

Introduction

Les hypothèses retenues dans les calculs par plasticité sont généralement :

- L'isotropie : on admet que le milieu est isotrope, c'est à dire que les propriétés sont identiques quelle que soit la direction considérée.

- Incompressibilité :

On néglige la variation de volume au cours de la déformation plastique :

$$\text{Trac } d\bar{\epsilon} = 0$$
$$d\epsilon_{xx} + d\epsilon_{yy} + d\epsilon_{zz} = 0$$

- Continuité :

On admet que les propriétés varient de façon continue d'un point à l'autre.

Les objectifs recherchés à travers une étude scientifique de la plasticité sont :

- la détermination des efforts à mettre en oeuvre.

- la prévision de la forme finale d'une pièce ou des défauts internes que peut présenter celle-ci.

- l'estimation des caractéristiques mécaniques en fonction de l'histoire des déformations et contraintes en chaque point d'une pièce.

Il est donné que les déformations plastiques sont généralement beaucoup plus importants dans les métaux et alliages que les déformations élastiques, celles-ci seront négligées. Les forces de masse et d'inertie ne sont pas prises en compte.

## Seuil de plasticité :

Il marque la frontière entre la zone d'élasticité et la zone de plasticité. La contrainte correspondant au seuil de plasticité est appelée contrainte d'écoulement :  $\sigma_0$ .

## Comportement plastique :

Dans les alliages métalliques, on observe généralement que la déformation plastique provoque :

- le durcissement de la matière (écrouissage)
- la diminution de la ductilité. En effet, la déformation possible avant rupture est réduite.

Le comportement plastique est irréversible. Contrairement au comportement élastique, il n'existe pas de relation de type "Loi de Hooke".

Connaissant la contrainte, on ne peut pas déterminer la déformation et réciproquement.

Connaissant l'accroissement de déformation, on ne peut pas déterminer l'accroissement de contrainte.

## Critères de plasticité :

L'étude du comportement plastique nous montre dans l'essai de traction, que le seuil de plasticité était atteint lorsque la contrainte exercée  $\sigma$  était égale à la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$ . En généralisant au cas tridimensionnel, on obtient une relation qui caractérise le critère de plasticité.

3

Le critère est représenté géométriquement par une surface dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  qui caractérise l'écoulement ;

Critère de Von Mises

\* expression en fonction des contraintes dans le cas général ;

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2\sigma_0^2 = 0$$

\* expression en fonction des contraintes principales ;

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

cette équation est représentée dans le repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  par un cylindre de révolution d'axe  $(1, 1, 1)$ .

\* Expression en contraintes planes ;  $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2$$

équation d'une ellipse orientée à  $45^\circ$  par rapport aux axes  $\sigma_1, \sigma_2$  ;

\* Expression en déformations planes :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

équation représentant 2 droites parallèles orientées à  $45^\circ$  par rapport aux axes  $\sigma_1, \sigma_2$ .

\* Expression en fonction du tenseur déviateur ; (seul responsable de la déformation plastique)

Cas général :  $\Delta_{xx}^2 + \Delta_{yy}^2 + \Delta_{zz}^2 + 2\Delta_{xy}^2 + 2\Delta_{yz}^2 + 2\Delta_{zx}^2 = \frac{2\sigma_0^2}{3}$

Cas particuliers :  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \frac{2\sigma_0^2}{3}$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_m = \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\ \Delta_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_m = \sigma_{yy} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \\ \Delta_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_m = \sigma_{zz} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \end{aligned} \right\}$$

### Loi d'écoulement: (loi de Levy-Mises)

Contrairement au comportement élastique d'un matériau, en plasticité;

- à un état de contrainte donné correspondent plusieurs états de déformation
- à un incrément de déformation donné, correspondent plusieurs états de contraintes.

La déformation actuelle dépend de la manière dont a été obtenu l'état de contrainte actuel (trajet de chargement) et la relation entre  $\bar{\epsilon}$  (tenseur des déformations plastiques) et  $\bar{\sigma}$  (tenseur des contraintes) passe par les relations entre les incréments de contraintes, et les déformations qui en résultent.

