ELÉMENTS FINIS 2D / $\mathbb{P}_1$

Séance 6

MEC4122

Prof. Anas RACHID
Département de Génie Mécanique
ENSAM – Casablanca | Université Hassan II de Casablanca

Problème modèle

Mettre en évidence les techniques de calcul par éléments finis sur le problème modèle suivant:

$$\alpha\Delta u(x,y) + \beta\nabla \cdot u(x,y) + \gamma u(x,y) = f(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$
$$u(x,y) = 0, \qquad \forall (x,y) \in \partial\Omega$$

où Ω est un domaine assez régulier de $\mathbb{R}^2$.

Dans un premier temps, on prends $\beta = \gamma = 0$.

Formulation variationnelle

Chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$\int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (1)$$

Procédure éléments finis

1. Création du maillage
2. Matrices élémentaires
3. Technique d'assemblage
4. Système linéaire

La procédure de l'approximation par la méthode des éléments finis

1 Création de maillage

Définition (maillage admissible)

Un maillage (triangulation) de Ω est une famille finie $\mathcal{T}_h = (T_i)_{1 \le i \le N_e}$ d'ouvert borné telle que:

- $\forall\, i \in \{1, \dots, N_e\}, T_i$ est non-dégénéré,
- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} \overline{T}_i$
- $\forall\, i, j \in \{1, \dots, N_e\}, i \neq j,\ \ T_i \cap T_j = \left|\begin{array}{c} \text{l'ensemble vide} \\ \text{un sommet commun} \\ \text{un coté commun} \end{array}\right.$

Définition (maillage admissible)

Un maillage (triangulation) de Ω est une famille finie $\mathcal{T}_h = (T_i)_{1\leq i\leq N_e}$ d'ouvert borné telle que:

- $\forall\, i \in \{1, \dots, N_e\}, T_i$ est non-dégénéré,
- $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} \overline{T_i}$
- $\forall\, i,j \in \{1, \dots, N_e\}, i \neq j,\ T_i \cap T_j = \left| \begin{array}{c} \text{l'ensemble vide} \\ \text{un sommet commun} \\ \text{un coté commun} \end{array} \right.$

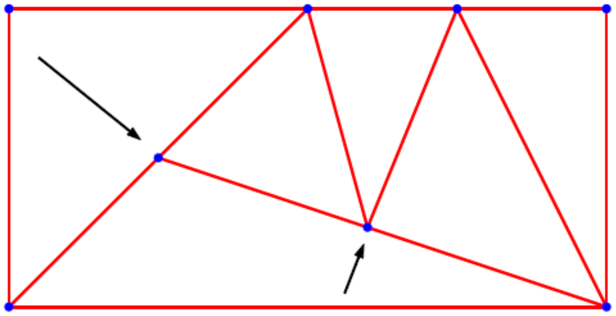
On pose

$$h = \max_{T_i \in \mathcal{T}_h} h_i$$

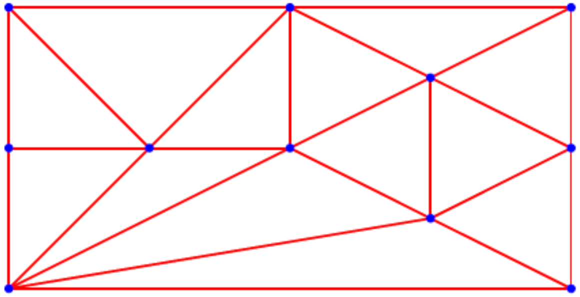
Avec $h_i = diam(T_i) = \max_{x,y \in T_i} \|x - y\|$.

h est appelé la taille du maillage.

Création de Maillage

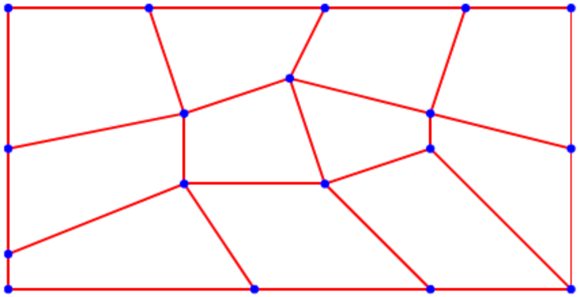


Exemple de maillage **non conforme** (non admissible).

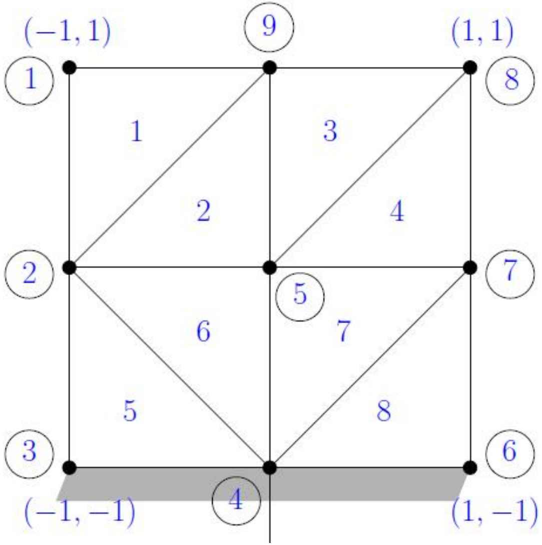


Maillage triangulaire

Maillage quadrilatère



Exemple de maillage triangulaire



i	Coordonnees	
1	-1	1
2	-1	0
3	-1	-1
4	0	-1
5	0	0
6	1	-1
7	1	0
8	1	1
9	0	1

T_j	Vertex indices		
1	1	2	9
2	2	5	9
3	5	8	9
4	5	7	8
5	3	4	2
6	4	5	2
7	4	7	5
8	4	6	7

