① Formulation Variationnelle : (FV) $\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u,v) = \ell(v) \quad , \forall v \in V \end{cases}$

V = Hilbert
$\dim V = \infty$

② Formulation discrète : (E. Finis)

2-1 "Maillage"

2-2 "l'espace d'approximation, noté V_h" qui remplacera V

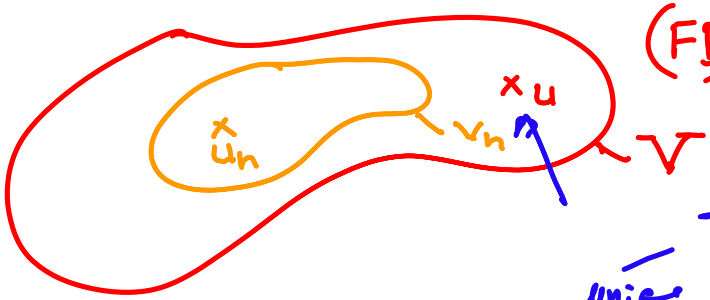
$\dim V_h = N < \infty$

$V_h = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$

2-3 Formulation discrète :

(FD) $\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad , \forall v_h \in V_h \end{cases}$

$\dim V_h = N$



→ relation entre u_h et u :

unique $\left(u_h \xrightarrow[h \to 0]{} u \right) \iff \| u - u_h \| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

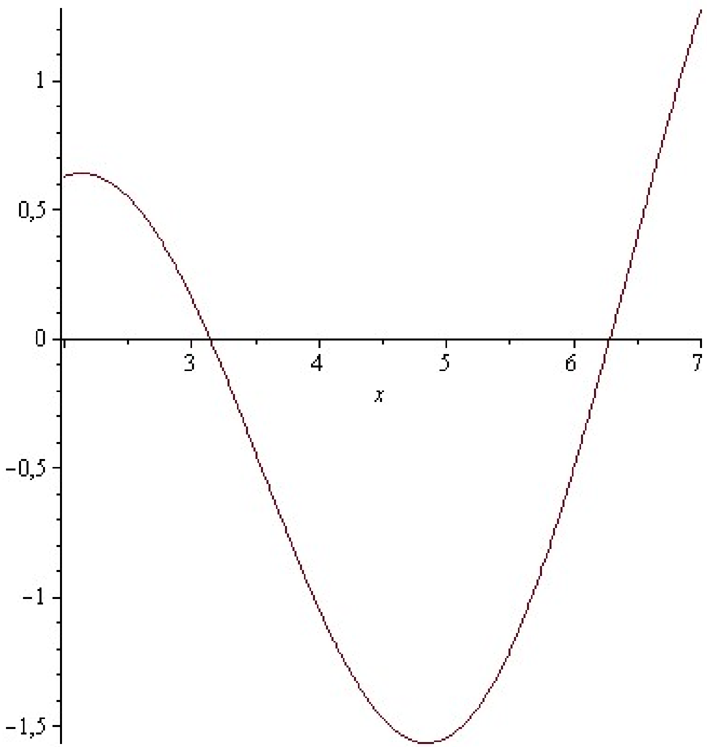
⚠

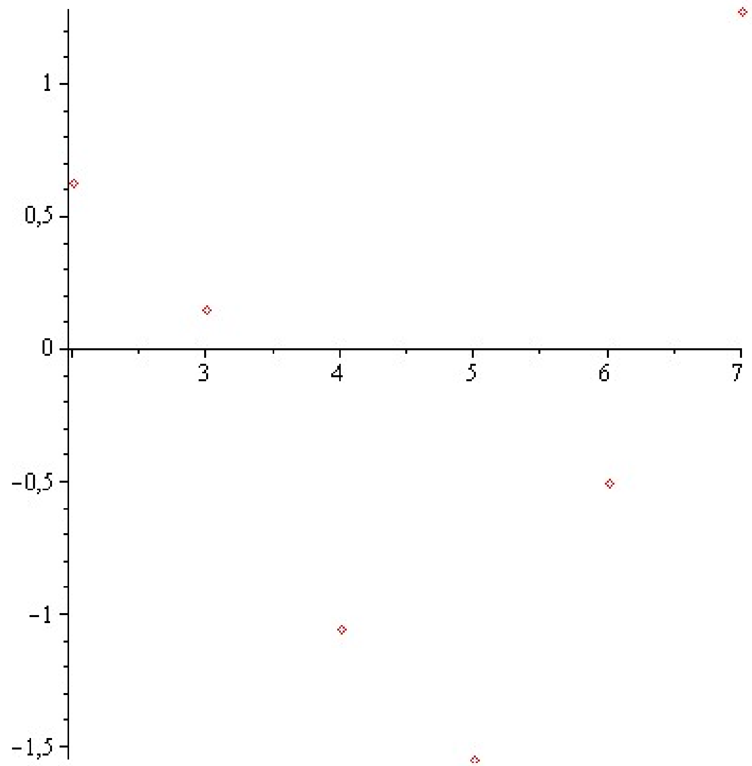
③ Représentation Matricielle :