Ceci nous a conduit à la relation:

$$d\bar{\epsilon} = \bar{s} \cdot d\lambda$$

$\bar{s}$ : le tenseur dérivateur des contraintes (seul responsable de la déformation plastique:  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$  avec  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $\delta_{ii} = 1$ ;  $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Trace } \bar{\sigma}$ )

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{s_{ij}} = \text{constante}$$

$$\bar{s} = \bar{\epsilon} - \epsilon_m \bar{\delta}$$

$\bar{\delta}$  matrice identité

C'est la loi de Levy-Mises:

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$$

$$d\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{11} & d\epsilon_{21} & d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} & d\epsilon_{22} & d\epsilon_{32} \\ d\epsilon_{13} & d\epsilon_{23} & d\epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\epsilon_{11}}{s_{11}} = \frac{d\epsilon_{22}}{s_{22}} = \frac{d\epsilon_{33}}{s_{33}} = \dots = \frac{d\epsilon_{ij}}{s_{ij}} = \text{constante}$$

On constate que la déformation est nettement plus influencée par le dérivateur des contraintes, que par l'accroissement de contrainte

Equivalence entre différents modes de déformation

Il est utile d'établir une équivalence entre les trois champs et le procédé de formage, voir entre les trois modes de déformation (amplitude de la déformation) - déformation généralisée (niveau de la déformation) - contrainte généralisée (niveau de la déformation)

La déformation généralisée élastique est une fonction des axes de déformation élastiques (avec  $d_1, d_2$  et  $d_3$ )

$$\bar{d}_3 = \frac{1}{3} \sqrt{2[(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2]}$$

La contrainte généralisée est une fonction de axes principaux de la contrainte (avec  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ )

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Principe de Hill ou Principe du travail maximal

Le principe n'énonce de la façon suivante:  $\bar{\sigma}$  est le tenseur réel de déformation plastique,  $\bar{d}_3$  est le tenseur fictif (plasticiquement admissible, c'est à dire réel) fait le cas de la même déformation plastique que celle:  $d_3$  un tenseur fictif (plasticité:  $f(\bar{\sigma}, \bar{d}_3) = 0$ ), Hill affirme que le travail fourni par le tenseur réel est supérieur au travail fourni par tout tenseur fictif  $\bar{\sigma}^*$  en l'occurrence:  $W_{\text{réel}} \geq W_{\sigma^*}$

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} d_{ij} \geq \sum_{i,j} \sigma_{ij}^* d_{ij}^*$$

# CHAPITRE XIV

## LA MÉTHODE DES TRANCHES

P. DAIGNIERES  
*Ecole des Mines de Paris*  
*Centre de Mise en Forme des Matériaux*  
60, Bd Saint-Michel  
75006 Paris

### Résumé

Dans ce chapitre sont exposés les principes de la "méthode des tranches" qui consiste à écrire l'équilibre élémentaire du matériau dans certains procédés. Quoique discutable d'un point de vue théorique, la méthode a un grand sens physique.

L'essentiel du chapitre est consacré à l'application de la méthode au laminage de tôles (à froid et à chaud).

La dernière partie traite sous forme d'exercices de problèmes de forgeage et laminage à plusieurs cages.

### Summary

This paper gives the principles of the "slice-method" which consists in assuming the equilibrium of material "slices" in a certain kind of forming processes. Though theoretically unsatisfying this method has a great physical significance.

The main part of the paper is constituted by an application of this method to hot and cold sheet rolling.

Some problems (concerning plane strainforging and multipass rolling) are tackled in a later part as exercises.

#### XIV.1 – Principe de la méthode.

##### XIV.1.1 – Origine physique :

Dans un certain nombre de procédés de mise en forme (laminage, tréfilage, forgeage d'un lopin plat) il existe un axe géométriquement et mécaniquement privilégié : il s'agit d'un élément de symétrie, et l'état des contraintes est essentiellement fonction de la position sur cet axe (autrement dit, si cet axe est Ox, on constate :

$$\frac{\partial(\sigma)}{\partial x} \gg \frac{\partial(\sigma)}{\partial y}, \frac{\partial(\sigma)}{\partial x} \gg \frac{\partial(\sigma)}{\partial z}$$

En outre dans la majeure partie du produit mis en forme, la direction de cet axe est proche de la direction principale. Ces procédés se signalent en outre souvent par l'importance de l'énergie dissipée par frottement (de l'ordre de 50 % de l'énergie de déformation plastique).

##### XIV.1.2 – Schématisation :

Elle consiste à faire les hypothèses suivantes :

– les directions principales de contrainte restent les mêmes dans tout le produit et l'axe Ox en est une ("rester les mêmes" peut aussi bien s'entendre en coordonnées cylindriques),

– les contraintes ne sont fonction que de l'abscisse sur Ox,

– le frottement se traduit seulement par une cission au contact produit-outil (en toute rigueur la présence d'une cission de frottement est incompatible avec les deux premières hypothèses).

