Éléments finis mixtes et Équations de Stokes

Anas RACHID
ENSAM-Casablanca
Université Hassan II--Casablanca

Position du problème

- **Le système de Stokes est un problème elliptique fondamental en mécanique des fluides**
- **Modèle mathématique pour écoulement stationnaire et lent d'un fluide visqueux incompressible**:

$$\begin{aligned} -\nu \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u} - \mathbf{grad}\, p = \mathbf{f} \quad & \text{in } \Omega\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad & \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Ω : computational domain $\subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$

$\mathbf{u}$: velocity field $\Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, **(Champ de vitesse)**

p : pressure, **(Pression)**

$\mathbf{f}$: force density, **(Densité de force)**

$\nu > 0$: kinematic viscosity, **(Viscosité cinématique)**

Position du problème

- **Le système de Stokes est un problème elliptique fondamental en mécanique des fluides**
- **Modèle mathématique pour écoulement stationnaire et lent d'un fluide visqueux incompressible**:

$$
\begin{aligned}
-\nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{grad}\, p = \mathbf{f} \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0} \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\mathbf{u} = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Ω : computational domain $\subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$

$\mathbf{u}$: velocity field $\Omega \mapsto \mathbb{R}^d$, **(Champ de vitesse)**

p : pressure, **(Pression)**

$\mathbf{f}$: force density, **(Densité de force)**

$\nu > 0$: kinematic viscosity, **(Viscosité cinématique)**

(La condition d'incompressibilité)

$$
\begin{aligned}
-\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} - \mathbf{grad}\, p = \mathbf{f} \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\mathbf{u} = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Position du problème

$$
grad(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}
$$

$$
grad(\overrightarrow{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}
$$

$$
div(\overrightarrow{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}
$$

$$
\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
$$

$$
\Delta(\overrightarrow{u}) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases}
$$

$$
div(A) = \begin{cases} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{cases}
$$

Formulation variationnelle mixte

$$
\begin{aligned}
-\nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{grad}\, p = \mathbf{f} \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad & \text{in } \Omega\,, \\
\mathbf{u} = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

- Pour construire la formulation variationnelle de ce problème, on introduit l'espace:

$$L^2_*(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \colon \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0\}$$

- **La formulation variationnelle mixte pour le problème de Stokes: Chercher $(\boldsymbol{u}, p) \in \left(\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}\right)^{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L_0^2(\Omega)}$ tels que:**

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^d \\
\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, q \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= 0 \qquad \forall q \in L^2_*(\Omega)\,.
\end{aligned}
$$

Mixte $\longleftrightarrow$ deux espaces différents utilisés $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ ***et*** $\boldsymbol{L_0^2(\Omega)}$

Formulation variationnelle mixte

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \; + \; \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \; &= \; \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^d \\ \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u} \, q \, \mathrm{d}\mathbf{x} \; &= \; 0 \qquad \forall q \in L_*^2(\Omega) \; . \end{aligned}$$

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x & \partial v_1/\partial y \\ \partial v_2/\partial x & \partial v_2/\partial y \end{pmatrix}$$

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} B_{ij},$$

$$\operatorname{div} A = \begin{pmatrix} \partial A_{11}/\partial x + \partial A_{12}/\partial y \\ \partial A_{21}/\partial x + \partial A_{22}/\partial y \end{pmatrix}.$$

Formulation variationnelle mixte
Cadre Général

- **La formulation variationnelle mixte pour le problème de Stokes: Chercher** $(\boldsymbol{u}, p) \in \left(\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}\right)^{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{L_0^2(\Omega)}$ **tels que:**

$$\begin{array}{llll} \int_\Omega \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot p\, \mathrm{d}\mathbf{x} & = & \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} & \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^d \\ \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, q\, \mathrm{d}\mathbf{x} & = & 0 & \forall q \in L_*^2(\Omega)\ . \end{array}$$

- Espace de Hilber, V, Q,
- Formes bilinéaires $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$, $b : V \times Q \mapsto \mathbb{R}$,
- Formes linéaires $f : V \mapsto \mathbb{R}$, $g : Q \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} \mathbf{u} \in V \\ p \in Q \end{array} \ : \ \begin{array}{llll} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) & = & f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V\ , \\ b(\mathbf{u}, q) & = & g(q) & \forall q \in Q\ . \end{array}$$

Formulation variationnelle mixte
Cadre Général

Theorem *If the bilinear forms a, b are continuous, and satisfy*

- *the inf-sup condition*

$$\exists\beta > 0: \quad \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta\,\|q\|_Q \quad \forall q \in Q\ ,$$

- *and the ellipticity on the kernel*

$$\exists\alpha > 0: \quad a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha\,\|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathsf{B}) := \{\mathbf{w} \in V\colon b(\mathbf{w},q) = 0\ \forall q \in Q\}\ ,$$

then for any r.h.s. f, g ($\boxed{6.2.1}$) has a unique solution $(\mathbf{u},p) \in V \times Q$, which satisfies