(FD) $\iff AU = F$ où : $A = ?$ $U = ?$ et $F = ?$

Rappel sur l'interpolation de type Lagrange :

Approcher la fonction $f(x) = \ln(x)\sin(x)$ sur l'intervalle $[2,7]$,
pour cela, on considère les données suivantes : $\{(2,f(2));(3,f(3));(4,f(4));(5,f(5));(6,f(6));(7,f(7))\}$.



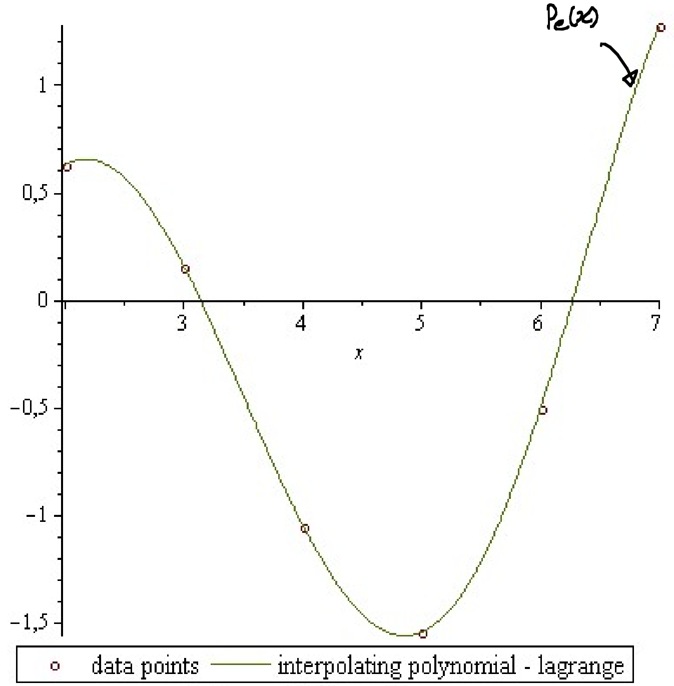


Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Rappel sur l'interpolation de type Lagrange :

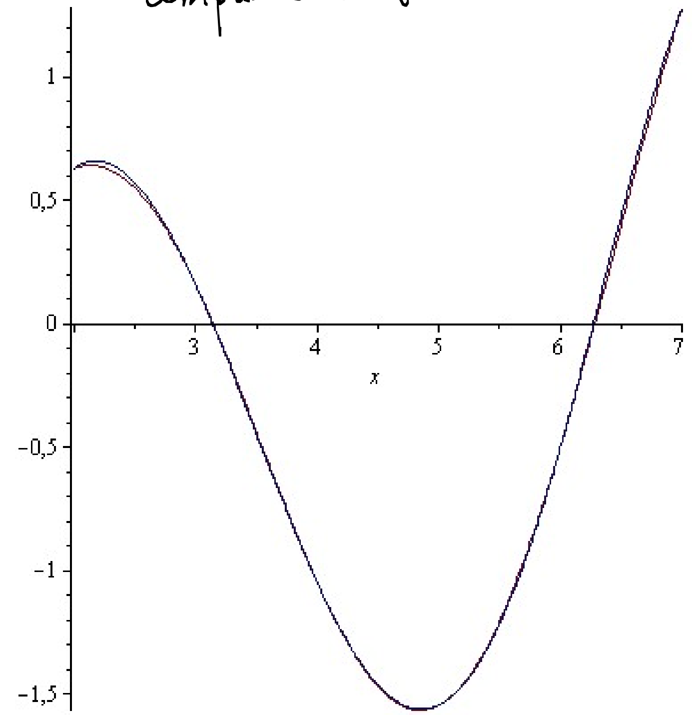
① **interpolation globale** : (polynôme $p(x)$ défini sur $[2,7]$ et de degré $5 = $ nbre de points $- 1$)