Ces hypothèses conduisent à découper la matière en "tranches" perpendiculaires à Ox et d'épaisseur infinitésimale  $dx$ . Au niveau de l'écoulement elles se traduisent par :

- "Une tranche reste une tranche"
- "La déformation est homogène"

# CHAPITRE XIV

## LA MÉTHODE DES TRANCHES

P. DAIGNIERES  
*Ecole des Mines de Paris*  
*Centre de Mise en Forme des Matériaux*  
60, Bd Saint-Michel  
75006 Paris

### Résumé

Dans ce chapitre sont exposés les principes de la "méthode des tranches" qui consiste à écrire l'équilibre élémentaire du matériau dans certains procédés. Quoique discutable d'un point de vue théorique, la méthode a un grand sens physique.

L'essentiel du chapitre est consacré à l'application de la méthode au laminage de tôles (à froid et à chaud).

La dernière partie traite sous forme d'exercices de problèmes de forgeage et laminage à plusieurs cages.

### Summary

This paper gives the principles of the "slice-method" which consists in assuming the equilibrium of material "slices" in a certain kind of forming processes. Though theoretically unsatisfying this method has a great physical significance.

The main part of the paper is constituted by an application of this method to hot and cold sheet rolling.

Some problems (concerning plane strainforging and multipass rolling) are tackled in a later part as exercises.

#### XIV.1 – Principe de la méthode.

##### XIV.1.1 – Origine physique :

Dans un certain nombre de procédés de mise en forme (laminage, tréfilage, forgeage d'un lopin plat) il existe un axe géométriquement et mécaniquement privilégié : il s'agit d'un élément de symétrie, et l'état des contraintes est essentiellement fonction de la position sur cet axe (autrement dit, si cet axe est Ox, on constate :

$$\frac{\partial(\sigma)}{\partial x} \gg \frac{\partial(\sigma)}{\partial y}, \frac{\partial(\sigma)}{\partial x} \gg \frac{\partial(\sigma)}{\partial z}$$

En outre dans la majeure partie du produit mis en forme, la direction de cet axe est proche de la direction principale. Ces procédés se signalent en outre souvent par l'importance de l'énergie dissipée par frottement (de l'ordre de 50 % de l'énergie de déformation plastique).

##### XIV.1.2 – Schématisation :

Elle consiste à faire les hypothèses suivantes :

– les directions principales de contrainte restent les mêmes dans tout le produit et l'axe Ox en est une ("rester les mêmes" peut aussi bien s'entendre en coordonnées cylindriques),

– les contraintes ne sont fonction que de l'abscisse sur Ox,

– le frottement se traduit seulement par une cission au contact produit-outil (en toute rigueur la présence d'une cission de frottement est incompatible avec les deux premières hypothèses).

Ces hypothèses conduisent à découper la matière en "tranches" perpendiculaires à Ox et d'épaisseur infinitésimale  $dx$ . Au niveau de l'écoulement elles se traduisent par :

- "Une tranche reste une tranche"
- "La déformation est homogène"

Ainsi en bipoinçonnement plat (déformation plane), ABCD représente une tranche.

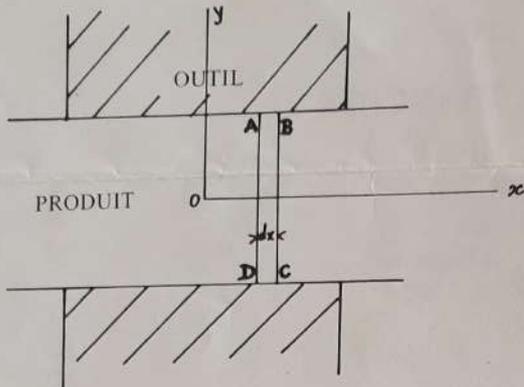


Fig. XIV.1. -

Pour tout élément de matière centré sur la face AD nous avons par hypothèse :

$$S_{xx} = Cte$$

$$S_{xy} = 0 \text{ (Ox et Oy directions principales)}$$

$$S_{yy} = Cte$$

Ecrivons alors la loi d'écoulement :

$$\frac{\epsilon_{xx}}{S_{xx}} = \frac{\epsilon_{xy}}{S_{xy}} = \frac{\epsilon_{yy}}{S_{yy}} = Cte$$

Il reste :

$$\epsilon_{xx} = Cte \quad (1)$$

$$\epsilon_{xy} = 0 \quad (2)$$

$$\epsilon_{yy} = Cte \quad (3)$$

(1) exprime que la face AD se transforme en A'D' parallèle ; comme on peut faire le même raisonnement sur BC on voit que ABCD reste une tranche après déformation.

