MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

PROBLÈMES ÉLLIPTIQUES $\mathbb{P}_2$-1D

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Position du problème

On considère le problème modèle : $\begin{cases} \alpha u'' + \beta u = f & \text{dans } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

Formulation variationnelle : Chercher $u \in H_0^1(a,b)$ tq : $\alpha \int_{[a,b]} u'(t) v'(t)\, dt - \beta \int_{[a,b]} u(t) v(t)\, dt = - \int_{[a,b]} f(t) v(t)\, dt$

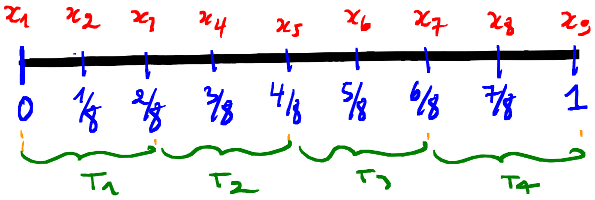
Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de F.V., on utilise Lax-Milgram. (Voir Cours 1).

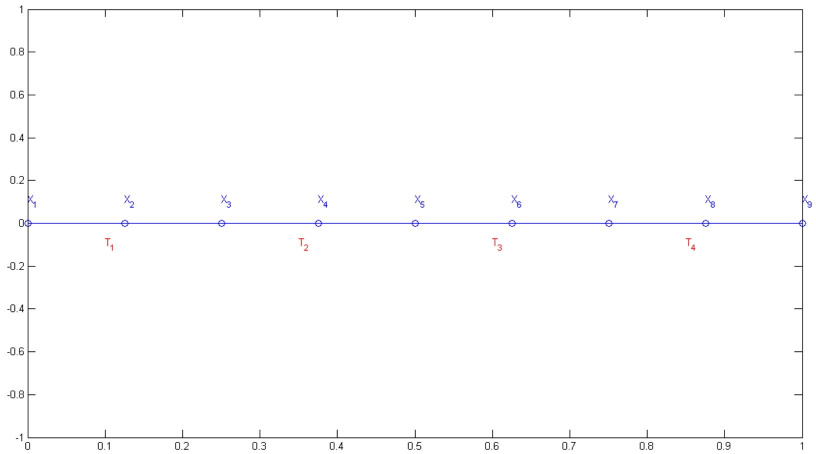
→ Nous allons approcher la solution $u \in H_0^1(a,b)$ par la méthode des éléments finis de type $\mathbb{P}_2$.

→ On rappelle la procédure E.F : ① Maillage
② Fonctions de forme (par élément)
③ Calcul élémentaire
④ Assemblage
⑤ Post-traitement.

Éléments finis de type $\mathbb{P}_2$.

① Maillage : (comme exemple : $a=0$ et $b=1$)





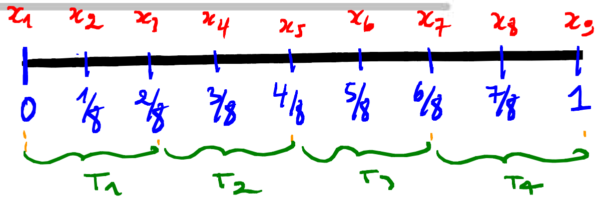
On a : $h = 1/8$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 2/8 & 3/8 & 4/8 & 5/8 & 6/8 & 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

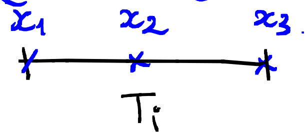
```matlab
function [X, T] = MaillageP2(a, b, h)
%---------------------------
%Génére un maillage de type P2
% X la table des coordonnées
% T la table de connectivité moyennant les indices
%---------------------------
        n = floor((b - a)/h) + 1;
        X = a + h*(0:n-1)';

    [~, I] = sort(X);
    T = [ I(1:2:n-1), I(3:2:n)];
%
%Partie affichage
%
    figure('name', sprintf('Representation du Maillage ( n = %d )', n) );
    plot(X, zeros(1,n), 'b-o');
    for i = 1:size(X,1)
        text(X(i), 0.1, sprintf('X_{%d}', i), 'color', 'blue');
    end

    for i = 1:size(T,1)
        text(X(T(i,1)) + 2*(X(T(i,2))-X(T(i,1)))/5, -0.1, sprintf('T_{%d}', i),
'color', 'red');
    end
end
```

Eléments finis de type $\mathbb{P}_2$.