$$Pe := -0.714430597\,x^3 + 0.1436978519\,x^4 - 0.00846010712\,x^5 + 0.573150855\,x^2 - 3.331141010 + 2.67790853\,x$$



Polynomial interpolation.

Comparaison. f et Pe.



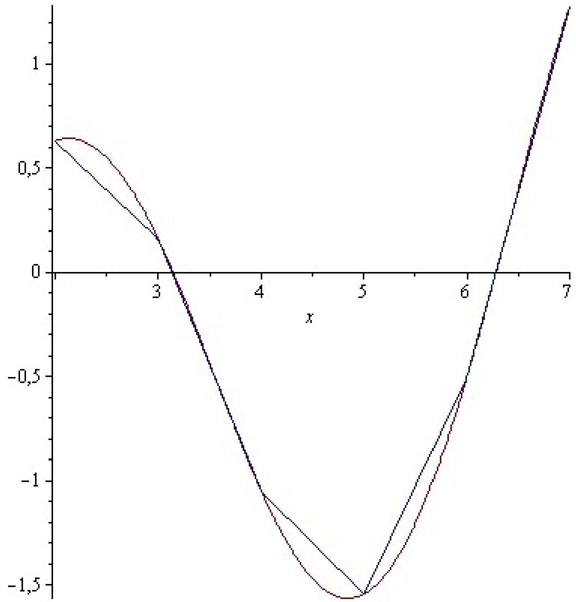
Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

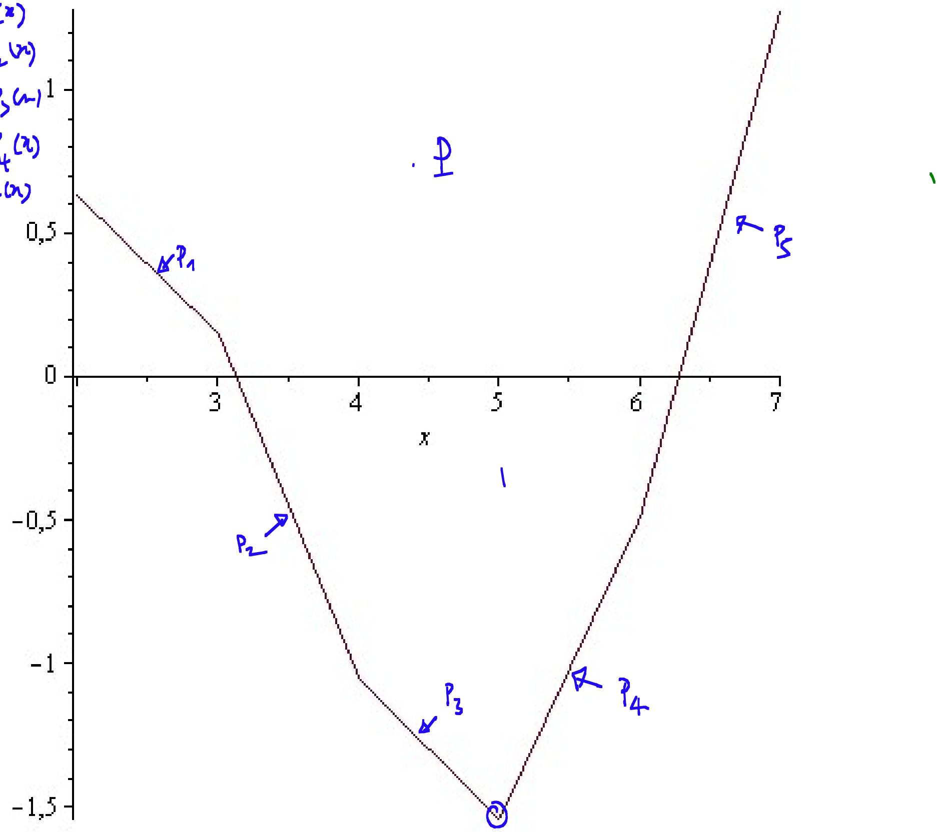
Rappel sur l'interpolation de type Lagrange :