Enfin les 3 relations ensemble expriment que la déformation est homogène.

#### XIV.1.3 - Principe de calcul :

Il est décrit par l'organigramme de la figure XIV.2.

#### XIV.1.4 - Critique de la méthode :

Les hypothèses faites sont fondamentalement contradictoires ; au point de vue pratique la méthode sera satisfaisante quand ces hypothèses sont vérifiées dans un domaine important : c'est-à-dire quand la zone "perturbée" par la cission de frottement est réduite par rapport à la zone "centrale" où les directions principales de contraintes sont constantes.

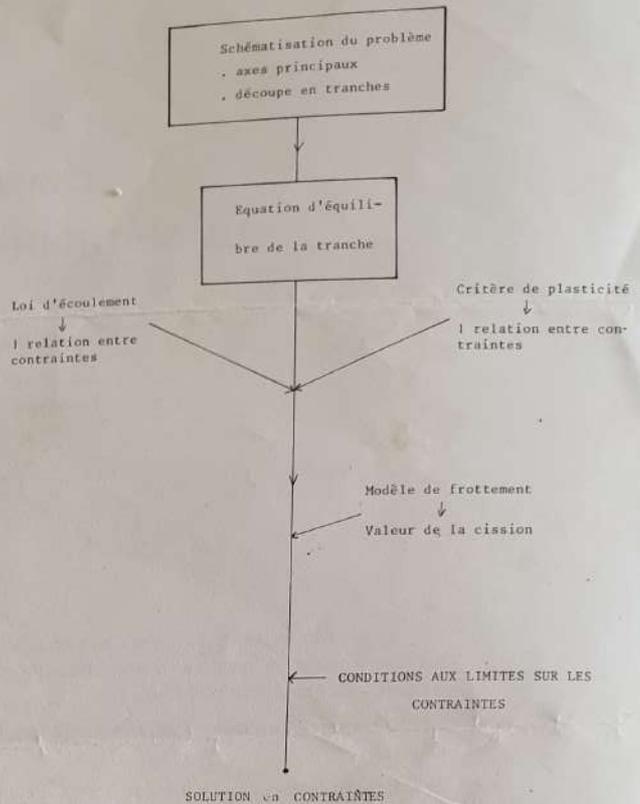


Fig. XIV.2. -

## XIV.2 - Application au laminage des tôles.

### XIV.2.1 - Nature physique du procédé :

C'est un fait d'expérience qu'il n'y a pratiquement pas d'élargissement en laminage de produits plats ; il s'agit donc d'un état de déformation plane.

Les notations utilisées sont indiquées sur la figure XIV.4 ( $u_1, u_2$  sont des vitesses linéaires,  $\omega$  la vitesse de rotation des cylindres ; avec les orientations choisies  $u_1, u_2$  et  $\omega$  sont négatives).

Utiliser la méthode des tranches avec Ox comme axe privilégié et Ox Oy comme directions principales, revient simplement à considérer que dans l'emprise la matière est formée d'éprouvettes de compression juxtaposées.

Dans un laminage normal il n'y a pas patinage, donc  $R|\omega| < |u_2|$  ; il y a en outre entraînement du produit, donc  $|u_1| < R|\omega|$ . Il y aura donc dans l'emprise un plan vertical et un seul où la matière aura une vitesse horizontale  $u$  telle que  $u = R\omega$  (l'unicité et l'existence proviennent de ce que  $hu = Cte$  et que  $h$  est continue). Il s'agit du "plan neutre" : en amont le frottement est moteur, en aval il est résistant.

### XIV.2.2 - Calcul :

#### XIV.2.2.1 - Equilibre d'une tranche :

Une tranche est en équilibre sous les actions suivantes

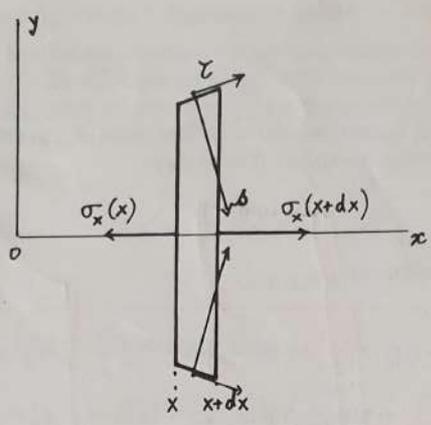


Fig. XIV.3. — Equilibre d'une tranche.