2

Calcul des matrices élémentaires

- Les fonctions de forme
- L’élément de référence
- La matrice élémentaire

Fonctions de forme

En deux dimensions d'espace les fonctions polynômiales peuvent êtres présentées de deux manières: $\mathbb{P}_k$ ou $\mathbb{Q}_k$

Les polynômes de type $\mathbb{P}_k$

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{k}} = \left\{ p : \Omega \to \mathbb{R} \mid p(x,y) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{ij} x^i y^j \right\}$$

Où:

- Polynôme de degré 1

$$v_h \in \mathbb{P}_1 \iff v_h(x,y) = ax + by + c$$

- Polynôme de degré 2

$$v_h \in \mathbb{P}_2 \iff v_h(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

Les polynômes de type $\mathbb{Q}_k$

$$\mathbb{Q}_{\boldsymbol{k}} = \left\{ p : \Omega \to \mathbb{R} \mid p(x,y) = \sum_{0 \leq i,j \leq k} a_{ij} x^i y^j \right\}$$

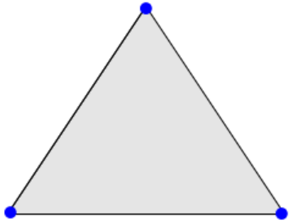
Où:

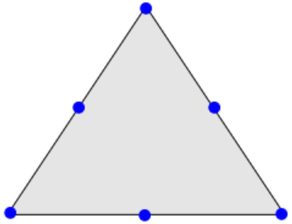
- Polynôme de degré 1

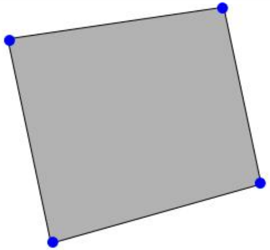
$$v_h \in \mathbb{Q}_1 \iff v_h(x,y) = ax + by + cxy + d$$

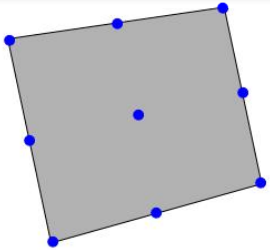
- Polynôme de degré 2

$$v_h \in \mathbb{Q}_2 \iff v_h(x,y) = ax^2 + by^2 + cx^2y^2 + dx^2y + exy^2 + fxy + gx + hy + i$$









Espace d'approximation

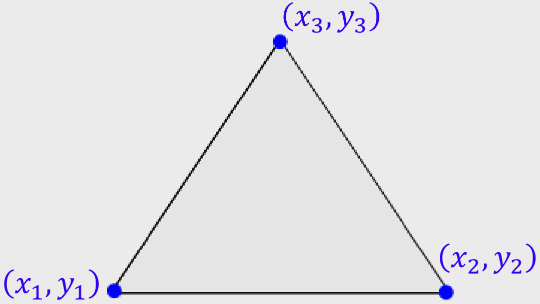
Soit $\mathcal{T}_h(\Omega) = (T_k)_{1\leq k\leq N_e}$ une maillage de Ω par des triangles ou des quadrangles. Sur $\mathcal{T}_h$, on définit l'espace d'approximation V_h dans le quel on approche la solution u de (1):

→ Si $\mathcal{T}_h(\Omega)$ est un maillage triangulaire

$$\begin{aligned} V_h &= \{ v \in C^0(\Omega) \ | \ v_{|T} \in \mathbb{P}_1, \forall\, T \in \mathcal{T}_h(\Omega) \} \\ &= Vect(\{\varphi_i\}_{1\leq i\leq Nn}) \end{aligned}$$

Où, dans chaque triangle T_k la fonction de forme φ_i vérifie:

1. $\varphi_i(x,y) = ax + by + c$
2. $\varphi_i(x_j,y_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3$

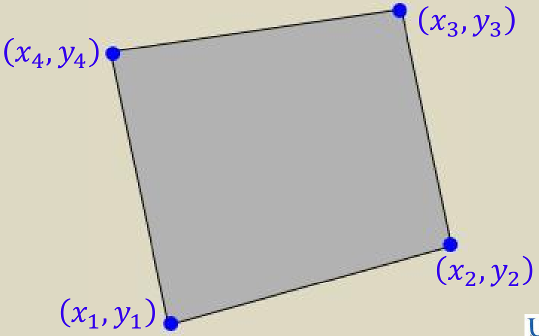


→ Si $\mathcal{T}_h(\Omega)$ est un maillage quadrangulaire

$$\begin{aligned} V_h &= \{ v \in C^0(\Omega) \ | \ v_{|T} \in \mathbb{Q}_1, \forall\, T \in \mathcal{T}_h(\Omega) \} \\ &= Vect(\{\phi_i\}_{1\leq i\leq Nn}) \end{aligned}$$

Où, dans chaque quadrangle T_k la fonction de forme φ_i vérifie:

1. $\phi_i(x,y) = ax + by + cxy + d$
2. $\phi_i(x_j,y_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3$



Espace d'approximation: cas des triangles

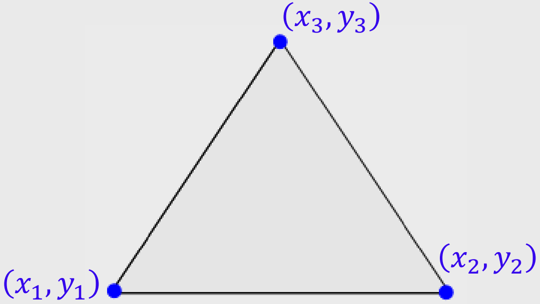
Soit $\mathcal{T}_h(\Omega) = (T_k)_{1\leq k\leq N_e}$ une maillage de Ω par des triangles. Sur $\mathcal{T}_h$, on définit l'espace d'approximation V_h dans le quel on approche la solution u de (1):

