MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

FORMULATION VARIATIONNELLE

Prof. Anas RACHID
Département de mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Un problème physique est généralement décrit par des équations différentielles (1D) ou par des équations aux dérivées partielles (2D et 3D).

Poutre d'Euler-Bernoulli

$$\begin{cases} EI\dfrac{d^4u}{dx^4} = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = a_0, & u(L) = a_L \end{cases}$$

Equations de Lamé

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div} u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Equation de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Equation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

つづく

De telles formulations sont appelées formulations **fortes** ou formulations classiques

Une solution forte (ou classique) est une solution qui vérifie la forme forte d'un problème physique. C'est une fonction que l'on peut dériver autant de fois qu'il le faut pour que chaque terme de l'EDP soit bien défini de façon classique (classe $\boldsymbol{C^k}$.)

Anomalies de la formulation forte

La solution forte, qui pourrait paraitre naturelle à première vue, peut ne pas exister ou son existence n'est pas naturelle dans la plupart des cas. Si on considère, par exemple, le problème du Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ et $f \in C(\overline{\Omega})$, alors il n'existe pas de solution u de classe C^2 pour ce problème *.

Les obstacles à son existence: La non régularité de la frontière $\partial\Omega$, les données non régulières du problème, la non régularité des points limites de la frontière

* **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, *David Gilbarg, Neil S. Trudinger*, Springer Berlin Heidelberg, 2001
* **Numerical Treatment of Partial Differential Equations**, *Christian Grossmann Hans-Gorg Roos*, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

Solutions forte et faible

Nous allons voir qu'il est possible d'exprimer ces ED ou EDP autrement et d'une manière équivalente et plus maniable numériquement. Pour cela on doit:

- Chercher une solution dans un espace de régularité plus faible que souhaité.
- Établir, moyennant de fonction tests et d'intégrations par parties, des équations intégrales que doit vérifier cette solution. (si possible)

Une telle formulation sera qualifiée de formulation faible ou variationnelle, et ses solutions appelées solutions faibles.

Les enjeux de la formulation faible

- La difficulté de choisir **l'espace fonctionnel** dans lequel on cherche la solution faible
- La difficulté de manipuler les outils de l'analyse fonctionnelle pour **prouver l'existence et l'unicité** de la solution faible.
- La formulation variationnelle est une technique pratique pour **concevoir des méthodes d'approximations** (Galerkin, (et éléments finis), Petrov-Galerkin (et Volumes finis))

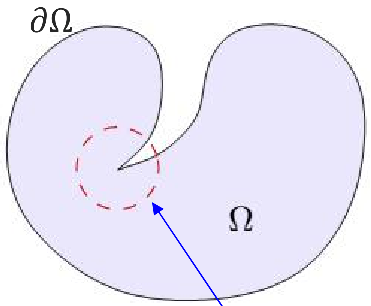
Comme il est nécessaire d'utiliser l'intégration par partie pour établir la formulation variationnelle, on présente quelques résultats à ce sujet.

Domaine régulier

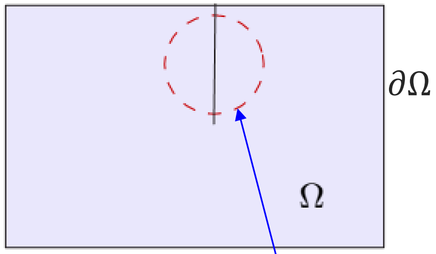
Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ (ou Γ). On dit que Ω est régulier si:

- sa frontière est régulière,
- il est localement, toujours, du même coté de sa frontière.