(nous indiquons sur la figure XIV.3 l'orientation choisie pour mesurer les contraintes, pas forcément l'orientation qu'elles ont en réalité) :

- frottement caractérisé par une cission  $\tau$  s'exerçant sur les bords de la tranche,
- réaction normale du cylindre caractérisé par une contrainte  $s$  s'exerçant également sur les bords de la tranche,
- actions des tranches voisines caractérisées par les contraintes normales aux faces verticales  $\sigma_x(x)$  et  $\sigma_x(x+dx)$  (orientées dans le sens  $> 0$  pour les tractions).

Conventionnellement nous prendrons  $\tau$  toujours positive. Or nous savons que la cission a des signes différents de part et d'autre du plan neutre ; c'est pourquoi nous introduirons dans les calculs la notation  $\pm$  ou  $\mp$  où le signe du haut se rapporte à la sortie, celui du bas à l'entrée (équations dédoublées).

L'équation d'équilibre d'une tranche (dans le sens horizontal) s'écrit alors :

$$h(x+dx)\sigma_x(x+dx) - h(x)\sigma_x(x) \pm \tau dx + s \operatorname{tg} \varphi dx = 0 \quad (1)$$

Comme  $dx = R \cos \varphi d\varphi$  cette équation peut se réduire :

$$\frac{d(h\sigma_x)}{d\varphi} \pm \tau R \cos \varphi + s R \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

Faisons apparaître  $\sigma_y$  : d'après les hypothèses de la méthode des tranches, il est constant dans toute la tranche, en particulier sur son bord, donc :

$$\sigma_y = -s \pm \tau \operatorname{tg} \varphi \quad (3)$$

(2) peut alors se récrire :

$$\frac{d(h\sigma_x)}{d\varphi} \pm \frac{\tau R}{\cos \varphi} - \sigma_y R \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

XIV.2.2.2 - Relation entre contraintes :

En déformation plane, le critère de Von Misès et la loi d'écoulement fournissent la relation :  $|\sigma_x - \sigma_y| = \sigma'_0$  qui ici s'écrit :  $\sigma_x - \sigma_y = \sigma'_0$  (car au moment où débute la plastification, c'est-à-dire à l'entrée dans l'emprise, en l'absence de contre traction  $\sigma_x = 0$  et  $\sigma_y < 0$ ).

En se rappelant que  $h = h_2 + R(1 - \cos \varphi)$  (donc  $\frac{dh}{d\varphi} = R \sin \varphi$ ), on peut alors exprimer (4) sous la forme :

$$h \frac{d\sigma_x}{d\varphi} = \mp \frac{R\tau}{\cos \varphi} - R \sigma'_0 \sin \varphi \quad (5)$$

Cette équation où l'on voit apparaître dans la variation de  $\sigma_x$  un terme de frottement  $\left(\mp \frac{R\tau}{\cos \varphi}\right)$  et un terme de "coin"  $(-R \sigma'_0 \sin \varphi)$ , a été établie sans simplifications autres que celles inhérentes aux hypothèses de la méthode. Nous allons maintenant indiquer comment la résoudre dans les deux cas pratiques.

