Approximations par éléments finis des problèmes dynamiques

Anas RACHID
ENSAM-Casablanca
Université Hassan II--Casablanca

Position du problème

Soit Ω un domaine borné de R^d

(Ω ou $\cancel{\Omega(t)}$)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - Lu = f & \text{in } \overbrace{(0,T)\times\Omega}^{Q_T} \\
Bu = g & \text{on } \underbrace{(0,T)\times\partial\Omega}_{\Sigma_T} \\
u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega
\end{cases}
$$

Problème Parabolique

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f & \text{in } (0,T)\times\Omega \\
Bu = g & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \\
u|_{t=0} = u_0(x,y) & \text{in } \Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x,y) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

Problème Hyperbolique

Position du problème

Soit Ω un domaine borné de R^d et $T > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } Q_T := (0,T) \times \Omega \\ Bu = g & \text{on } \Sigma_T := (0,T) \times \partial\Omega \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{on } \Omega \quad , \end{cases}$$

Où $f = f(t,x), g = g(t,x)\ et\ \ u_0 = u_0(x)$ sont des fonctions données

On note :

$$L^2(0,T;V) := \left\{ u : (0,T) \to V \,|\, u \text{ is measurable and } \int_0^T ||u(t)||_1^2\, dt < \infty \right\}$$

avec $\quad H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$

Formulation faible

Soit Ω un domaine borné de R^d et $T > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } Q_T := (0,T) \times \Omega \\ Bu = g & \text{on } \Sigma_T := (0,T) \times \partial\Omega \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{on } \Omega \quad , \end{cases}$$

Où $f = f(t,x), g = g(t,x)\ et\ u_0 = u_0(x)$ sont des fonctions données

La formulation faible de ce type de problème est comme suit:
pour $f \in L^2(Q_T)\ \ et\ \ u_0 \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in L^2(0,T,V) \cap L^2\big([0,T], L^2(\Omega)\big)$ tq:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v) & \forall\ v \in V \\ u(0) = u_0 \quad , \end{cases}$$

Où $V = H_0^1(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

Formulation faible

Soit $t \in]0,T]$ (fixe) $\Longrightarrow$

et soit v fct. test

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f\right) \times v \Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v - k\underbrace{\int_\Omega \Delta u\, v}_{k\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - k\int_{\partial\Omega} \cancel{(\nabla u \cdot \vec{n})\, v}} = \int_\Omega f v \quad , \forall v \in \bar{V}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u \cdot v$$

$v = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\int_\Omega}_{\text{par def}} u(x,t)\, v(x)\, dx + k\int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} M(u(t)) + k\, N(u(t)) = F(t)}$$

Formulation faible

La formulation fiable de ce type de problème est comme suit:
pour $f \in L^2(Q_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in L^2(0, T, V) \cap C\big([0,T], L^2(\Omega)\big)$ tq:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) & \forall\, v \in V \\ u(0) = u_0 & , \end{cases}$$

Où $V = H_0^1(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

- Le problème variationnelle admet une unique solution si $a(.,.)$ est continue…
- Pour démontrer l'existence et l'unicité de cette solution, nous avons deux techniques:
    1. Feado – Galerkin
    2. Semi-groupes

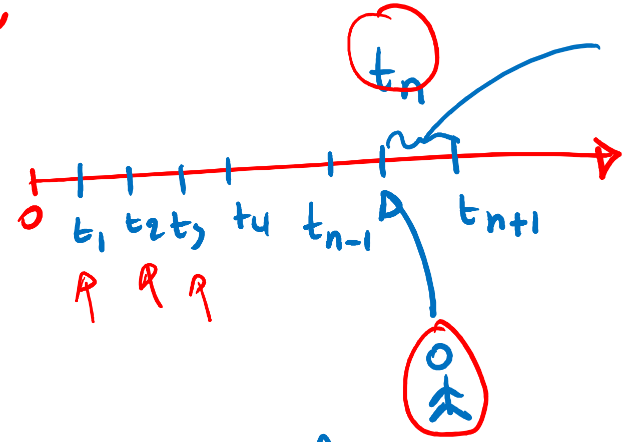
$V \supseteq V_h$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u = f \quad (1)$$

Δt

$$\boxed{t_i = i\,\Delta t}$$

(1) Diff. finies $\equiv$ Temps



$$\frac{\partial u(t_n)}{\partial t} \simeq \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}$$