Mauvais domaines

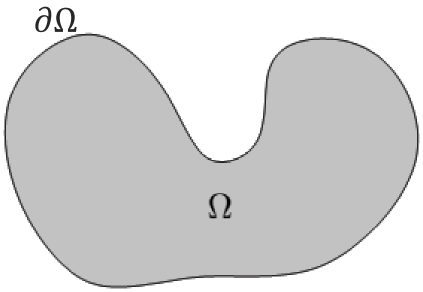


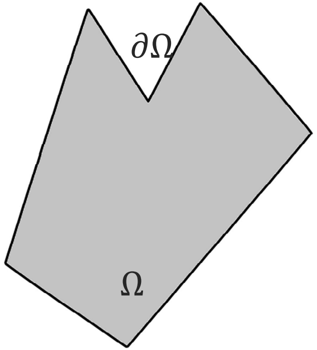
Point de rebroussement



Ω est des deux côtés de $\partial\Omega$ (fracture)

bon domaines





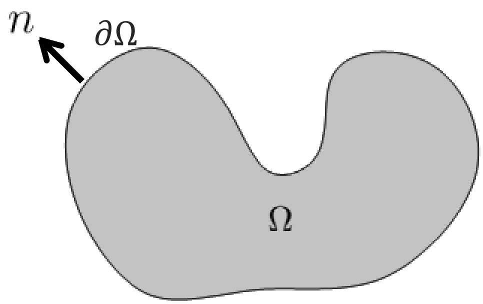
Comme il est nécessaire d'utiliser l'intégration par partie pour établir la formulation variationnelle, on présente quelques résultats à ce sujet.

Domaine régulier

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ (ou Γ). On dit que Ω est régulier si:

- sa frontière est régulière,
- il est localement, toujours, du même coté de sa frontière.

On définit alors la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \dots, \boldsymbol{n}_N)$ normal en tout point du plan tangent de Ω et pointant vers l'extérieur de Ω



Formule de Green

Dans toute la suite, on considère Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. On note dx la mesure de Lebesgue en dimension N (volumique) et ds la mesure de Lebesgue en dimension $N-1$ (surfacique).

Formule de Green

Soient u et v deux foncions de classes $C^1(\overline{\Omega})$ à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors:

$$\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)u(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,n_i(x)ds$$

où n_i est la i-ème composante d la normale extérieure unité de Ω

Cette formule est appelée aussi, formule d'intégration par partie.

Sous les mêmes hypothèses, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\, n_i(x) ds$$

Soit u une foncions de classes $C^2(\overline{\Omega})$ et v une foncions de classes $C^1(\overline{\Omega})$, les deux fonctions à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors:

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)\, v(x)dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \big(\nabla u(x) \cdot n(x)\big)v(x)\, ds$$

Formule de Stokes

Soit u une foncions vectorielle de classes $C^1(\overline{\Omega})$ et v une foncions scalaire de classes $C^1(\overline{\Omega})$, les deux fonctions à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors:

$$\int_{\Omega} \big(\operatorname{div} u(x)\big)v(x)dx = -\int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \big(u(x) \cdot n(x)\big)v(x)\, ds$$

Principe

D'une manière formelle, la formulation variationnelle est obtenue après multiplication de l'EDP ou ED par des fonctions testes et son intégration sur le domaine. Dans la plupart des cas on fait appel à la formule de Green (ou ses variantes) pour une intégration par partie.

Ce qui permet de réduire l'ordre de la dérivation des solutions du problèmes

Etapes de calcul

Etape1: Tester l'EDP avec une fonction assez régulière (fonctions testes)

Etape2: Intégrer le résultat sur le domaine

Etape3: Faire appel à l'intégration par partie et utiliser les conditions aux limites

Etape4: Utiliser les conditions aux limites

Laplacien (en 1D)

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = 0, & u(L) = 0 \end{cases}$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_{[0,L]} v(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x)dx = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 3

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx - \left[v(x)\frac{du}{dx}(x)\right]_0^L = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 4

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste **telle que $v(0) = v(L) = 0$**

$$\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx - \cancel{\left[v(x)\frac{du}{dx}(x)\right]_0^L} = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx$$

Laplacien (en 1D)

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx}(x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = 0, & u(L) = 0 \end{cases}$$

