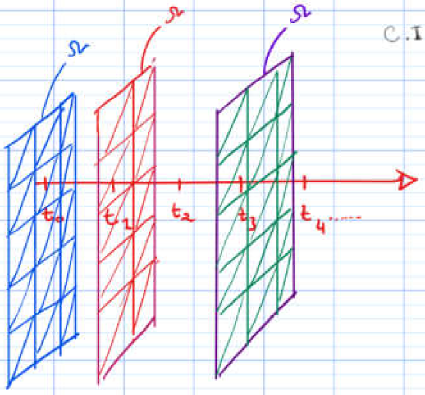
Problème dynamique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t) - \Delta u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t) & \vec{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^N,\ t>0 \quad (1) \\ u(\vec{x},t)=0 & \vec{x}\in\partial\Omega,\ t>0. \quad (2) \\ u(\vec{x},t=0) = u^0(\vec{x}) & \vec{x}\in\Omega \quad (3) \end{cases}$$

(E.D.P) C.B C.I



(Hyp) : On suppose que le domaine Ω ne dépend pas du temps

① Maillage temps :

Soit h_t ou Δt le pas temps ; $t_{n+1}-t_n = h_t$.

Donc : $\forall n>0$, l'équation (1) devient :

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t_n) - \Delta u(\vec{x},t_n) = f(\vec{x},t_n) \quad , \forall \vec{x}\in\Omega, \forall n>0.$$

pour approcher $\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t_n)$, on a deux possibilités :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t_n) \simeq \frac{u(\vec{x},t_{n+1}) - u(\vec{x},t_n)}{h_t} \quad \text{(schéma explicite).}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t_n) \simeq \frac{u(\vec{x},t_n) - u(\vec{x},t_{n-1})}{h_t} \quad \text{(schéma implicite)}$$

On choisit, par exemple, le schéma explicite et on utilise la notation suivante : $u(\vec{x},t_n) = u^n(\vec{x})$. Donc :

$$(1) \Rightarrow \frac{u^{n+1}(\vec{x}) - u^n(\vec{x})}{h_t} - \Delta u^n(\vec{x}) = f^n(\vec{x}) \quad ; \forall \vec{x}\in\Omega \ ; \forall n>0.$$

$$\Rightarrow u^{n+1}(\vec{x}) - u^n(\vec{x}) - h_t\Delta u^n(\vec{x}) = h_t f^n(\vec{x}), \ \forall \vec{x}\in\Omega, \forall n>0.$$

Par la suite, le problème (1)-(3) devient :

$$\begin{cases} u^{n+1}(\vec{x}) - u^n(\vec{x}) - h_t\Delta u^n(\vec{x}) = h_t f^n(\vec{x}), & \forall \vec{x}\in\Omega, \forall n>0. \quad (4) \\ u^n(x) = 0 \quad , & \forall x\in\partial\Omega, \forall n>0. \quad (5) \\ u^0(x) = u_0(x) \ ; & \forall x\in\Omega. \quad (6) \end{cases}$$

C.B C.I

② Formulation variationnelle :

Soit $v:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction teste et telle que $v(\vec{x})=0$, $\forall \vec{x}\in\partial\Omega$. On a :

$$\int_\Omega u^{n+1}(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} - \int_\Omega u^n(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} - h_t\int_\Omega \Delta u^n(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} = h_t\int_\Omega f^n(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} \quad , \forall n>0.$$

La formule de Green $\Rightarrow$ $-\int_\Omega \Delta u^n(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_\Omega \nabla u^n(\vec{x})\cdot\nabla v(\vec{x})\,d\vec{x} - \int_{\partial\Omega}(\nabla u^n(\vec{x})\cdot\vec{n})\,\underbrace{v(\vec{x})}_{0}\,d\vec{x} = \int_\Omega \nabla u^n(\vec{x})\cdot\nabla v(\vec{x})$.

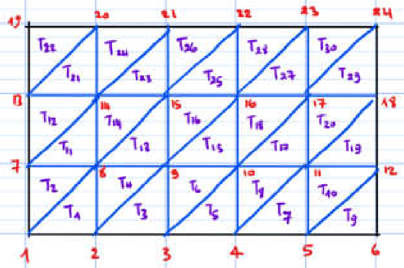
D'où,

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \int_\Omega u^{n+1}(\vec{x})\,v(\vec{x})\,dx = \int_\Omega u^n(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} - h_t\int_\Omega \nabla u^n(\vec{x})\cdot\nabla v(\vec{x})\,dx + h_t\int_\Omega f^n(\vec{x})\,v(\vec{x})\,d\vec{x}, & \forall n>0. \\ u^0(x) = u_0(x), \quad \forall x\in\Omega. \end{cases}$$

③ Maillage de l'espace (Eléments finis).

Soit $n>0$ et soit $\mathcal{T}_h = (T_k)_{1\le k\le N_T}$ un maillage de Ω par des éléments triangulaires qu'on note T_k, N_T est le nombre des éléments.

Soit N_n le nombre des noeuds de ce maillage.



Soit $n \geq 0$ et soit $u_h^n(x)$ une approximation de $u^n(x)$; $u^n(x) \simeq u_h^n(x) \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{N_n}) \Rightarrow u_h^n(x) = \sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \varphi_i(x)$

où $(u_i^n)_{i=1}^{N_n}$ sont les coordonnées de u_h^n suivant la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_n})$ et où $\varphi_i \in \mathbb{P}_1$, $\forall i$.

4 Formulation discrète (Éléments finis).

Pour cela, on prend : $(*) \begin{cases} u_h^n(x) = \sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \varphi_i(x). \\ v(x) = \varphi_j(x) \quad 1 \leq j \leq N_n. \end{cases}$. Le système (8) et le choix $(*)$ donnent :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N_n} u_i^{n+1} \varphi_i(\vec{x})\right) \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \varphi_i(\vec{x})\right) \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} - h_t \int_\Omega \nabla\left(\sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \varphi_i(x)\right) \cdot \nabla(\varphi_j(x))\, d\vec{x} + h_t \int_\Omega f^n(\vec{x})\, \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} \quad 1 \leq j \leq N_n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{N_n} u_i^{n+1} \int_\Omega \varphi_i(\vec{x}) \varphi_j(x)\, d\vec{x} = \sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \int_\Omega \varphi_i(\vec{x}) \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} - h_t \sum_{i=1}^{N_n} u_i^n \int_\Omega \nabla \varphi_i(\vec{x}) \cdot \nabla \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} + h_t \int_\Omega f^n(\vec{x}) \varphi_j(\vec{x})\, d\vec{x} \quad 1 \leq j \leq N_n$$

5 Formulation matricielle (Éléments finis).

On pose :

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_n}^n \end{pmatrix} ; \quad M = \left(\int_\Omega \varphi_i \varphi_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq N_n \\ 1 \leq j \leq N_n}} ; \quad K = \left(\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j\right)_{\substack{1 \leq i \leq N_n \\ 1 \leq j \leq N_n}} ; \quad F = \begin{pmatrix} \int_\Omega f^n \varphi_1 \\ \vdots \\ \int_\Omega f^n \varphi_{N_n} \end{pmatrix}$$

Alors : (9) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} M U^{n+1} = M U^n - h_t K U^n + h_t F^n. \\ U^0 = (u_0(\vec{x}_1) ; u_0(\vec{x}_2) ; \dots u_0(\vec{x}_{N_n}))' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} U^{n+1} = M^{-1}(M - h_t K) U^n + h_t M^{-1} F^n. \\ U^0 \end{cases}$$