$\forall n : 0 < n \leq ?$

$X = (x, y)$

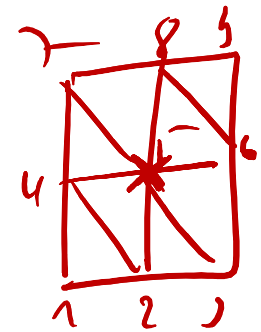
$$(1) \iff \frac{\partial u(x,y,t_n)}{\partial t} - k\Delta u(x,y,t_n) = f(x,y,t_n)$$

$$\frac{u_n(X) - u_{n-1}(X)}{\Delta t} - k\Delta u(X,t_n) = f(x,y,t_n)$$

$$u_n(X) = u_{n-1}(X) + k\Delta t\,\Delta u(X,t_n) + \Delta t\, f(X,t_n)$$

For $n = 1 \ldots N_f$

End



$N_n = 9$

$$* \int_\Omega u_n v = \int_\Omega u_{n-1} v - k\Delta t \int_\Omega \nabla u_n \nabla v + \Delta t \int_\Omega f_n v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

E.F

$$u_n = \sum \underbrace{u_n(X_i)}_{=\,u_n^i} \varphi_i(x,y) \quad \Big| \quad v = \varphi_j \quad 1 \leq i \leq N_n \quad \Leftarrow \quad V_n^{(1)} = \mathrm{Vect}(\varphi_i)$$

For $n = 1, \dots, N_T$

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N_n} u_n^i \varphi_i\Big)\varphi_j = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{N_n} u_{n-1}^i \varphi_i\Big)\varphi_j - k\Delta t \sum_{i=1}^{N_n} u_n^i \int_\Omega (\nabla\varphi_i)(\nabla\varphi_j) + \Delta t \int_\Omega f_n \varphi_j$$

$1 \leq j \leq N_n$

$1 \leq i \leq N_n$

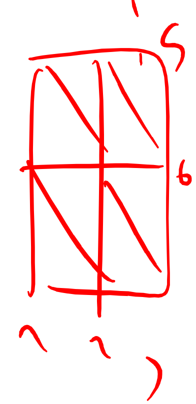
$$MU_n = MU_{n-1} - k\Delta t\, KU_n + \Delta t F_n$$

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(M + k\Delta t K)}_{A} U_n = MU_{n-1} + \Delta F_n$$

$$\boxed{U_n = A^{-1} M U_{n-1} + \Delta t A^{-1} F_n}$$

$$\begin{bmatrix} \int f_n \varphi_1 \\ f_n \varphi_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$



u_1, u_2, u_3, u_4

Fin

End

Problème approché:
Approximation Semi-discrétisée

Première étape:

Discretiser uniquement l'espace, ce qui donne un système différentiel dont la solution $u_h(t)$ est une approximation de la solution exacte pour tout $t \in [0, T]$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) \\ \qquad\qquad = (f(t), v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h \quad , \quad t \in (0, T) \\ u_h(0) = u_{0,h} \end{cases}$$

$V_h = Vect(\varphi_1, \cdots \varphi_N)$ où les φ_i ne dépendent pas temps.

Si:

$$\left.\begin{array}{l} u_h(t) = \sum_j \xi_j(t)\varphi_j, \\ u_{0,h} = \sum_j \xi_{0,j}\varphi_j, \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} M\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\xi}(t) + A\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \quad , \end{cases}$$

Problème approché:
Full-discrete approximation

Deuxièm étape:
Discretiser le temps. moyennant la méthode des différences finies. Pour cela on considère un maillage uniforme (pour la variable temps.) tel que:

$$t_n := n\Delta t \quad , \quad n = 0, 1, ..., \mathcal{N} \quad ,$$

Pas de temps

Partie entière $\left[\frac{T}{\Delta t}\right]$

On définit le $\theta - schema$ pour $0 \leq \theta \leq 1$ comme suit:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \psi(t, y(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \quad , \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(y^{n+1} - y^n) = \theta\, \psi(t_{n+1}, y^{n+1}) + (1-\theta)\, \psi(t_n, y^n)$$

Problème approché:
Full-discrete approximation

$$t_n := n\Delta t \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, \mathcal{N} \quad ,$$

On définit le $\theta - schema$ pour $0 \leq \theta \leq 1$ comme suit:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = \psi(t, y(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \quad , \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\Delta t}(y^{n+1} - y^n) = \theta\, \psi(t_{n+1}, y^{n+1}) + (1-\theta)\, \psi(t_n, y^n)$$

$\theta = 0$	Décentré avant	Forward Euler Scheme
$\theta = 1$	Décentré arrière	Backward Euler Scheme
$\theta = 1/2$	Crank-Nicolson Scheme	

Problème approché:
Full-discrete approximation

Trouver $u_h^n \in V_h$ telle que:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}(u_h^{n+1} - u_h^n, v_h) + a(\theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n, v_h) \\ \qquad\qquad = (\theta f(t_{n+1}) + (1-\theta) f(t_n), v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h \\ \\ u_h^0 = u_{0,h} \end{cases}$$

Pour $n = 0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1$

$$(M + \theta \Delta t A)\xi^{n+1} = \eta^n \quad ,$$

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j^{n+1} \varphi_j$$

η^n is known from the previous steps