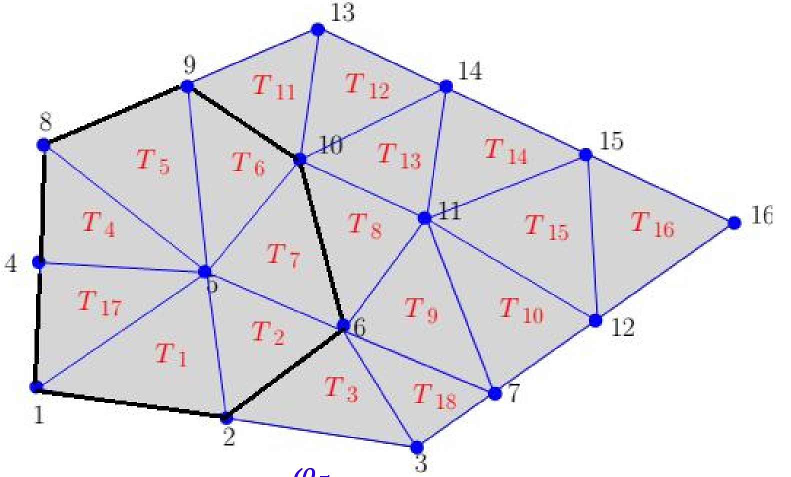
→ Si $\mathcal{T}_h(\Omega)$ est un maillage triangulaire

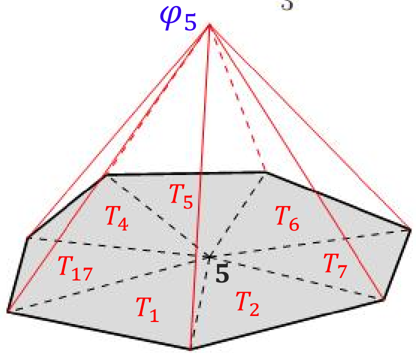
$$
\begin{aligned}
V_h &= \{ v \in C^0(\Omega) \ | \ v_{|T} \in \mathbb{P}_1, \forall\, T \in \mathcal{T}_h(\Omega) \} \\
&= Vect(\{\varphi_i\}_{1\leq i\leq Nn})
\end{aligned}
$$

Où, dans chaque triangle T_k la fonction de forme φ_i vérifie:

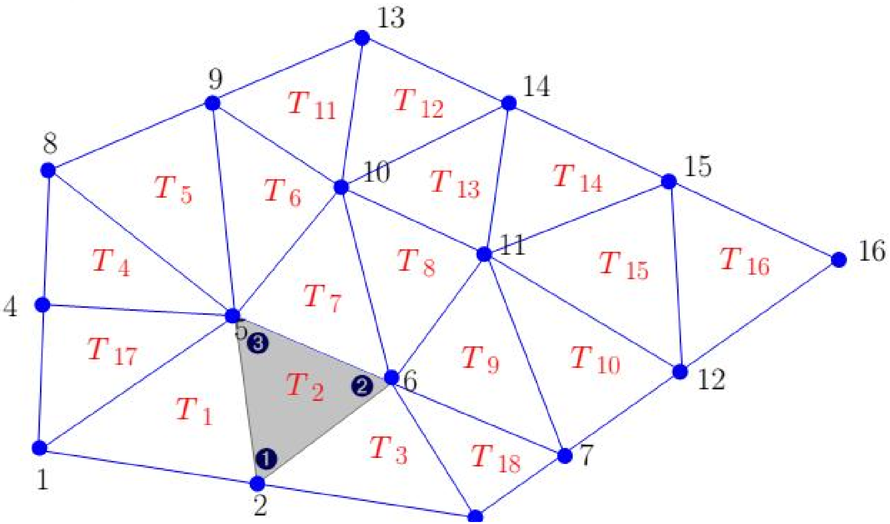
1. $\varphi_i(x,y) = ax + by + c$
2. $\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3$





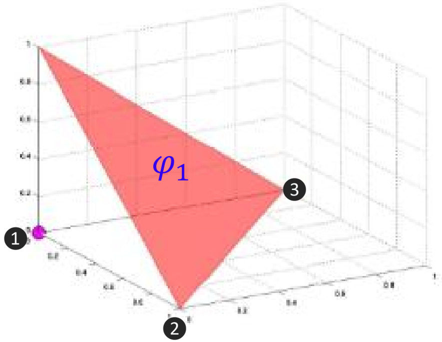


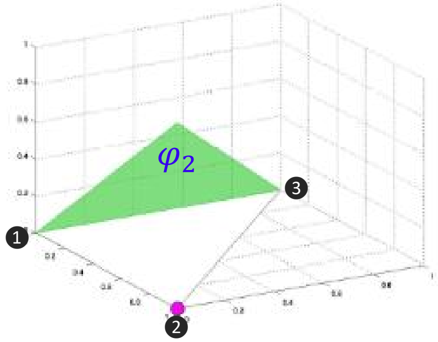
Espace d'approximation: cas des triangles

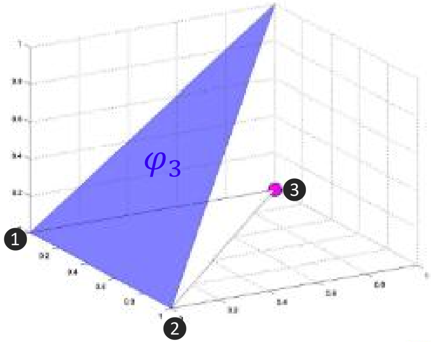


Dans l'élément T_2 nous avons 3 fonctions de forme φ_i:

