda^2 = \dfrac{L^2}{\rho^2} \\ \rho^2 = \dfrac{I_{Gz}}{S} \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{L^2}{I_{Gz}} \cdot S \Rightarrow \dfrac{I_{Gz}}{L^2} = \dfrac{S}{\lambda^2}$

L'expression de la charge critique nous donne : $F_c = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2}$

On appelle contrainte critique le rapport entre la charge critique $F_c$ et l'air de la section droite S de la poutre.

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

***Calcul de Elancement critique*** $\lambda_c$

On pose la contrainte critique $\sigma_c = R_e$ pour ne quitter pas le domaine élastique. On aura alors : $R_e = \dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ avec $\lambda = \lambda_c \Rightarrow$

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{R_e}$$

$\lambda_c$ : élancement critique (ne dépend que de la nature du matériau).
$E$ : Module d'élasticité longitudinal (MPa).
$R_e$ : Résistance élastique du matériau (MPa).

## VI. Condition de résistance :

### VI.1. Coefficient de sécurité $k$ :

Le coefficient de sécurité K, spécifique au flambage, est le double du coefficient de sécurité habituel s (s dépend du type de construction, des conditions de calcul et d'utilisation).

$$k = 2s \; ; \quad s = \frac{R_{ec}}{R_{pc}} \; ; \quad k = \frac{2R_{ec}}{R_{pc}}$$

$R_{ec}$ : Résistance élastique à la compression ($MPa$).
$R_{pc}$ : Résistance pratique à la compression ($MPa$).

### VI.2. Condition de résistance :

La charge critique d'Euler $F_c$ ne doit jamais être atteinte. Il faut donc chercher une charge admissible $F_{adm}$ sur la poutre pour qu'elle reste **stable** en toute sécurité ($F_{adm} < F_c$).
Pour la stabilité de la poutre en toute sécurité, on pose :

$$k = \frac{F_c}{F_{adm}} \Rightarrow F_{adm} = \frac{R_{pc}}{2 \cdot R_e} \cdot F_c$$

On a $F_c = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2}$ donc $F_{adm} = \dfrac{R_{pc}}{2 \cdot R_e} \cdot \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot S}{\lambda^2}$

Or $\lambda_c^2 = \dfrac{\pi^2 \cdot E}{R_e} \Rightarrow F_{adm} = \dfrac{R_{pc} \cdot \lambda_c^2 \cdot S}{2 \cdot \lambda^2}$

Donc : $$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2 \cdot \left( \dfrac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}$$

*Avec :*

- $\lambda_c \approx 100$ : poutres en acier (profilés).
- $\lambda_c \approx 70$ : poutres en bois ou en aluminium.
- $\lambda_c \approx 60$ : poutres en fonte.

## VII. *Critère de résistance*

Selon la valeur de l'élancement de la poutre, la charge limite $F_{adm}$ est donnée par l'une des trois relations (poutre, acier).

| Poutres courtes $\lambda < 20$ | Poutres moyennes $20 < \lambda < 100$ | Poutres élancées $\lambda > 100$ |
|---|---|---|
| Compression simple $F_{adm} = R_{pc} \cdot S$ | Formule expérimentale de Rankine $F_{adm} = \dfrac{R_{pc} \cdot S}{1 + \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ | Formule d'Euler $F_{adm} = \dfrac{R_{pc} \cdot S}{2 \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ |

## *VIII. Application :*

Une vis à billes de diamètre à fond de filet $d = 32mm$ est guidée à une seule extrémité par deux roulements à billes. Elle est soumise de la part de l'écrou à une charge axiale de compression. L'écrou est au maximum à $l = 1000mm$ du palier.L'élancement critique est : $\lambda_c = 60$ ; la résistance pratique de l'acier C 45 est : $R_{pc} 150 MPa$.

Calculer la charge admissible sur la vis pour éviter le risque de flambage.

*Hypothèses* :

La vis est encastrée par rapport au bâti côté roulement, libre côté écrou (monté flottant).

***Solution*** :

- Aire de la section S :

$$S = \frac{\pi \, . \, d^2}{4} \; ; \; S = \frac{\pi \, . \, 32^2}{4} = 804 \text{ mm}^2 .$$

- Le moment quadratique de S :

$$I_{Gz} = \frac{\pi \, d^4}{64} \; ; \; I_{Gz} = \frac{\pi \times 32^4}{64} = 5{,}15 \times 10^4 \text{ mm}^4 .$$

- Le rayon de giration :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}} \; ; \; \rho = \sqrt{\frac{5{,}15 \times 10^4}{804}} = 8 \text{ mm} .$$

- Elancement de la vis : L=2l

$$\lambda = \frac{2\,.\,\ell}{\rho}\ ;\ \lambda = \frac{2 \times 1000}{8} = 250 \text{ (Euler s'applique)}$$

- Charge admissible :

$$F_{adm} = \frac{R_{pc}\,.\,S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}\ ;\ F_{adm} = \frac{150 \times 804}{2 \times \left(\frac{250}{60}\right)^2}\ ;\ \boldsymbol{F_{adm} \approx 3\,474\ N}\ .$$