② interpolation par intervalles : (polynôme par morceaux $p(x)$ défini sur $[2,7]$ qui change de forme (de degré) d'un intervalle à un autre).

$$p := \begin{cases} \underbrace{3\ln(2)\sin(2) - 2\ln(3)\sin(3)}_{b} + x\,\underbrace{(\ln(3)\sin(3) - \ln(2)\sin(2))}_{a} & x < 3 \\ 4\ln(3)\sin(3) - 6\ln(2)\sin(4) + x\,(2\ln(2)\sin(4) - \ln(3)\sin(3)) & x < 4 \\ 10\ln(2)\sin(4) - 4\ln(5)\sin(5) + x\,(\ln(5)\sin(5) - 2\ln(2)\sin(4)) & x < 5 \\ 6\ln(5)\sin(5) - 5\ln(6)\sin(6) + x\,(\ln(6)\sin(6) - \ln(5)\sin(5)) & x < 6 \\ 7\ln(6)\sin(6) - 6\ln(7)\sin(7) + x\,(\ln(7)\sin(7) - \ln(6)\sin(6)) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$a_1x+b_1 = P_1(x)$
$a_2x+b_2 = P_2(x)$
$a_3x+b_3 = P_3(x)$
$a_4x+b_4 = P_4(x)$
$a_5x+b_5 = P_5(x)$





Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Rappel sur l'interpolation de type Lagrange :

La Méthode des Eléments finis $\equiv$ interpolation par Morceaux.

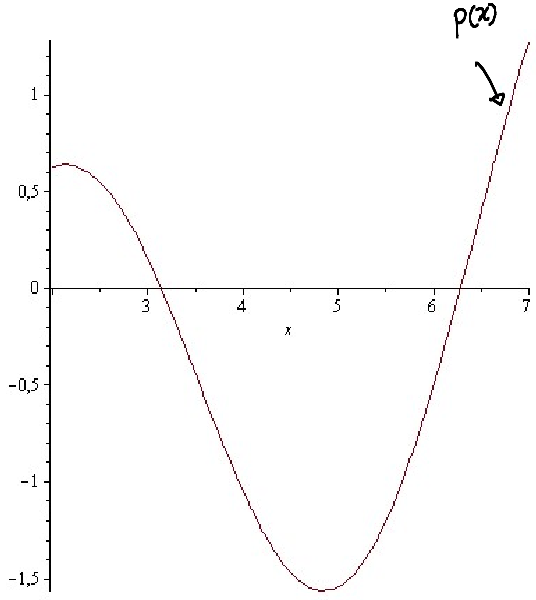
interpolation par morceaux : Comment augmenter la précision de l'approximation :

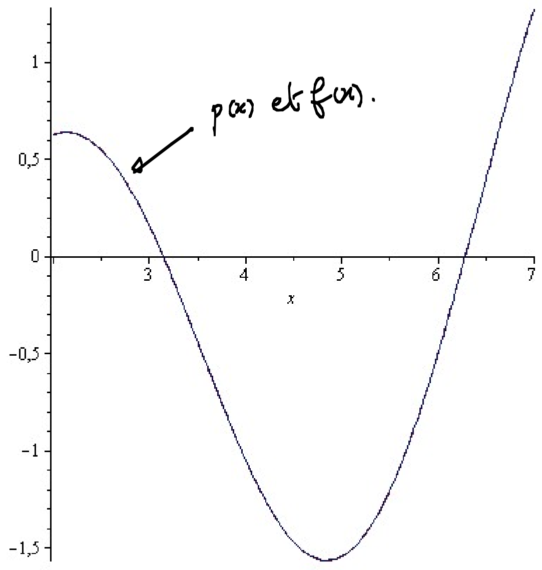
ou/et
1. Augmenter le nombre des intervalles.
2. Augmenter le degré des polynômes sur chaque morceau