② Fonctions de forme (par élément) :

Dans un élément



$1 \leq i \leq 4$

où $x_1 = X(T(1,i))$ $\quad x_2 = X(T(2,i))$ $\quad$ et $\quad x_3 = X(T(3,i))$

On a 3 fonctions de forme :

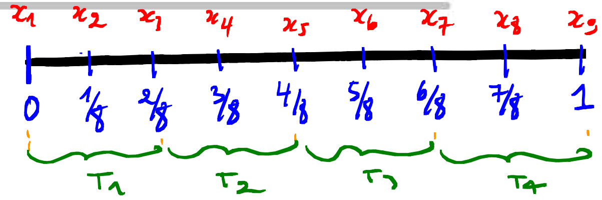
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 \\ \varphi_2(x) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2 \\ \varphi_3(x) = A_3 x^2 + B_3 x + C_3 \end{cases}$$

qui vérifient : $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

② Fonctions de forme (par élément) :

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

T_i



Détermination de φ_1 sur T_i

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1) = 1 \\ \varphi_1(x_2) = 0 \\ \varphi_1(x_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + B_1 x_1 + A_1 x_1^2 = 1 \\ C_1 + B_1 x_2 + A_1 x_2^2 = 0 \\ C_1 + B_1 x_3 + A_1 x_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par exemple : $i = 2 \iff$ 2/8 — 3/8 — 4/8 (T_2)

```
> with(LinearAlgebra) :
> T := <2/8, 3/8, 4/8> :
> A := VandermondeMatrix(T)
```

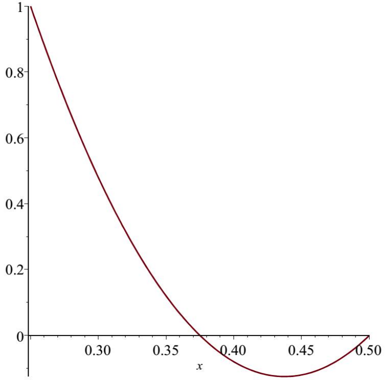
$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{3}{8} & \frac{9}{64} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

```
> b := <1, 0, 0> :
> LinearSolve(A, b)
```

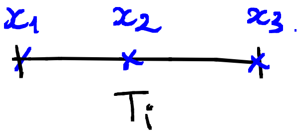
$$\begin{bmatrix} 6 \\ -28 \\ 32 \end{bmatrix}$$

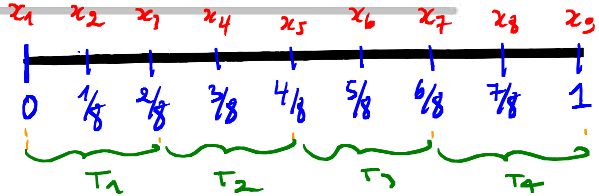
```
> phi1(x) := 32·x^2 − 28·x + 6
```

$$\phi 1 := x \rightarrow 32\,x^2 - 28\,x + 6$$



② Fonctions de forme (par élément) :

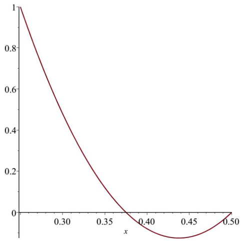




Détermination de φ_1 sur T_i

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1) = 1 \\ \varphi_1(x_2) = 0 \\ \varphi_1(x_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + B_1 x_1 + A_1 x_1^2 = 1 \\ C_1 + B_1 x_2 + A_1 x_2^2 = 0 \\ C_1 + B_1 x_3 + A_1 x_3^2 = 0 \end{cases}$$

