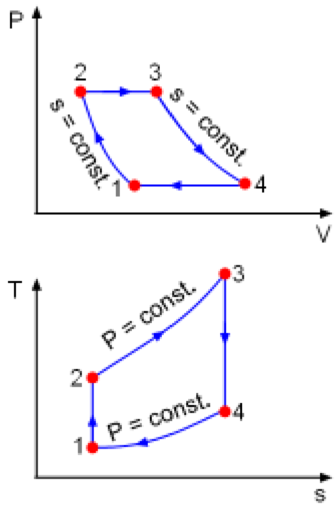
TD N2 : Machines thermiques

Exercice 1 :

1/ Diagramme P-V et P-S :



Déterminons V_1 = ?

Pour 1 mole de gaz parfait :

$$V_1 = \frac{RT_1}{P_1}$$

V_2 = ?

$$1 \rightarrow 2 : transformation\ isentropique : PV^{\gamma} = cte$$

$$Donc : \ P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \quad \Rightarrow V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{RT_1}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

V_3 = ?

$$V_3 = \frac{RT_3}{P_3} = \frac{RT_3}{P_2} \qquad (P_3 = P_2)$$

V_4 = ?

$$3 \rightarrow 4 : transformation\ isentropique : PV^{\gamma} = cte$$

$$Donc : \ P_4V_4^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \quad \Rightarrow V_4 = V_3\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{RT_3}{P_3}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

T_2 = ?

$$on\ a : T_2 = \frac{P_2V_2}{R} \quad (A)$$

$$avec :\ V_2 = \frac{RT_1}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$(A)\ devient :\ T_2 = \frac{P_2}{R} \times \frac{RT_1}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

T_4 = ?

$$on\ a : T_4 = \frac{P_4V_4}{R} \quad (B)$$

$$or :\ V_4 = \frac{RT_3}{P_3}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad et\ \ P_4 = P_1\ \ et\ P_2 = P_3$$

$$(B)\ devient :\ T_4 = \frac{P_4}{R}\frac{RT_3}{P_3}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = P_4\frac{T_3}{P_3}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_3\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

2/ la quantité de chaleur Q (échangée avec la source chaude) :

$$Q = nC_P\Delta T = C_P(T_3 - T_2)$$

La quantité de chaleur q (échangée avec la source froide) :

$$q = nC_P\Delta T = C_P(T_1 - T_4)$$

Le travail global W :

1er principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{cycle} = 0$$

$$\Longrightarrow W + Q + q = 0$$

$$\Longrightarrow W = -Q - q = C_P(T_2 - T_3) + C_P(T_4 - T_1)$$

$$\Longrightarrow W = C_P(T_2 - T_3 + T_4 - T_1)$$

3/ Expression de rendement théorique en fonction de $r = P_2/P_1$:

$$\eta = \frac{-W}{Q} = \frac{Q+q}{Q} = 1 + \frac{q}{Q} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$\Longrightarrow \eta = 1 - \frac{T_3\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1}{T_3 - T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = 1 - \frac{T_3(r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1}{T_3 - T_1(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\Longrightarrow \eta = 1 - \frac{(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \times \frac{T_3(r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1}{T_3 - T_1(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - \frac{1}{(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \times \frac{T_3 - T_1(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_3 - T_1(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\Longrightarrow \eta = 1 - (r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\eta_{Ar} = 0{,}43$$

Si γ est grand $\Longrightarrow$ le rendement augmente, donc on utilise l'Argon.

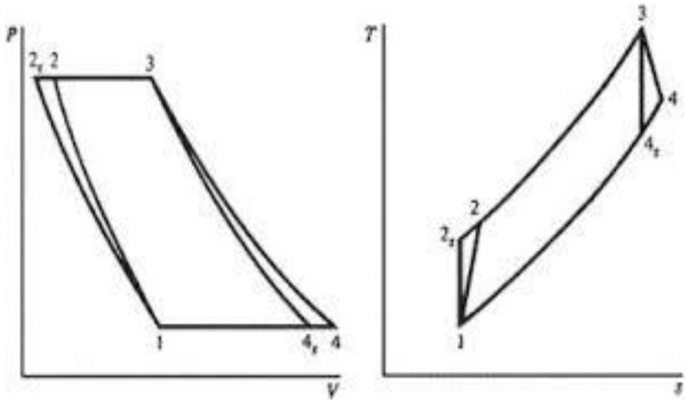
4/ Applications numériques

5/ Comparaison :

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0{,}66$$

$$\eta_{Ar} < \eta_{Carnot}$$

Exercice 2 :



1/ La puissance réelle nécessaire pour la compression de l'air :

$$\eta_{Ci} = \frac{w_s}{w_r} = \frac{P_s}{P_r}$$

$$Or : \frac{w_s}{w_r} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} \ , \ \frac{P_s}{P_r} = \eta_{Ci} \ \Rightarrow P_r = \frac{P_s}{\eta_{Ci}}$$

$$On\ a\ : P_s = \dot{m}\, C_P (T_{2s} - T_1)$$

$$Calcul\ de\ T_{2s}\ (1 \to 2s: isentropique\ Donc : P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cte) : \ T_{2s} = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 528°K$$

$$\Longrightarrow P_s = \dot{m}\, C_P (T_{2s} - T_1) = 20 \times\ 1000 \times (528 - 303) = 4500\ KW$$

$$La\ puissance\ réelle\ \ \Rightarrow P_r = \frac{P_s}{\eta_{Ci}} = \frac{4500}{0{,}8} = 5625\ KW$$

2/ La puissance totale réelle produite par la turbine :

$$\eta_{Ti} = \frac{w_r}{w_s} = \frac{h_4 - h_3}{h_{4s} - h_3} = \frac{P_r}{P_s} \implies P_r = \eta_{Ti} P_s$$

$$On\ a\ :\ P_s = \dot{m}\, C_P (T_{4s} - T_3)$$

$$Calcul\ de\ T_{4s}\ (3 \rightarrow 4s : isentropique\ Donc : P^{1-\gamma} T^{\gamma} = cte) :\ T_{4s} = T_3 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 529°K$$

$$Donc\ :\ P_s = \dot{m}\, C_P (T_{4s} - T_3) = 20 \times\ 1000 \times (529 - 923) = -7880\ KW$$

$$\implies P_r = \eta_{Ti} P_s = 0{,}85 \times (-7880) = -6698\ KW$$

3/ La puissance disponible (reçue par la génération électrique) si le $\boldsymbol{\eta_{ac}} = \mathbf{0,9}$

$$P_{ALT} = \eta_{ac} P_{net} = \eta_{ac}(P_{Tr} - P_{Cr}) = \ (-0{,}9)(-6698 + 5625) = 965{,}7\ KW$$

4/ Le rendement thermique théorique du cycle :

$$\eta_{th} = \frac{|W_{net\ s}|}{Q_c} = -\frac{P_{Ts} + P_{Cs}}{\dot{Q}_c}$$

$$avec\ :\ \dot{Q}_c = \Delta H = \dot{m}\, C_P (T_3 - T_{2s}) = 7900\ KW$$

$$\implies \eta_{th} = -\frac{4500 - 7880}{7900} = 0{,}43$$

5/ Le rendement réel du cycle :

$$\eta_r = \frac{|W_{net\ r}|}{Q_{cr}} = -\frac{W_{Tr} + W_{Cr}}{0{,}8. Qc}$$

$$\implies \eta_r = -\frac{P_{Tr} + P_{Cr}}{0{,}8. \dot{Q}c} = -\frac{5625 - 6698}{6230} = 0{,}17$$