(1) Soit n le nombre de points sur [2,7].

$$n := 42 : Xn := \left[seq\left(2 + \frac{5}{41} \cdot i,\ i = 0..n-1\right)\right];\ Yn := \left[seq\left(\text{evalf}\left(f\left(2 + \frac{5}{41} \cdot i\right)\right),\ i = 0..n-1\right)\right]$$

$\Rightarrow$





(2) ......

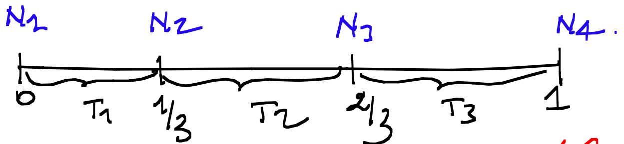
Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Eléments finis $\mathbb{P}_1$ – 1D. (Eléments finis linéaire 1D)

(3) Pour le système matriciel, on considère le problème modèle,
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{sur } [0,1]. \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Sa formulation variationnelle est :
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(0,1) \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\, dx = \int_0^1 f\, v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \end{cases}$$

Pour simplifier, on considère le Maillage suivant :



avec $h = \frac{1}{3}$.

$V_h =$ l'espace d'approximation $= \{ v \in C(0,1) \;/\; v_{|T_i}(x) = a_i x + b_i \;,\; i = 1,3 \} = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$.

c-à-d : $w_h \in V_h \iff$ (1) w_h est une application continue.
(2) $\forall x \in [0,1]$; $w_h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} w_i\, \varphi_i(x) = w_1 \varphi_1(x) + w_2 \varphi_2(x) + w_3 \varphi_3(x) + w_4 \varphi_4(x)$.

La formulation discrète nous permettera de calculer la solution approchée de $(*)$ de type (E.F) :
$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_h}{\partial x}\, dx = \int_0^1 f\, v_h\, dx \;,\; \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

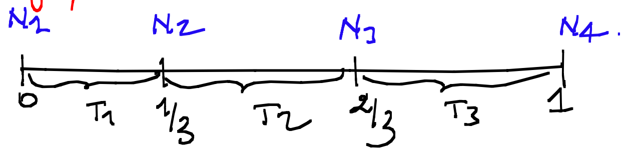
où : $u_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} u_i\, \varphi_i(x)$ est l'approximation de u.

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Pour déterminer u_h, on calcule d'abord, les $(\varphi_i)_{i=1}^4$ puis on calcule les $(u_i)_{i=1}^4$; $[u_1, u_2, u_3, u_4]^t$.

1) Détermination des fonctions de forme (φ_i) :

A chaque noeud N_i du maillage, on associe une et une seule fonction de forme φ_i qui vérifie : $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 ; i=j \\ 0 ; i\neq j \end{cases}$



avec $h = \frac{1}{3}$.

On a choisi $V_h = \{ v_h \in C^0(0,1) \;/\; v_h|_{T_i} = a_i x + b_i \;;\; i = 1, \dots, 4 \} \ni \varphi_1, \varphi_2 ; \varphi_3$ et φ_3

Alors : $\forall i = 1, 2 ; 3$ et 4 $\quad \varphi_i(x) = \begin{cases} a_1^i x + b_1^i & \text{si } x \in T_1 \\ a_2^i x + b_2^i & \text{si } x \in T_2 \\ a_3^i x + b_3^i & \text{si } x \in T_3 \end{cases}$

Détermination de φ_1 :

Sur T_1

$$\begin{cases} \varphi_1(N_1) = 1 \\ \varphi_1(N_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 N_1 + b_1 = 1 \\ a_1 N_2 + b_1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 1 \\ N_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Sur T_2

$$\begin{cases} \varphi_1(N_2) = 0 \\ \varphi_1(N_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_2 N_2 + b_2 = 0 \\ a_2 N_3 + b_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 & 1 \\ N_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_2 = b_2 = 0$$