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{f(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} + \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{C_A}{\alpha}\right) \sup_{q\in Q} \frac{g(q)}{\|q\|_Q}\ ,$$

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\left(\sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{f(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} + C_A\,\|\mathbf{u}\|_V\right)\ .$$

Formulation variationnelle mixte
Cadre Général

Theorem *If the bilinear forms a, b are continuous, and satisfy*

- *the inf-sup condition*

$$\exists \beta > 0: \quad \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q \,,$$

- *and the ellipticity on the kernel*

$$\exists \alpha > 0: \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathsf{B}) := \{\mathbf{w} \in V \colon b(\mathbf{w}, q) = 0 \; \forall q \in Q\} \,,$$

then for any r.h.s. f, g (6.2.1) has a unique solution $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$, which satisfies

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{f(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} + \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{C_A}{\alpha}\right) \sup_{q\in Q} \frac{g(q)}{\|q\|_Q} \,,$$

$$\|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\left(\sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{f(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} + C_A \|\mathbf{u}\|_V\right) \,.$$

- R.Temam, Navier Stokes Equations, third ed., Theory Numer. Anal., North Holland, Amsterdam, 1983.

Formulation Mixte discrète

- **La méthode de Galerkin:**

$$\begin{array}{l} V \to V_N \subset V,\, N := \dim V_N < \infty \\ Q \to Q_N \subset Q,\, M := \dim Q_N < \infty \end{array} \quad + \quad \text{bases}$$

- Chercher une solution approchée $\Rightarrow$ Remplacer $(V \times Q)$ par $V_h \times Q_h$

Trouver $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_h : \nabla v_h - \int_\Omega p_h \mathrm{div}\ v_h &= \int_\Omega f.v_h, \quad \forall v_h \in V_h \\ \int_\Omega q_h \mathrm{div}\ u_h &= 0, \quad \forall\ q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

- **Formulation mixte discrète**

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_N \in V_N \\ p_N \in Q_N \end{array} : \quad \begin{array}{ll} \mathsf{a}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) + \mathsf{b}(\mathbf{v}_N, p_N) = f(\mathbf{v}_N) & \forall \mathbf{v}_N \in V_N\,, \\ \mathsf{b}(\mathbf{u}_N, q_N) = g(q_N) & \forall q_N \in Q_N\,. \end{array}$$

Formulation Mixte discrète

- **La méthode de Galerkin:**

$$\begin{aligned} V &\to V_N \subset V,\ N := \dim V_N < \infty \\ Q &\to Q_N \subset Q,\ M := \dim Q_N < \infty \end{aligned} \quad + \quad \text{bases}$$

- **Formulation mixte discrete**

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_N \in V_N \\ p_N \in Q_N \end{array} : \left\{ \begin{array}{lcll} \mathsf{a}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) + \mathsf{b}(\mathbf{v}_N, p_N) &=& f(\mathbf{v}_N) & \forall \mathbf{v}_N \in V_N\,, \\ \mathsf{b}(\mathbf{u}_N, q_N) &=& g(q_N) & \forall q_N \in Q_N\,. \end{array} \right.$$

- **Système linéaire de *N+M* équations**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i \\ p_N = \sum_{i=1}^{M} p_i \psi_i \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mu} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} u_1 \\ | \\ u_N \end{bmatrix} \qquad \vec{\pi} = \begin{bmatrix} p_1 \\ | \\ p_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N,N},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N.M}$$

Formulation Mixte discrete

Theorem 2 (Babuška-Brezzi theory). *Let the assumption of Thm. 1 be satisfied and assume the Babuška-Brezzi conditions*

$$\exists \beta_N > 0 : \quad \sup_{\mathbf{v}_N \in V_N} \frac{b(\mathbf{v}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_V} \geq \beta_N \|q_N\|_Q \quad \forall q_N \in Q_N , \qquad \text{(LBB1)}$$

$$\exists \alpha_N > 0 : \quad a(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_N) \geq \alpha_N \|\mathbf{v}_N\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v}_N \in \mathcal{N}(\mathsf{B}_N) , \qquad \text{(LBB2)}$$

are satisfied, where

$$\mathcal{N}(\mathsf{B}_N) := \{\mathbf{v}_N \in V_N : \ \mathsf{b}(\mathbf{v}_N, q_N) = 0 \ \forall q_N \in Q_N\} .$$

Let $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ *and* $(\mathbf{u}_N, p_N) \in V_N \times Q_N$ *the unique solutions*
Then

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_V + \|p - q_N\|_Q \leq C(C_A, C_B, \alpha_N, \beta_N)\{ \inf_{\mathbf{v}_N \in V_N} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_V + \inf_{q_N \in Q_N} \|p - q_N\|_Q \} .$$

Moreover, if $\mathcal{N}(\mathsf{B}_N) \subset \mathcal{N}(\mathsf{B})$, *then*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_V \leq C(C_A, C_B, \alpha_N, \beta_N) \inf_{\mathbf{v}_N \in V_N} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_V .$$

Le choix des Éléments finis: **Stabilité**

- Le Choix de $(V_h \times Q_h)$ est conditionné par
    - **LBB1**
    - **LBB2**

- Un schema E.F. est dit **stable** si le choix des paramètres α_N et β_N est indépendant Des paramètres de discrétisation.