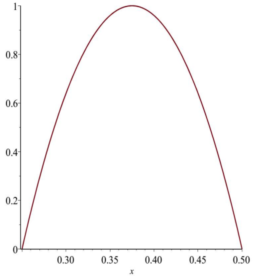
$$\iff \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Détermination de φ_2 sur T_i

$$\begin{cases} \varphi_2(x_1) = 0 \\ \varphi_2(x_2) = 1 \\ \varphi_3(x_2) = 0 \end{cases}$$

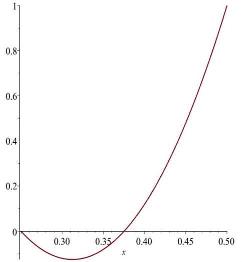
$$\iff \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ B_2 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Détermination de φ_3 sur T_i

$$\begin{cases} \varphi_3(x_1) = 0 \\ \varphi_3(x_2) = 0 \\ \varphi_3(x_3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ B_3 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

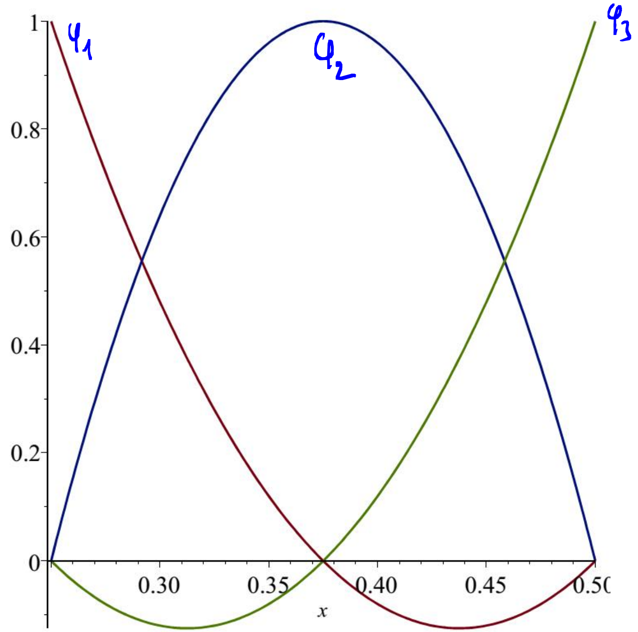


② Fonctions de forme (par élément) :

```
function   y = phi1_P2(x, x1, x2)
%calcule la fonction de forme phi1 telle que:
%      phi1(x1)=1  phi1(x2)=0 et phi1(x3)=0
%                Ti
%        |--------|-------|
%        x1       x2      x3
% phi1(x)=A*x^2+B*x+C et ab=[A;B;C]
abc=[x1^2 x1 1;x2^2 x2 1;x3^2 x3 1]\[1;0;0];
    y = polyval(abc,x);
end
```

Fonction Matlab

(De m̂ pour φ_2 et φ_3).



③ Calcul élémentaire.

On pose, $V_h = \{ v \in C(a,b) \,/\, v_{|T_i} \in \mathbb{P}_2 \text{ ; pour tout } T_i \text{ élément du Maillage } \mathcal{G} \}$.

et on rappelle la formulation Approchée: Chercher $u \in V_h$; $\alpha \int_{[a,b]} u'(x) v'(x)\, dx - \beta \int_{[a,b]} v(x) u(x)\, dx = -\int_{[a,b]} f(t) v(t)\, dt$

on prend $v = \varphi_j$ et $u = \sum_i u_i \varphi_i$. D'où:

$$\alpha \sum_i u_i \int_{[a,b]} \varphi_i'(t) \varphi_j'\, dt - \beta \sum_i u_i \int_{[a,b]} \varphi_i \varphi_j = \int_{[a,b]} f(t) \varphi_j(t)\, dt \qquad 1 \leq j \leq 9 \text{ « Nombre de noeuds »}$$

et si on note $\mathcal{T}_h$ le maillage $\mathbb{P}_2$ de $[a,b]$, Alors $[a,b] = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_N = \bigcup_{T_k \in \mathcal{T}_h} T_k$

D'où:

$$\begin{cases} \int_{[a,b]} u'(t) v'(t)\, dt = \int_{\cup_{\mathcal{T}_h} T_k} u'(t) v'(t)\, dt = \sum_{\mathcal{T}_h} \int_{T_k} u'(t) v'(t)\, dt \\ \int_{[a,b]} u(t) v(t)\, dt = \sum_{\mathcal{T}_h} \int_{T_k} u(t) v(t)\, dt \end{cases}$$

Eléments finis de type $\mathbb{P}_2$.