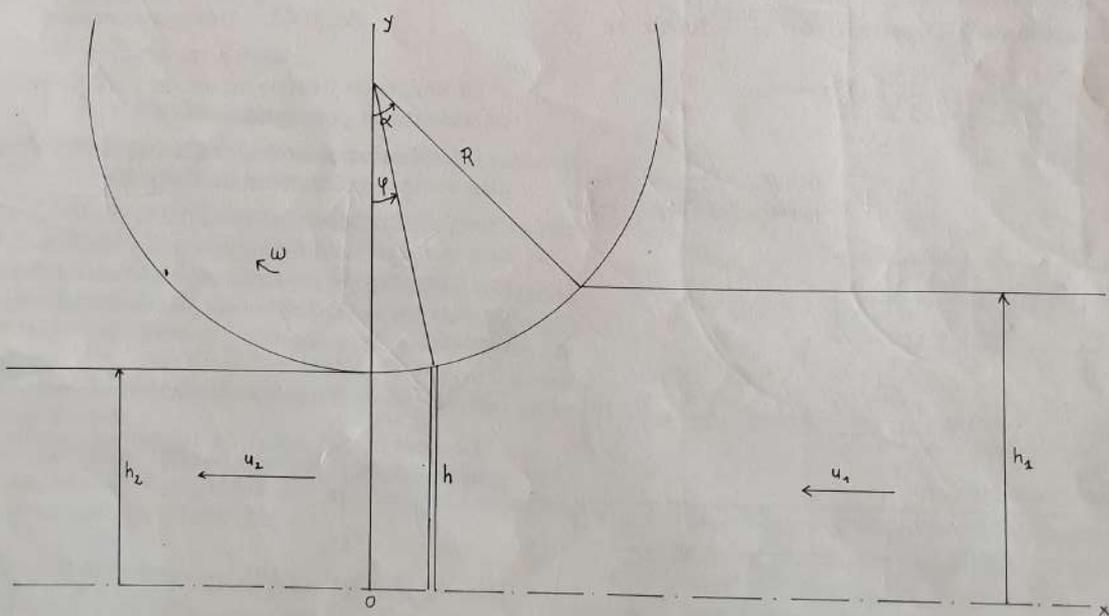


Fig. XIV.4

#### XIV.2.2.3 – Laminage à chaud :

##### XIV.2.2.3.1. – Caractéristiques :

En laminage à chaud la réalité est bien prise en compte par les hypothèses suivantes :

– il n'y a pas d'écroissage (en fait l'écroissage est limité et on peut utiliser une valeur moyenne de  $\sigma_0$  dans toute l'emprise),

– le frottement est du type couche limite avec  $\bar{m} = 1$  (autrement dit  $\tau = \frac{\sigma'_0}{2}$ ).

##### XIV.2.2.3.2 – Résolution de l'équation (5) :

Introduisons  $\tau = \frac{\sigma'_0}{2}$  dans (5) et faisons "l'approximation des petits angles" ; il vient :

$$\frac{d\sigma_x}{d\varphi} = -\sigma'_0 \left[ \frac{\pm 1}{2 \left( \frac{h_2}{R} + \frac{\varphi^2}{2} \right)} + \frac{\varphi}{R \left( \frac{h_2}{R} + \frac{\varphi^2}{2} \right)} \right] \quad (5')$$

qui s'intègre en :

$$\sigma_x = -\sigma'_0 \left( \ln \left( \frac{h_2}{R} + \frac{\varphi^2}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \varphi + C \right) \quad (6)$$

C est une constante (en fait il y a deux constantes  $C_1$  à l'entrée,  $C_2$  à la sortie) déterminée par les conditions à la limite. Exemple : si on n'impose pas de traction  $\sigma_x = 0$  en sortie, d'où  $C_2 = \ln \frac{R}{h_2}$ .

##### XIV.2.2.3.3 – Détermination du plan neutre :

Le plan neutre est caractérisé par l'angle neutre  $\varphi_n$  qui vérifie à la fois les deux équations (6). Si nous appelons  $T_1$  et  $T_2$  respectivement les contretraction et traction infligées à la tôle avec la notation :

$$t'_i = \frac{T_i}{2Lh_i\sigma'_0}$$

( $t'_i$  nb adimensionnel) l'équation (6) se dédouble en :

$$\sigma_x \text{ sortie} = -\sigma'_0 \left[ \ln \left( 1 + \frac{R\varphi^2}{2h_2} \right) + \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \varphi - t'_2 \right]$$

$$\sigma_x \text{ entrée} = -\sigma'_0 \left[ \ln \frac{1 + \frac{R}{2h_2} \varphi^2}{1 + \frac{R}{2h_2} \alpha^2} - \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \left( \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \varphi - \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \alpha \right) - t'_1 \right]$$

$\varphi_n$  est donc déterminé par :

$$\ln \frac{h_1}{h_2} + 2 \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \varphi_n - \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \alpha + t'_1 - t'_2 = 0 \quad (7)$$

#### XIV.2.2.3.4 – Effort de laminage. Colline de frottement :

L'effort de laminage est la résultante des actions  $LRsd\varphi$ . Vu les géométries rencontrées en laminage de tôles, on ne commet pratiquement aucune erreur en remplaçant  $s$  par  $|\sigma_y|$  et en faisant la somme arithmétique et non vectorielle des actions en question. Il vient donc :

$$F = LR \int_0^\alpha |\sigma_y| d\varphi \quad (8)$$

(qui s'intègre en :

$$\frac{F}{LR\sigma'_0} = \left( \varphi_n + \frac{1}{2} \right) \ln (1 + \rho^2 \alpha^2) + \left( \frac{2}{\rho} - \rho \alpha \right) \text{Arc tg} \rho \alpha + 2\rho \varphi_n \text{Arc tg} \rho \varphi_n - \ln (1 + \rho^2 \varphi_n^2) - \alpha (1 + t'_1) - \varphi_n (t'_2 - t'_1) \quad (9)$$

en désignant par  $\rho : \sqrt{\frac{R}{2h_2}}$

L'équation (8) permet également d'interpréter l'effort de laminage comme l'aire de la "colline de frottement" dessinée ci-après.