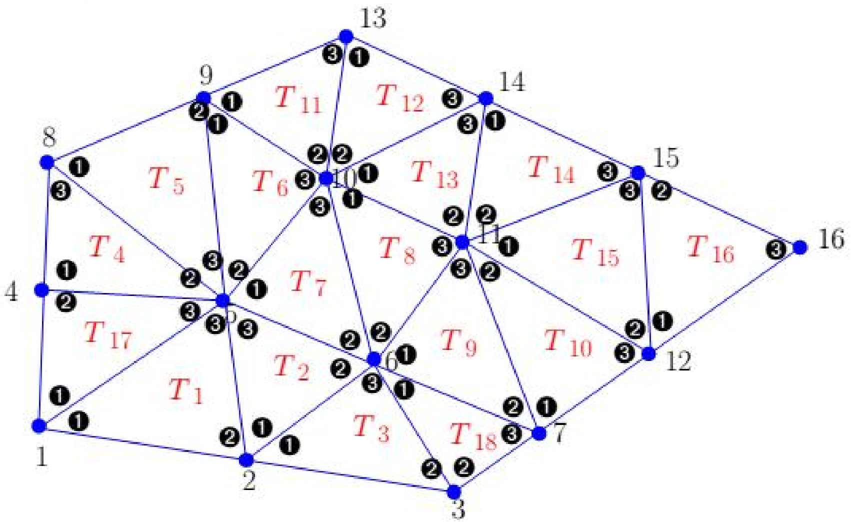
Nœud ❶	Nœud ❷	Nœud ❸
$\begin{cases} \varphi_1(x_1,y_1)=1 \\ \varphi_1(x_2,y_2)=0 \\ \varphi_1(x_3,y_3)=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_2(x_1,y_1)=0 \\ \varphi_2(x_2,y_2)=1 \\ \varphi_2(x_3,y_3)=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_3(x_1,y_1)=0 \\ \varphi_3(x_2,y_2)=0 \\ \varphi_3(x_3,y_3)=1 \end{cases}$

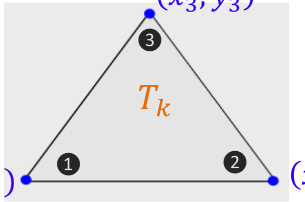






Espace d'approximation: cas des triangles





Dans chaque élément T_k les 3 fonctions de forme φ_i Vérifient:

Nœud 1

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1) = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 1 \\ \varphi_1(x_2, y_2) = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0 \\ \varphi_1(x_3, y_3) = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 = 0 \end{cases}$$

Nœud 2

$$\begin{cases} \varphi_2(x_1, y_1) = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \\ \varphi_2(x_2, y_2) = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 1 \\ \varphi_2(x_3, y_3) = a_2x_3 + b_2y_3 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Nœud 3

$$\begin{cases} \varphi_3(x_1, y_1) = a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_2, y_2) = a_3x_2 + b_3y_2 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_3, y_3) = a_3x_3 + b_3y_3 + c_3 = 1 \end{cases}$$

Espace d'approximation: cas des triangles

Fonctions de forme

Dans chaque élément T_k les 3 fonctions de forme φ_i vérifient:

Nœud 1

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,y_1) = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 1 \\ \varphi_1(x_2,y_2) = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0 \\ \varphi_1(x_3,y_3) = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 = 0 \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nœud 2

$$\begin{cases} \varphi_2(x_1,y_1) = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \\ \varphi_2(x_2,y_2) = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 1 \\ \varphi_2(x_3,y_3) = a_2x_3 + b_2y_3 + c_2 = 0 \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nœud 3

$$\begin{cases} \varphi_3(x_1,y_1) = a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_2,y_2) = a_3x_2 + b_3y_2 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_3,y_3) = a_3x_3 + b_3y_3 + c_3 = 1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & -y_1 + y_3 & y_1 - y_2 \\ -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & -x_1y_3 + x_3y_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

UH2 ENSAM

Fonctions de forme

Espace d’approximation: cas des triangles

Dans chaque élément T_k les 3 fonctions de forme φ_i vérifient:

Nœud 1

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,y_1) = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 1 \\ \varphi_1(x_2,y_2) = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0 \\ \varphi_1(x_3,y_3) = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 = 0 \end{cases}$$

Nœud 2

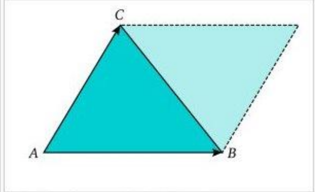
$$\begin{cases} \varphi_2(x_1,y_1) = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0 \\ \varphi_2(x_2,y_2) = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 1 \\ \varphi_2(x_3,y_3) = a_2x_3 + b_2y_3 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Nœud 3

$$\begin{cases} \varphi_3(x_1,y_1) = a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_2,y_2) = a_3x_2 + b_3y_2 + c_3 = 0 \\ \varphi_3(x_3,y_3) = a_3x_3 + b_3y_3 + c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & -y_1 + y_3 & y_1 - y_2 \\ -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & -x_1y_3 + x_3y_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Aire_d%27un_triangle



L'aire d'un triangle est calculé à partir d'un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme défini par deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est la norme de leur produit vectoriel :

$$S_p = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

On peut calculer l'aire d'un triangle à partir de cette formule :

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

Un repère orthonormé étant donné, l'aire du triangle *ABC* peut être calculée à partir des coordonnées des sommets.