Sur T_3

$$\begin{cases} \varphi_1(N_3) = 0 \\ \varphi_1(N_4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_3 N_3 + b_3 = 0 \\ a_3 N_4 + b_3 = 0 \end{array}$$

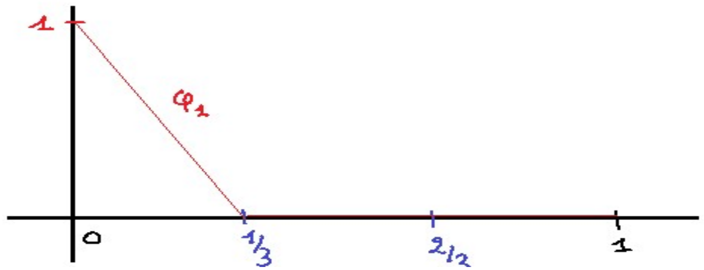
$$\begin{bmatrix} N_3 & 1 \\ N_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a_3 = b_3 = 0$$

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

D'où :

$$\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x \in T_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Détermination de φ_2 :

Sur T_1

$$\begin{cases} \varphi_2(N_1) = 1 \\ \varphi_2(N_2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} a_1 N_1 + b_1 = 0 \\ a_1 N_2 + b_1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 1 \\ N_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sur T_2

$$\begin{cases} \varphi_2(N_2) = 1 \\ \varphi_2(N_3) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} a_2 N_2 + b_2 = 1 \\ a_2 N_3 + b_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 & 1 \\ N_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sur T_3

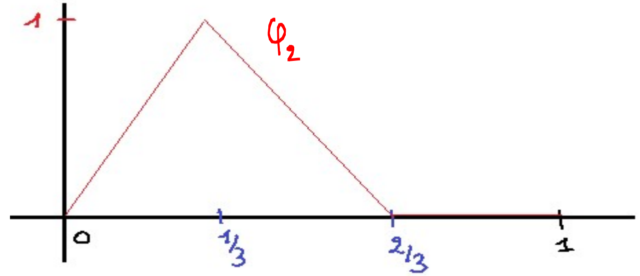
$$\begin{cases} \varphi_2(N_3) = 0 \\ \varphi_2(N_4) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} a_3 N_3 + b_3 = 0 \\ a_3 N_4 + b_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_3 & 1 \\ N_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$a_3 = b_3 = 0$$

D'où :

$$\varphi_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 3x & \text{si } x \in T_1 \\ -3x+2 & \text{si } x \in T_2 \\ 0 & \text{si } x \in T_3 \end{cases}$$



Détermination de φ_3 :

Sur T_1

$$\begin{cases}\varphi_3(N_1)=0\\ \varphi_3(N_2)=0\end{cases} \iff \begin{array}{l} a_1 N_1 + b_1 = 0 \\ a_1 N_2 + b_1 = 0\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 1 \\ N_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \iff$$

$$a_1 = b_1 = 0$$

Sur T_2

$$\begin{cases}\varphi_3(N_2)=0\\ \varphi_3(N_3)=0\end{cases} \iff \begin{array}{l} a_2 N_2 + b_2 = 0 \\ a_2 N_3 + b_2 = 0\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 & 1 \\ N_3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \iff$$

$$a_2 = b_2 = 0$$

Sur T_3

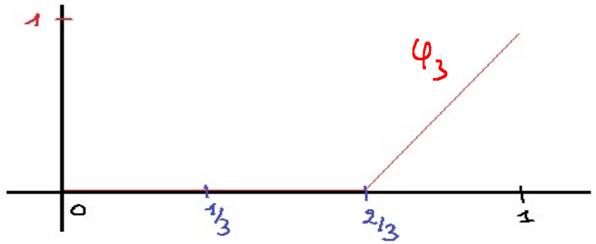
$$\begin{cases}\varphi_4(N_3)=0\\ \varphi_4(N_4)=1\end{cases} \iff \begin{array}{l} a_3 N_3 + b_3 = \\ a_3 N_4 + b_3 = \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} N_3 & 1 \\ N_4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2\end{bmatrix}$$

D'où :

$$\varphi_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in T_1 \cup T_2 \\ 3x-2 & \text{si } x \in T_3\end{cases}$$



Ainsi, on a déterminé les fonctions de base (φ_i). Donc, on a déterminé l'espace V_h.