Formulation variationnelle du Laplacien (en 1D)

Chercher la solution $u \in C^1([0, L])$ telle que $u(0) = u(L) = 0$ **et**

$$\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1([0, L]): v(0) = v(L) = 0\}$$

Formulation variationnelle: Exemples

Laplacien (en 1D)

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx}(x) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = 0, & u(L) = 0 \end{cases}$$

Formulation variationnelle du Laplacien (en 1D)

Chercher la solution $u \in C^1([0,L])$ telle que $u(0) = u(L) = 0$ **et**

$$\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1([0,L]) : v(0) = v(L) = 0\}$$

Etapes 1 et 2

...oit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_{[0,L]} v(x)\frac{d^2u}{dx}(x)dx = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx$$

...apes 3

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx - \cancel{\left[v(x)\frac{du}{dx}(x)\right]_0^L} = \int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx$$

Laplacien (en 2D)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 3

La formule de Green donne:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \big(\nabla u(x) \cdot n(x)\big)v(x)\,ds = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 4

On considère $v \in C_c^\infty(\Omega)$ fonctions testes **telle que $u_{\partial\Omega} = 0$**

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \cancel{\int_{\partial\Omega} \big(\nabla u(x) \cdot n(x)\big)v(x)\,ds} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Laplacien (en 2D)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 3

La formule de Green donne:

$$\int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int (\nabla u(x) \cdot n(x))v(x)\,ds = \int f(x)v(x)\,dx$$

Formulation variationnelle du Laplacien (en 2D)

Chercher la solution $u \in C^1(\overline{\Omega})$ telle que $u_{\partial\Omega} = 0$ **et**

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1(\overline{\Omega}) : w_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \cancel{\int_{\partial\Omega} (\nabla u(x) \cdot n(x))v(x)\,ds} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Formulation variationnelle: Exemples

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Laplacien (en 2D)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Etapes 3

La formule de Green donne:

$$\int \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int (\nabla u(x)\cdot n(x))v(x)\,ds = \int f(x)v(x)\,dx$$

Formulation variationnelle du Laplacien (en 2D)

Chercher la solution $u \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que $u_{\partial\Omega} = 0$ **et**

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1(\bar{\Omega}) : w_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \cancel{\int_{\partial\Omega} (\nabla u(x)\cdot n(x))v(x)\,ds} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Equation de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx + \int_\Omega v(x)\nabla p(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 3

Deux intégrations par parties donnent:

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx \cancel{- \int_{\partial\Omega} (\nabla u(x)\cdot n(x))v(x)\,ds}$$

$$\int_\Omega v(x)\nabla p(x)dx = -\int_\Omega p(x)\nabla v(x)dx \cancel{+ \int_{\partial\Omega} (u(x)v(x))\vec{n}(x)\,ds}$$

Etapes 4

On considère $v \in C_c^\infty(\Omega)$ fonctions testes **telle que** $\boldsymbol{v_{\partial\Omega} = 0}$

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_\Omega p(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Equation de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Formulation variationnelle du problème de Stokes

Chercher la solution $(u, p) \in C^1(\overline{\Omega}) \times L^2(\Omega)$ telle que $u_{\partial\Omega} = 0$ **et**

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_\Omega p(x) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1(\overline{\Omega}) : w_{\partial\Omega} = 0\}$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x) dx + \int_\Omega v(x) \nabla p(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Etapes 3

Deux intégrations par parties donnent:

On considère $v \in C_c^\infty(\Omega)$ fonctions testes **telle que $u_{\partial\Omega} = 0$**

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega p(x) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Etapes 1 et 2

Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction teste

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx + \int_\Omega v(x)\nabla p(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

Etapes 3

Deux intégrations par parties donnent:

Equation de Stokes

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \text{div}\, u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Formulation variationnelle du problème de Stokes