Dans le plan, si les coordonnées de *A*, *B* et *C* sont données par $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$, alors l'aire *S* est la moitié de la valeur absolue du déterminant

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

$$|\det(A)| = 2\,Air(T_k) := |T_k|$$

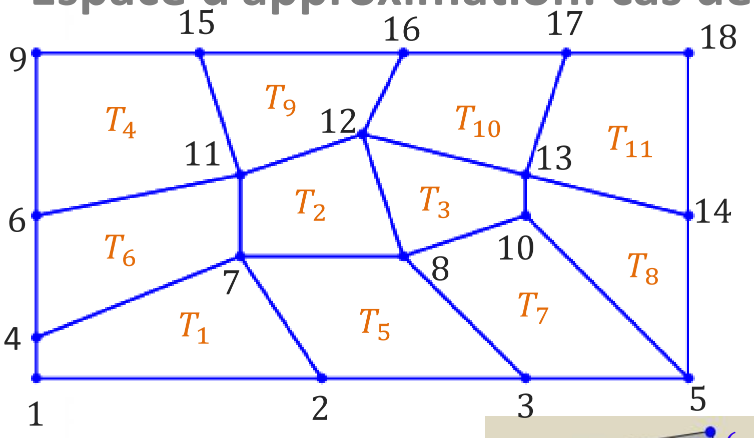
L'aire du triangle *ABC* peut aussi se calculer à partir de la formule

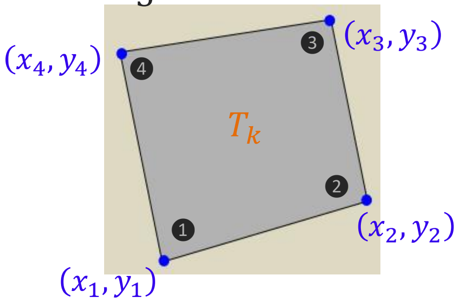
$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|x_Ay_C - x_Ay_B + x_By_A - x_By_C + x_Cy_B - x_Cy_A|.$$

ENSAM

Fonctions de forme

Espace d'approximation: cas des quadrangles





Dans chaque élément T_k les 4 fonctions de forme ϕ_i Vérifient:

Nœud 1

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, y_1) = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_1 y_1 + d_1 = 1 \\ \phi_1(x_2, y_2) = a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 x_1 y_1 + d_1 = 0 \\ \phi_1(x_3, y_3) = a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 x_1 y_1 + d_1 = 0 \\ \phi_1(x_4, y_4) = a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 x_4 y_4 + d_1 = 0 \end{cases}$$

Nœud 2

$$\begin{cases} \phi_2(x_1, y_1) = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 x_1 y_1 + d_2 = 0 \\ \phi_2(x_2, y_2) = a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 x_1 y_1 + d_2 = 1 \\ \phi_2(x_3, y_3) = a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 x_1 y_1 + d_2 = 0 \\ \phi_2(x_4, y_4) = a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 x_4 y_4 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Nœud 3

$$\begin{cases} \phi_3(x_1, y_1) = a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 x_1 y_1 + d_3 = 0 \\ \phi_3(x_2, y_2) = a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 x_1 y_1 + d_3 = 0 \\ \phi_3(x_3, y_3) = a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 x_1 y_1 + d_3 = 1 \\ \phi_3(x_4, y_4) = a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 x_4 y_4 + d_3 = 0 \end{cases}$$

Nœud 4

$$\begin{cases} \phi_4(x_1, y_1) = a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 x_1 y_1 + d_4 = 0 \\ \phi_4(x_2, y_2) = a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 x_1 y_1 + d_4 = 0 \\ \phi_4(x_3, y_3) = a_4 x_3 + b_4 y_3 + c_4 x_1 y_1 + d_4 = 0 \\ \phi_4(x_4, y_4) = a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 x_4 y_4 + d_4 = 1 \end{cases}$$

Fonctions de forme

Espace d'approximation: cas des quadrangles

Dans chaque élément T_k les 4 fonctions de forme ϕ_i vérifient:

Nœud ❶ : ϕ_1 est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nœud ❷ : ϕ_2 est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nœud ❸ : ϕ_3 est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nœud ❹ : ϕ_3 est donnée par

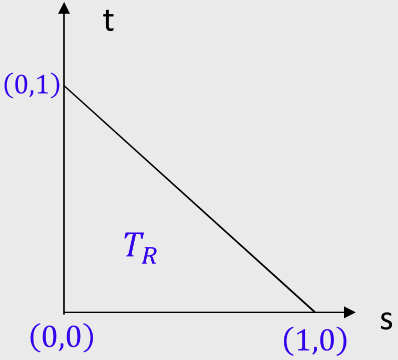
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Quadratures de Gauss en 2D

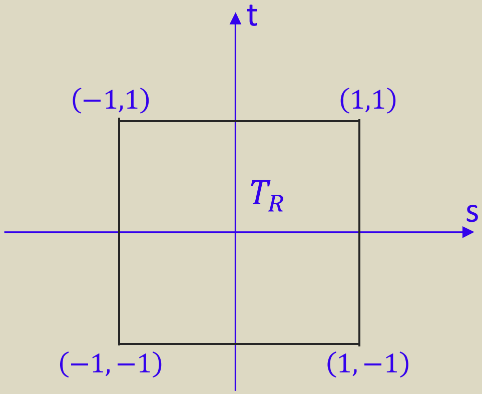
→ Cas des triangles



$$I = \iint_{T_R} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\omega_i$$

→ Cas des quadrangles



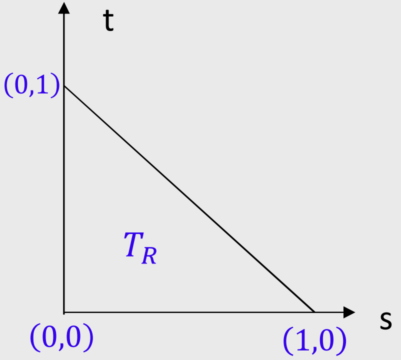
$$I = \iint_{T_R} g(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(x,y)dx\,dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_i,y_j)\,\omega_i\,\omega_j$$

Élément de référence

Quadratures de Gauss en 2D

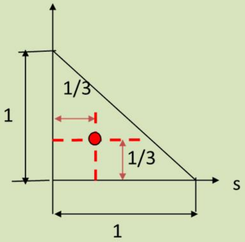
→ Cas des triangles



$$I = \iint_{T_R} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dx\,dy$$

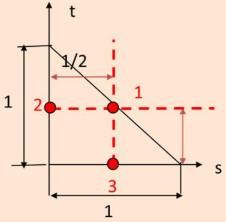
$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\omega_i$$