Reste, les $(u_i)_i$, les coordonnées de la solution approchée u_h suivante la base (φ_i) :

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

② Détermination des (u_i) ; $\left(u_h = \sum u_i \varphi_i\right)$

Pour cela, on reprend la formulation variationnelle discrète avec :

① $v_h = \varphi_1$; $v_h = \varphi_2$; $v_h = \varphi_3$ et $v_h = \varphi_4$. (4 équations)

② On remplace u_h par l'expression $\sum_i u_i \varphi_i(x)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h = \sum_{1}^{4} u_i \varphi_i \in V_h \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\, dx = \int_0^1 f \varphi_i \, dx , \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}
\iff
\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum u_i \varphi_i\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum u_i \varphi_i\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_2 dx \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum u_i \varphi_i\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_3 dx \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum u_i \varphi_i\right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_4 dx \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\sum_i u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \displaystyle\sum_i u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \displaystyle\sum_i u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \displaystyle\sum_i u_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_1 dx \end{cases} \iff A_h U_h = F_h$$

où,
- A_h matrice Carrée de taille (4×4) ; $A_h = \left(\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j'\right)_{i,j}$
- $U_h = [u_1, u_2, u_3 ; u_4]^t$
- $F_h = \left[\int_0^1 f\varphi_1 ; \int_0^1 f\varphi_2 ; \int_0^1 f\varphi_3 ; \int_0^1 f\varphi_4\right]^t$.

$$A_h = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_3' & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_3' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2' & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_3' & \int_0^1 \varphi_4'\varphi_4 \\ \int_0^1 \varphi_3'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_3'\varphi_2' & \int_0^1 \varphi_3'\varphi_3' & \int_0^1 \varphi_3'\varphi_4' \\ \int_0^1 \varphi_4'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_4'\varphi_2' & \int_0^1 \varphi_4'\varphi_3' & \int_0^1 \varphi_4'\varphi_4' \end{bmatrix}$$

- On remarque que cette matrice est symétrique : $\int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' = \int_0^1 \varphi_j'\varphi_i'$
- pour calculer numériquement ses coefficients, on utilise la relation de Chasles.

Par exemple : $a_{11} = \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1' = \int_{T_1} \varphi_1'\varphi_1' + \int_{T_2} \varphi_1'\varphi_1' + \int_{T_3} \varphi_1'\varphi_1' = \int_{T_1} \varphi_1'\varphi_1' = \int_{T_1} (-3)^2 dx = 9\int_{T_1} dx = 9\times h$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' = \int_{T_1} \varphi_1'\varphi_2' + \int_{T_2} \varphi_1'\varphi_2' + \int_{T_3} \varphi_1'\varphi_2' = \int_{T_1} \varphi_1'\varphi_2' = \int_{T_1} -9\, dx = -9\times h.$$

$$a_{22} = \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2' = \int_{T_1} \varphi_2'\varphi_2' + \int_{T_2} \varphi_2'\varphi_2' + \int_{T_3} \varphi_2'\varphi_2' = \int_{T_1} 3^2 dx + \int_{T_2} (-3)^2 dx = 9h + 9h = 2(9h).$$

De même pour les autres (a_{ij}).

On pose : $\alpha = 9h$ Alors : $A_h U_h = F_h \iff$

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = F_h \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U_h = \frac{1}{\alpha} F_h$$

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

OR $u_1 = u_4 = 0$ (Ce sont les conditions aux limites de type Dirichlet)

Donc, on force les valeurs du système comme suit :

$$A_h U_h = F_h \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^1 f\varphi_1 dx \\ \int_0^1 f\varphi_2 dx \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

le système se réduit au calcul des coefficients des noeuds internes :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Pour terminer les calculs, on doit calculer F_h. Pour cela, on utilise une quadrature "convenable" pour évaluer les intégrales ce qui nous permettera de trouver u_2 et u_3, d'où : $u_h = u_2 \varphi_2 + u_3 \varphi_3$

つづく