③ Calcul élémentaire.

D'où: Chercher $u \in V_h$ tq :

$$\alpha \sum_i \left(\sum_{T_k \in \mathcal{Z}_h} u_i \int_{T_k} \varphi_i'(t)\, \varphi_j'\, dt \right) - \beta \sum_i \left(\sum_{T_k \in \mathcal{Z}_h} u_i \int_{T_k} \varphi_i \varphi_j \right) = \sum_{T_k \in \mathcal{Z}_h} \int_{T_k} f(t)\, \varphi_j(t)\, dt \qquad 1 \leq j \leq \text{nbre de Noeuds} = 9$$

le Calcul élémentaire $\Leftrightarrow$ le calcul dans un élément T_k $\Leftrightarrow$ pour un i donné dans $\sum_i$

Nous avons donc 3 Matrices élémentaires :

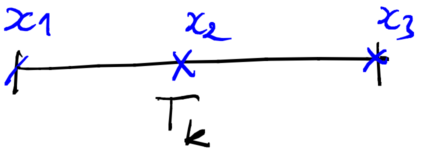
$$K_i = \left(\int_{T_k} \varphi_i'(t)\, \varphi_j'(t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \qquad M_i = \left(\int_{T_k} \varphi_i(t)\, \varphi_j(t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \qquad F_i = \left(\int_{T_k} f(t)\, \varphi_j(t) \right)$$

Calcul des intégrales $\Leftrightarrow$ quadrature de Gauss.

③ Calcul élémentaire : "M_i"

$$M_i = \begin{bmatrix} \int_{T_k} \varphi_1\varphi_1 & \int_{T_k} \varphi_1\varphi_2 & \int_{T_k} \varphi_1\varphi_2 \\ & \int_{T_k} \varphi_2\varphi_2 & \int_{T_k} \varphi_2\varphi_3 \\ & & \int_{T_k} \varphi_3\varphi_3 \end{bmatrix}$$

· l'élément courant (de calcul) est T_k.



et $\begin{cases} h_k = x_3 - x_1 \\ x_2 = \dfrac{x_3 + x_1}{2} \end{cases}$

Quadrature de Gauss $\Leftrightarrow$ changements de variable pour se ramener à $[-1,1]$.

$$\int_{x_1}^{x_3} F(X)\,dX = \frac{x_3 - x_1}{2} \int_{-1}^{1} F\left[\left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)t + \frac{x_3 + x_1}{2}\right] dt = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} G(t)\,dt$$

par exemple : Si $F(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_3} \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_1\left(\frac{x_3 - x_1}{2}t + x_2\right)\varphi_2\left(\frac{x_3 - x_1}{2}t + x_3\right) dt.$

Il faut donc calculer $\varphi_i\left(\frac{x_3 - x_1}{2}t + x_2\right) = \hat{\varphi}_i(t)$ $1 \leqslant i \leqslant 3$ "et leurs dérivées."

③ Calcul élémentaire : "M_i"

On pose, donc, $\hat{\varphi}_i(t) = \varphi_i\left(\frac{x_3-x_1}{2}t + \frac{x_3+x_1}{2}\right)$ et $\hat{\varphi}_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$. polynôme de degré 2

Pour $i=1$.