Exacte pour les polynomes de degré 1



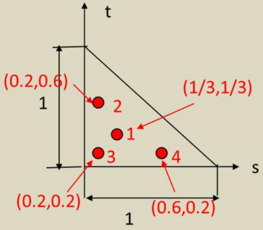
$$I \approx \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Exacte pour les polynomes de degré 2



$$I \approx \frac{1}{6} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{6} f\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Exacte pour les polynomes de degré 3



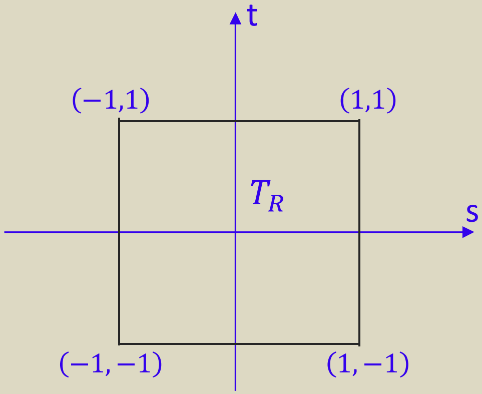
$$I \approx \frac{-27}{96} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{25}{96} f(0.2, 0.6) + \frac{25}{96} f(0.2, 0.2) + \frac{25}{96} f(0.6, 0.2)$$

Quadratures de Gauss en 2D

Example: *Gaussian quadrature of order 3 for the standard quadrilateral element* $R_{st} = [-1,1]^2$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx\, & \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\\ & +\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},0\right)+\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot g(0,0)+\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot g\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},0\right)\\ & +\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)+\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot g\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

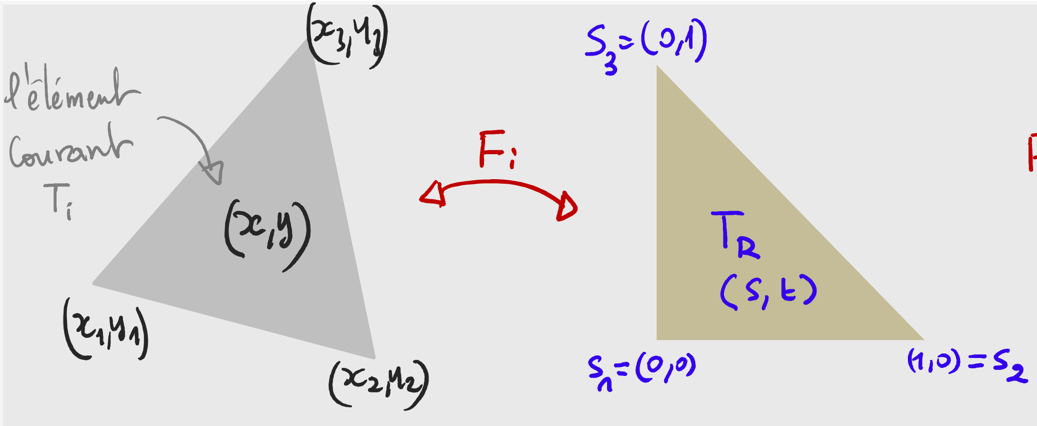
→ Cas des quadrangles



$$I = \iint_{T_R} g(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)dx\,dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g(x_i, y_j)\,\omega_i\,\omega_j$$

Élément de référence : cas des triangles



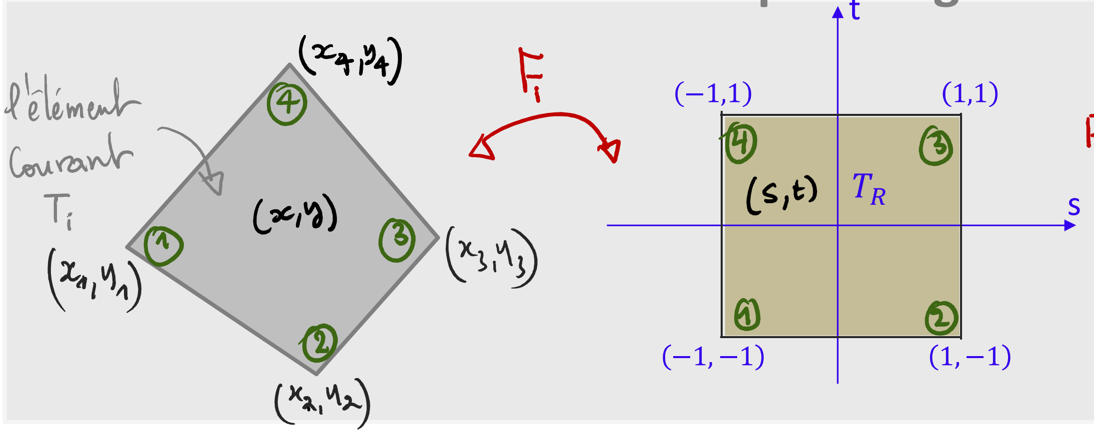
$$F_i : \begin{array}{rcl} T_R & \longrightarrow & T_i \\ (s,t) & \longmapsto & F_i(s,t)=(x,y) \end{array}$$

$$(x,y)=F_i(s,t) \iff \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}}_{X_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}}_{S} \iff X = X_1 + JS.$$

Et :

$$\iint_{T_i} f(x,y)\,dx\,dy = |\det J| \iint_{T_R} f(X_1+JS)\,ds\,dt$$

Élément de référence : cas des quadrangles



$F_i : T_R \longrightarrow T_i$

$(s,t) \longmapsto F_i(s,t) = (x,y)$

$$F_i(s,t) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 st \\ y = b_1 + b_2 s + b_3 t + b_4 st \end{cases}$$