- **Troisième condition**

Le choix des Éléments finis: **Contre-exemple**

Si $(V_h \times Q_h)$ ne vérifie pas la condition **Inf-sup** $\Rightarrow (V_h \times Q_h)$ est **instable**

Concrètement :

$(V_h, Q_h) = (P_1, P_0)$ conforme (c-à-d $V_h \subset V$))

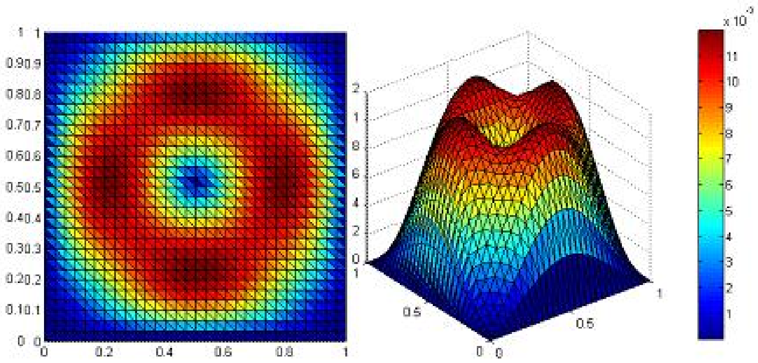

FIGURE: Vitesse stable

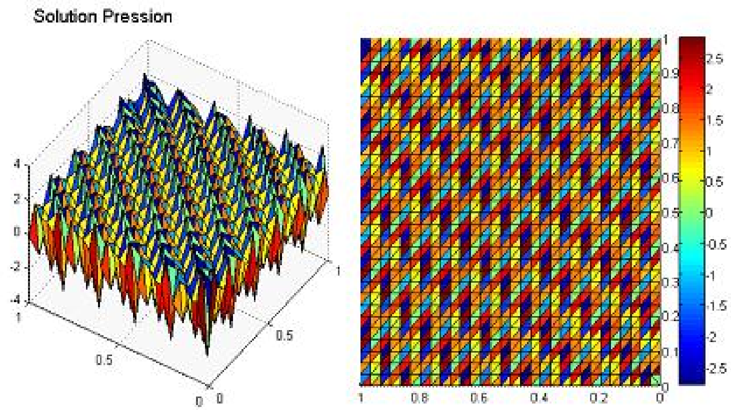

FIGURE: Pression instable

Le choix des Éléments finis:
Le choix

L‘ élément finis

Stable

- **Les élements finis nonconforme**
- **Taylor hood P2/P1**
- **Mini element**
- **..etc**

instable

- **Pk/Pk**
- **P1/P0**
- **Qk/Qk**
- **…etc**

Stabilisation

Éléments finis instables
Stabilisation

Sauts de pression : D.J. Silvester, Stabilised vs stable mixed finite element methods for incompressible flow, Numerical Analysis Report No.307, 1997,

Gradient de pression : D.J. Silvester, Stabilised vs stable mixed finite element methods for incompressible flow, Numerical Analysis Report No.307, 1997,

Pénalisation : E. Burman, M. Fernandez, and P. Hansbo, Edge Stabilization for the Incompressible Navier-Stokes Equations : A Continuous Interior Penalty Finite Element Method, Tech. Report RR-5349, INRIA, Le Chesnay, France, 2004.,

$$\delta \Sigma_K h_K^2 (\nabla p_h - f, \nabla q_h)_K$$

$$\epsilon(p_\epsilon, q_\epsilon)/\nu$$

Éléments finis instables
Stabilisation

$\Rightarrow$ Introduire un terme G (stabilisant)définie comme suit :

$$G(p_h, q_h) = p_i^T(M_k - M_1)q_j = p_i^T M_k q_j - p_i^T M_1 q_j$$

où

- $M_{ij}^k = \int_\Omega \phi_i \phi_j$ calculée en utilisant l'intégration de Gauss d'ordre k
- $p_h = \sum_{i=0}^{N-1} p_i \phi_i$ où $p_i = p_h(x_i)$ $\forall p_h \in M_h$, i, $j = 0, 1, \ldots$,N-1

✓ ne nécessite pas des approximations pour les dérivées

✓ et elle conduit toujours à un problème symétrique.

✓ entièrement locale (au niveau de l'élément)

✓ indépendante de tout paramètre.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mu} \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix}$$

Éléments finis instables
Travail à faire: Programmation

- Travailler dans une cavité carrée ([0,1]x[0,1], par exemple),
- Approcher le couple **vitesse/pression (u,p)** solution de l'équation

  de Stokes moyennant les éléments finis $\boldsymbol{P_1/P_1}$
- Remarquer l'instabilité de la pression.
- Introduire le terme stabilisant **G.**
- Commentaire