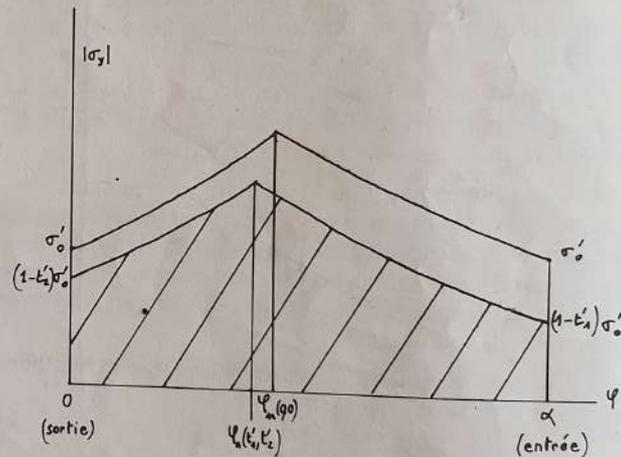


Fig. XIV.5. – Colline de frottement.

La colline de frottement est un outil très utile qui met en évidence les points suivants :

– la pression croît des extrémités de l'emprise jusqu'au plan neutre où elle atteint un maximum.

– l'effet d'une traction ou d'une contre-traction se traduit par une simple translation des versants de la colline (car l'équation (5) est inchangée). Dans les deux cas l'aire de la colline de frottement, donc l'effort de laminage, diminue.

##### XIV.2.2.3.5 – Couple de laminage :

Le couple par unité de largeur est la résultante des couples élémentaires :

$$dC = R^2 \tau d\varphi$$

Dans le cas qui nous occupe  $\tau = \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  selon la position par rapport au plan neutre.

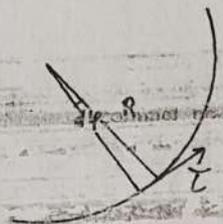


Fig. XIV.6. -

Le couple total est donc :

$$C = 2LR^2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \int_{\varphi_n}^{\alpha} d\varphi - \int_0^{\varphi_n} d\varphi \right)$$

$$C = 2LR^2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (\alpha - 2\varphi_n) \quad (10)$$

On voit que le couple est très sensible à la position du plan neutre. Si nous nous reportons à la colline de frottement, on voit qu'une traction déplace le point neutre vers l'entrée ( $\varphi_n$ ) alors qu'une contre-traction a l'effet inverse. En l'absence de traction et contre-traction :  $\alpha - 2\varphi_n > 0$  ce qui traduit qu'il faut fournir de l'énergie pour laminier... Le point neutre est alors assez proche du milieu de l'arc du côté sortie.

On peut résumer l'action de traction ou contre-traction ainsi :

	Traction	Contre-traction
F	↘	↘
C	↘	↗

Par ailleurs on peut noter sur les expressions analytiques qu'une diminution du rayon des cylindres diminue le couple et l'effort de laminage. Cependant la résistance à la flexion des cylindres diminue avec leur taille d'où la nécessité de cylindres de soutien.

XIV.2.24 - Laminage à froid :

XIV.2.2.4.1 - Caractéristiques :

- A froid l'acier est fortement écrouissable ; la valeur de  $\sigma_0$  croît donc de l'entrée à la sortie.
- Le frottement est assez bien schématisé par un modèle de Coulomb :  $\tau = \mu s \sim \mu |\sigma_y|$
- La déformation élastique du cylindre (qui se traduit par son aplatissement, donc l'allongement de l'emprise) cesse d'être négligeable ; cela est dû d'une part au fait que le métal est plus dur (plus froid), d'autre part au fait que la prise de fer est plus faible (produit plus plat) qu'en laminage à chaud.

Ces conditions rendent la résolution de l'équation (5) plus difficile et nécessitent des approximations autres que dans le cas précédent.