Pour determiner $a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^t$ et $b = [b_1, b_2, b_3, b_4]^t$

On résoud : $Ma = X$ et $Mb = Y$ où :

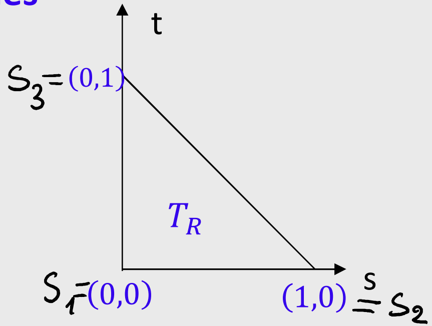
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Moyennant Maple :

$$a = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 + x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_1 - x_4 \\ -x_2 + x_3 - x_1 + x_4 \\ -x_2 + x_3 + x_1 - x_4 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} y_2 + y_3 + y_1 + y_4 \\ y_2 + y_3 - y_1 - y_4 \\ -y_2 + y_3 - y_1 + y_4 \\ -y_2 + y_3 + y_1 - y_4 \end{bmatrix}$$

Fonctions de forme dans l'élément de référence

→ Cas des triangles



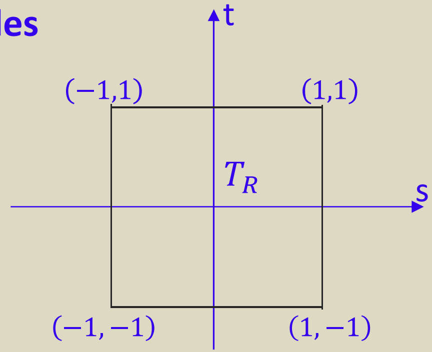
Les fonctions de formes dans T_R : $\hat{\varphi}_1 , \hat{\varphi}_2 ; \hat{\varphi}_3$

$\hat{\varphi}_1(S_1)=1$	$\hat{\varphi}_2(S_2)=1$	$\hat{\varphi}_3(S_3)=1$
$\hat{\varphi}_1(S_i)=0 \quad i\neq 1$	$\hat{\varphi}_2(S_i)=0 \quad i\neq 2$	$\hat{\varphi}_3(S_i)=0 \quad i\neq 3$

Moyennant "page 14" :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\varphi}_1(s,t) = -s-t+1 \\ \hat{\varphi}_2(s,t) = s \\ \hat{\varphi}_3(s,t) = t \end{cases}$$

→ Cas des quadrangles



Les fonctions de formes dans T_R : $\hat{\varphi}_1 ; \hat{\varphi}_2 ; \hat{\varphi}_3 ; \hat{\varphi}_4$

Moyennant page 17 :

$$\begin{array}{cccc} \hat{\varphi}_1 & \hat{\varphi}_2 & \hat{\varphi}_3 & \hat{\varphi}_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\hat{\varphi}_1(s,t) = \frac{1}{4}(-s-t+st+1) \qquad \hat{\varphi}_2(s,t) = \frac{1}{4}(s-t-st+1)$$

$$\hat{\varphi}_3(s,t) = \frac{1}{4}(s+t+st+1) \qquad \hat{\varphi}_4(s,t) = \frac{1}{4}(-s+t-st+1)$$

Matrices élémentaires

Matrices élémentaires

La formule (*) donne :

1) Pour le second membre :

$$\int_{T_K} f(x,y)\,\varphi_i(x,y)\,dx\,dy = |J| \int_{T_R} \underbrace{g}_{f(x_1+Js)}(s,t)\,\hat{\varphi}_i(s,t)\,ds\,dt$$

2) Pour le calcul de la matrice élémentaire, on doit évaluer :

$$\int_{T_K} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i(s,t)}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i(s,t)}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i(s,t)}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial \hat{\varphi}_i(s,t)}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla\varphi_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix}}_{J_{F_K^{-1}} = (J_{F_K})^{-1}} \nabla\hat{\varphi}_i$$

$$\Rightarrow \nabla\varphi_i = (J_{F_K})^{-1}\,\nabla\hat{\varphi}_i = J^{-1}\,\nabla\hat{\varphi}_i$$

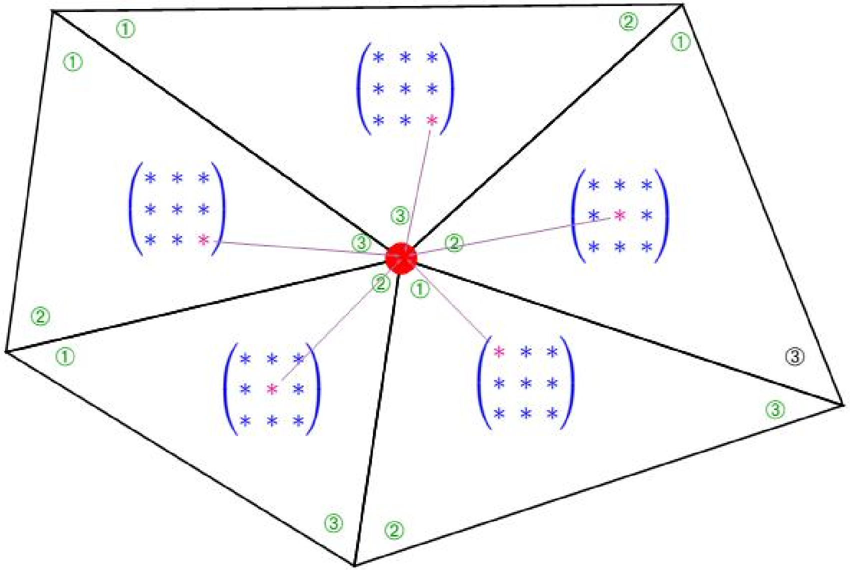
$$\Rightarrow \int_{T_K} \nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j = |J| \int_{T_R} \left(J^{-1}\nabla\hat{\varphi}_i\right)\cdot\left(J^{-1}\nabla\hat{\varphi}_j\right)$$