Chercher la solution $(u,p) \in C^1(\bar{\Omega}) \times L^2(\Omega)$ telle que $u_{\partial\Omega} = 0$ **et**

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega p(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \qquad \forall v \in \{w \in C^1(\bar{\Omega}) : w_{\partial\Omega} = 0\}$$

Remarquer que cette formulation ne tient pas compte de la 2-ième équation ($div\ u = 0$). Pour corriger cette défiance technique, on va définir dans un chapitre suivant ce qu'on va appeler la formulation variationnelle mixte qui sera valable pour les problèmes couplés (*stokes, Navier-stokes, lamé…*)

REMARQUE 1

Ce que nous avons établi précédemment comme formulations variationnelles n'étaient pas équivalentes aux problèmes d'origines : c'étaient des implications
Pour terminer, il faut démontrer l'implication inverse en se basant sur le résultat suivant:

Soit $F \in C(\Omega)$. Si on a

$$\int_{\Omega} F(x)v(x)dx = 0\,, \qquad \forall v \in C_C^{\infty}(\Omega),$$

alors la fonction F est nulle dans Ω

REMARQUE 2

Par la suite, on présentera la formulation variationnelle sous la forme

$$(FV)\begin{cases}\text{Chercher la solution } u \in X \text{ telle que:}\\ \quad a(u,v) = l(v), \qquad\qquad \forall v \in X\end{cases}$$

Où

- X l'espace où l'on cherche la solution du problème.
- $a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire
- $l(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire

FV du Laplacien (en 1D)

$$X = \{w \in C^1([0,L]) : v(0) = v(L) = 0\},$$

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_{[0,L]} \frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx \\ l(v) = \displaystyle\int_{[0,L]} f(x)v(x)\,dx \end{cases}$$

FV du Laplacien (en 2D)

$$X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx \\ l(v) = \displaystyle\int_{\Omega} f(x)v(x)\,dx \end{cases}$$

FV de Stokes

$$X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u_{\partial\Omega} = 0\} \times L^2(\Omega),$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a((u,p),(v,q))} = ?? \\ l((v,q)) = \displaystyle\int_{\Omega} f(x)v(x)\,dx \end{cases}$$

REMARQUE 3

La formulation variationnelle est connue, en mécanique, sous le nom du principe des travaux virtuel

REMARQUE 4

- La formulation variationnelle permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème d'origine (moyennant la remarque 1) avec moins de régularité demandée.
- Le cadre théorique qui nous permet cela est le théorème de Lax-Milgram qu'on va définir par la suite (pour d'autres théorèmes, voir le polycopie).
- Néanmoins cette théorie ne marche que si l'espace X (dans la remarque 2) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas si l'espace X est définie sur l'espace $C^k, 0 \leq k \leq +\infty$.
- L'alternative est d'utiliser d'autres espaces, à savoir les espaces de Sobolev H^m et H_0^m

Ce qu'on va introduire par la suite.

On rappelle que

$$v \in L^2(\Omega) \iff v: \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \int_\Omega |v(x)| dx < \infty$$

L'espace H^1

On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme suit

$$u \in H^1(\Omega) \iff \begin{cases} u \in L^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1,2,\dots,N \end{cases}$$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions.

La norme de l'espace H^1

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |\boldsymbol{\nabla u(x)}|^2 \boldsymbol{dx} + \int_{\boldsymbol{\Omega}} |\boldsymbol{u(x)}|^2 \boldsymbol{dx} \right)^{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert

Espace fonctionnel de Sobolev

Soit
$$F: \begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_N) & \longmapsto & F(x) \end{array}$$

On définit la dérivée généralisée comme suit:

$$D^{\alpha} F(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} F(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$

L'espace $H^m, m \in \mathbb{N}^*$

On définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ comme suit

$$u \in H^m(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in L^2(\Omega) \\ D^{\alpha} u \in L^2(\Omega) \quad \alpha \in \mathbb{R}^N, |\alpha| \leq m \end{cases}$$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions.