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1(-1) = \varphi_1\left(-\frac{x_3-x_1}{2} + \frac{x_3+x_1}{2}\right) = \varphi_1(x_1) = 1 \\ \hat{\varphi}_1(0) = \varphi_1\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right) = \varphi_1(x_2) = 0. \\ \hat{\varphi}_1(1) = \varphi_1\left(\frac{x_3-x_1}{2} + \frac{x_3+x_1}{2}\right) = \varphi_1(x_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\varphi}_1(-1) = 1 \\ \hat{\varphi}_1(0) = 0 \\ \hat{\varphi}_1(1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1)^2 + B(-1) + C = 1 \\ A(0) + B(0) + C = 0 \\ A(1) + B(1) + C = 0 \end{cases}$$

D'où : $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{\varphi}_1(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}.$$

Pour $i=2$.

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_2(-1) = \varphi_2(x_1) = 0 \\ \hat{\varphi}_2(0) = \varphi_2(x_2) = 1 \\ \hat{\varphi}_2(1) = \varphi_2(x_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{\varphi}_2(t) = -t^2+1 = (1-t)(1+t)$$

③ Calcul élémentaire : "M_i"

Pour $i = 3$

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_3(-1) = \varphi_3(x_1) = 0 \\ \hat{\varphi}_3(0) = \varphi_3(x_2) = 0 \\ \hat{\varphi}_3(1) = \varphi_3(x_3) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\varphi}_2(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} = \frac{t(t+1)}{2}.$$

Pour l'exemple où $F(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$

$$\int_{x_1}^{x_3} \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_1\left(\frac{x_3-x_1}{2}t + x_2\right)\varphi_2\left(\frac{x_3-x_1}{2}t + x_3\right)dt.$$

$$= \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1(t)\,\hat{\varphi}_2(t)\,dt$$

$$= \frac{h_k}{2}\Big[w_1\,\hat{\varphi}_1(t_1)\,\hat{\varphi}_2(t_1) + w_2\,\hat{\varphi}_1(t_2)\,\hat{\varphi}_2(t_2) + w_3\,\hat{\varphi}_1(t_3)\,\hat{\varphi}_2(t_3)\Big]$$

n	Points d'intégration t_i	Poids d'intégration w_i	Degré de précision
1	0	2	1
2	−0.577 350 269 +0.577 350 269	1 1	3
3	−0.774 596 669 $= t_1$ 0.0 $= t_2$ +0.774 596 669 $= t_3$	0.555 555 556 $= w_1$ 0.888 888 889 $= w_2$ 0.555 555 556 $= w_2$.	5
4	−0.861 136 312 −0.339 981 044 +0.339 981 044 +0.861 136 312	0.347 854 845 0.652 145 155 0.652 145 155 0.347 854 845	7
5	−0.906 179 846 −0.538 469 310 0.0 +0.538 469 310 +0.906 179 846	0.236 926 885 0.478 628 670 0.568 888 889 0.478 628 670 0.236 926 885	9

③ Calcul élémentaire : " M_i "

D'où :

$$M_i = \begin{bmatrix} \int_{T_k} \varphi_1\varphi_1 & \int_{T_k} \varphi_1\varphi_2 & \int_{T_k} \varphi_1\varphi_3 \\ & \int_{T_k} \varphi_2\varphi_2 & \int_{T_k} \varphi_2\varphi_3 \\ & & \int_{T_k} \varphi_3\varphi_3 \end{bmatrix} = \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3 \\ & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3 \\ & & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \frac{h_k}{2} \left(\text{Matrice Constante} \right)$$

Conclusion :

le calcul des matrices élémentaires " M_i " $\Leftrightarrow$ des multiplications $\frac{h_k}{2}$ par une matrice calculée une seule fois dans $[-1,1]$.

" $[-1,1]$ est appelé l'élément de Référence "

③ Calcul élémentaire : " K_i "

$$K_i = \begin{bmatrix} \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_1' & \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_2' & \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_3' \\ & \int_{T_k} \varphi_2'\varphi_2' & \int_{T_k} \varphi_2'\varphi_3' \\ & & \int_{T_k} \varphi_3'\varphi_3' \end{bmatrix}$$

Par exemple, on calcul $\int_{T_k} \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)\,dx$.