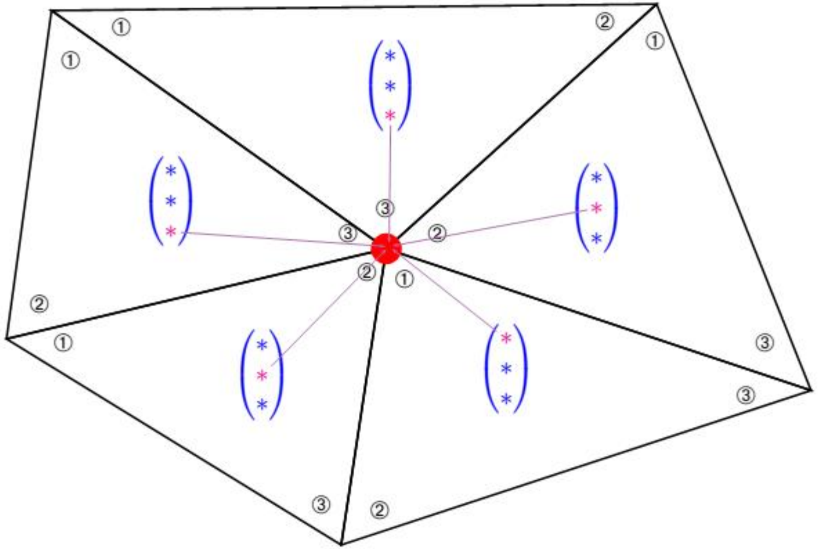
3

Technique d'assemblage

Séance de TP

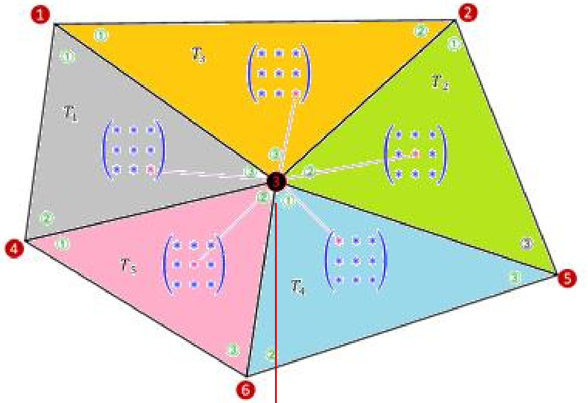
Assemblage





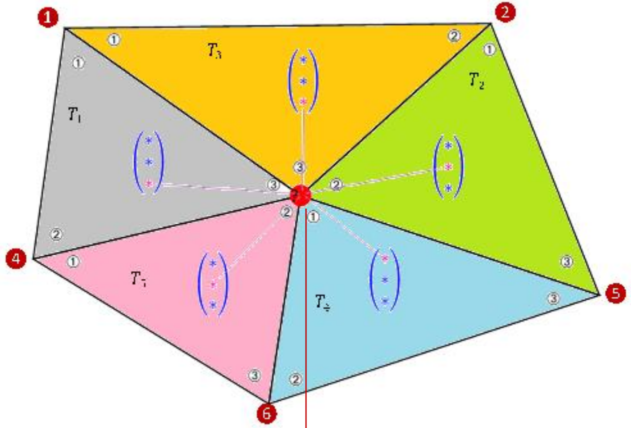
Assemblage

Matrice globale



$$K = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} ** & * & ** & * & 0 & 0 \\ * & ** & ** & 0 & * & 0 \\ ** & ** & ***** & ** & ** & ** \\ * & 0 & ** & ** & 0 & * \\ 0 & * & ** & 0 & ** & * \\ 0 & 0 & ** & * & * & ** \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Second membre global



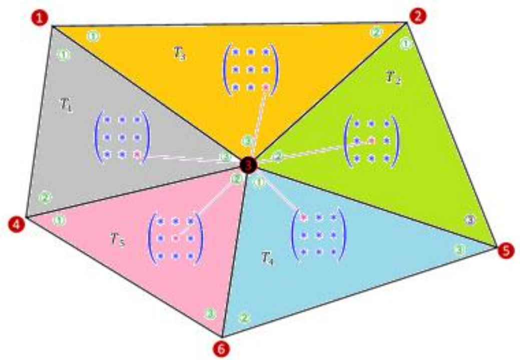
$$F = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} ** \\ ** \\ ***** \\ ** \\ ** \\ ** \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

4 Système linéaire

Séance de TP

Système linéaire

Système linéaire



$$\begin{pmatrix} \ast\ast & \ast & \ast\ast & \ast & 0 & 0 \\ \ast & \ast\ast & \ast\ast & 0 & \ast & 0 \\ \ast\ast & \ast\ast & \ast\ast\ast\ast\ast & \ast\ast & \ast\ast & \ast\ast \\ \ast & 0 & \ast\ast & \ast\ast & 0 & \ast \\ 0 & \ast & \ast\ast & 0 & \ast\ast & \ast \\ 0 & 0 & \ast\ast & \ast & \ast & \ast\ast \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ast\ast \\ \ast\ast \\ \ast\ast\ast\ast\ast \\ \ast\ast \\ \ast\ast \\ \ast\ast \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites

Nœud interne

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ast\ast\ast\ast\ast & \ast\ast & \ast\ast & \ast\ast \\ 0 & 0 & \ast\ast & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ast\ast & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ast\ast & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ast\ast\ast\ast\ast \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Nœud interne

Extensions

- L’extension du cours aux cas des éléments finis de degrés élevés est facile.
- La condition aux limites de type Neumann est une intégrale qui s’ajoute au second membre.