La norme de l'espace $H^m, m \in \mathbb{N}^*$

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ est un espace de Hilbert

On définit aussi les espaces de Hilbert suivants:

L'espace H_0^1

Soit Ω ouvert borné. On définit l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ comme suit

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

La norme de l'espace H_0^1

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

- L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H_0^1}$ est un espace de Hilbert
- La norme $\|\cdot\|_{H_0^1}$ est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$. Ce résultat est un corollaire de l'inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante $C_P > 0$ ne dépendant que de Ω telle que:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}$$

Rappel 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, qu'on notera $E \hookrightarrow F$.

- Une telle application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F
- On dira que cette inclusion est:
  - **Continue** et on notera $E \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} F$ si:

$$\exists C > 0, \forall u \in E, \|u\|_F \leq C\|u\|_E$$

  - **Dense** si pour tout $u \in F$, il existe une suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence est pour la norme de F)

L'inégalité de Sobolev

Lorsque Ω est un ouvert régulier avec $\partial\Omega$ borné ou lorsque $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, ona :

1. Si $m > \frac{N}{2} + k, k \in \mathbb{N}$, alors $H^m(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$.
2. Si $m = \frac{N}{2}$ alors $H^m(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [2, +\infty[$.
3. Si $0 \leq m \leq \frac{N}{2}$ alors $H^m(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ pour tout $q \in \left[2, \frac{2N}{N-2m}\right]$.

Rappel 3

V désigne un espace d'Hilbert de produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)_V$ et de norme associée $\|u\|_V = \sqrt{(u,u)_V}$. V' désigne le dual de V. On définit :

La forme bilinéaire:

$$a(\cdot,\cdot): \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & a(u,v) \end{array}$$

La forme linéaire:

$$L(\cdot): \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & L(u) \end{array}$$

La forme bilinéaire est continue:

Si on a

$$\exists M > 0, \forall (u,v) \in V \times V, \qquad |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

La forme bilinéaire est coercive (elliptique):

Si on a

$$\exists \alpha > 0, \forall\, u \in V, \qquad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V{}^2$$

La forme linéaire est continue:

Si on a

$$\exists C > 0, \forall\, v \in V, \qquad L(v) \leq C \|v\|_V$$

La résolution d'un problème d'équation aux dérivées partielles se ramène en général à celle d'un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $H = V$ (c'est-à-dire, la solution et les fonctions tests appartiennent au même espace fonctionnelle) on présente un outil de base et puissant que nous permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel:

Théorème de Lax-Milgram

Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert V et soit $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V (autrement dit $L \in V'$). Alors il existe un unique élément $u \in V$ solution de

$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in V$$

De plus la solution u vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$$

L’existence et l’unicité du Laplacien avec les conditions de Dirichlet

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ qu’on suppose borné dans une direction et soit $f \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Alors existe une solution unique de sa formulation variationnelle:

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$\|u\|_{H^1} \leq C\, \|f\|_{L^2}$$

On applique le théorème de Lax-Milgram avec $V = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$ et $L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$.

→ L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert

→ Les inégalité de Cauchy-Schawrz et Poincaré donnent

$a(\cdot,\cdot)$ est continue

Soit $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx^{\frac{1}{2}} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

$L(\cdot)$ est continue

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_\Omega |f(x) v(x)| dx \\ &\leq \int_\Omega |f(x)|^2 dx^{\frac{1}{2}} \int_\Omega |v(x)|^2 dx^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \underbrace{C_P \|f\|_{L^2}}_{C_1} \|\nabla u\|_{L^2} \leq C_1 \|v\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

→ La coercivité, dans ce cas, est immédiate:

$a(\cdot,\cdot)$ est coercive

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx = \|v\|_{H_0^1}^2$$

⇒ on applique le théorème de Lax-Milgram, ce qui prouve le résultat.