$$\int_{T_k} \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1}\left[\varphi_1\left(\frac{x_3-x_1}{2}t+x_2\right)\right]'\left[\varphi_2\left(\frac{x_3-x_1}{2}t+x_2\right)\right]'dt$$

$$= \frac{h_k}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{h_k}{2}\varphi_1'\left(\frac{h_k}{2}+x_2\right)\right]\left[\frac{h_k}{2}\varphi_2'\left(\frac{h_k}{2}+x_2\right)\right]dt$$

$$= \left(\frac{h_k}{2}\right)^3\int_{-1}^{1}\hat{\varphi}_1'(t)\,\hat{\varphi}_2'(t)\,dt$$

③ Calcul élémentaire : " K_i "

$$K_i = \begin{bmatrix} \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_1' & \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_2' & \int_{T_k} \varphi_1'\varphi_3' \\ & \int_{T_k} \varphi_2'\varphi_2' & \int_{T_k} \varphi_2'\varphi_3' \\ & & \int_{T_k} \varphi_3'\varphi_3' \end{bmatrix} = \left(\frac{h_k}{2}\right)^3 \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_1 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_3 \\ & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_2 & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3 \\ & & \int_{-1}^{1} \hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{h_k}{2}\right)^3 \times \left(\begin{matrix}\text{Matrice} \\ \text{Constante}\end{matrix}\right).$$

Conclusion :

le Calcul des matrices élémentaires " K_i " $\Leftrightarrow$ des multiplications $\left(\frac{h_k}{2}\right)^3$ par une matrice calculée une seule fois dans $[-1,1]$.

④ Assemblage.

$$\alpha \sum_i \left(\sum_{T_k \in Z_h} u_j \int_{T_k} \varphi_i'(t)\varphi_j'\,dt \right) - \beta \sum_i \left(\sum_{T_k \in Z_h} u_i \int_{T_k} \varphi_i \varphi_j \right) = \sum_{T_k \in Z_h} \int_{T_k} f(t)\varphi_j(t)\,dt \qquad 1 \leq j \leq \text{nbre de Noeuds} = g$$

Assemblage des matrices: "K et M"

- Boucle sur les éléments $k = 1 \to N_T$.
  - Boucle sur les numéros locaux $i = 1 \to 3$.
    - Boucle sur les numéros locaux $j = 1 \to 3$
      - $I = 2k + i - 2$
      - $J = 2k + j - 2$
      - $K(I,J) = K(I,J) + elemK(i,j)$.
    - end.
  - End
- End

Assemblage du second membre.

- Boucle sur les éléments $k = 1 \to N_T$.
  - Boucle sur les numéros locaux $i = 1 \to 3$.
    - $I = 2k + i - 2$
    - $F(I) = F(I) + elemF_i$.
  - End
- End

Conclusions

① La procédure de la M.E.F :

① Maillage.

ou

② fonctions de forme (par élément)

③ Matrices élémentaires

④ Seconds membres élémentaires

⑤ Assemblage

⑥ Post-traitement

② fonction de forme
(Dans l'élément de Référence T_R)

③ une matrice élémentaire et second membre élémentaire dans T_R.
- les matrices élémentaires = Constante × (Matrice de T_R)
- les seconds membres élémentaires = Constante × (second membre dans T_R)

④ Assemblage

⑤ Post-traitement.

Conclusions :

② L'élément de Référence pour M.E.F. 1D est $[-1,1]$:

1D :

L'élément de référence	P_k	Nombre de nœuds	Fonctions de forme
	$\mathbb{P}_1$	2 : $x_1=-1$, $x_2=1$	$\varphi_1(x) = \frac{-t+1}{2}$ $\varphi_2(x) = \frac{t+1}{2}$
	$\mathbb{P}_2$	3 : $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$	$\varphi_1(x) = \frac{t(t-1)}{2}$ $\varphi_2(x) = -t^2+1$ $\varphi_3(x) = \frac{t(t+1)}{2}$
	$\mathbb{P}_3$	4 : $x_1=-1$, $x_2=-1/3$, $x_3=1/3$, $x_4=1$	$\varphi_1(x)=$ $\varphi_2(x)=$ "Voir page 4" $\varphi_3(x)=$ $\varphi_4(x)=$

⋮