XIV.2.2.4.2 - Résolution de l'équation (5) :

Cette fois nous allons résoudre en  $\sigma_y$  car la relation

entre  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  n'est plus directe ( $\sigma_0$  est variable). Avec les hypothèses sur le frottement, nous obtenons :

$$\frac{d}{d\varphi} h (\sigma_0 + \sigma_y) = \pm \mu \frac{\sigma_y R}{\cos \varphi} + \sigma_y R \sin \varphi \quad (11)$$

qui peut se transformer (car  $\frac{dh}{d\varphi} = R \sin \varphi$ ) en :

$$\frac{d\sigma_y}{d\varphi} = -\frac{d\sigma'_0}{d\varphi} - \frac{\sigma'_0}{h} \frac{dh}{d\varphi} \pm \mu \sigma_y \frac{R}{h} \frac{1}{\cos \varphi} \quad (11 \text{ bis})$$

On voit apparaître dans la variation de  $\sigma_y$ , un terme d'écrouissage ( $\frac{d\sigma'_0}{d\varphi}$ ) un terme de "convergent" ( $\frac{\sigma'_0}{h} \frac{dh}{d\varphi}$ ) et un terme de frottement ( $\mu \sigma_y \frac{R}{h} \frac{1}{\cos \varphi}$ ) qui expriment chacun un aspect du phénomène physique donnant naissance à la pression.

Dans l'équation (11 bis) il y a en fait 2 inconnues :  $\sigma_y$  et  $\sigma'_0$  ; on ne peut donc espérer en déduire que  $\frac{\sigma_y}{\sigma'_0}$ . On peut faire apparaître la dérivée logarithmique de ce rapport en transformant (11 bis) en :

$$\frac{1}{\sigma_y} \frac{d\sigma_y}{d\varphi} - \frac{1}{\sigma'_0} \frac{d\sigma'_0}{d\varphi} + \left( \frac{1}{\sigma'_0} \frac{d\sigma'_0}{d\varphi} + \frac{1}{\sigma_y} \frac{d\sigma'_0}{d\varphi} + \frac{\sigma'_0}{\sigma_y} \frac{1}{h} \frac{dh}{d\varphi} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\varphi} \right) = \frac{1}{h} \frac{dh}{d\varphi} \pm \mu \frac{R}{h} \frac{1}{\cos \varphi} \quad (12)$$

soit encore :

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_y} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma'_0} \right) + \left( 1 + \frac{\sigma'_0}{\sigma_y} \right) \frac{1}{h \sigma'_0} \frac{d(h \sigma'_0)}{d\varphi} = \frac{R}{h} \left( \sin \varphi \pm \frac{\mu}{\cos \varphi} \right) \quad (13)$$

Pour la résolution de cette équation on pratique l'approximation de Bland et Ford qui consiste à négliger le deuxième terme du membre de gauche devant le premier (cela provient du fait que la variation relative de  $\frac{\sigma_y}{\sigma'_0}$  est beaucoup plus importante que celle de  $h \sigma'_0$  produit de deux facteurs variant en sens inverse de moins de 50 % chacun).

L'approximation des petits angles permet alors d'écrire (13) sous la forme :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma'_0} \right) = R \frac{\varphi \pm \mu}{h_2 + R \frac{\varphi^2}{2}} \quad (14)$$

qui s'intègre en :

$$\frac{\sigma_y}{\sigma'_0} = -\frac{h}{R} C^2 e^{\pm \mu H(\varphi)} \quad (15)$$

avec

$$H(\varphi) = \sqrt{\frac{2R}{h_2}} \text{Arc tg} \sqrt{\frac{R}{2h_2}} \varphi \quad (16)$$

XIV.2.2.4.3 - Détermination du plan neutre :

Le plan neutre est caractérisé par l'angle  $\varphi_n$  vérifiant à la fois les deux équations (15) où les constantes  $C_1^2$  et  $C_2^1$  sont déterminées par les conditions à l'entrée et à la sortie.

Ainsi à la sortie  $H_2 = 0$  (car  $\varphi = 0$ ) et si on impose une traction  $T_2$ , la valeur de  $\sigma_y$ , notée  $\sigma_y^{(2)}$  sera

$$\frac{T_2}{2h_2 L} \sigma'_0 = t_2 - \sigma'_0.$$

$C_2^2$  est alors fourni par :

$$\frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_0^{(2)}} = \frac{t_2}{\sigma_0^{(2)}} - 1 = -C_2^2 \frac{h_2}{R}$$

$$\sigma_y \text{ sortie} = -\sigma'_0 \frac{h}{h_2} \left(1 - \frac{t_2}{\sigma_0^{(2)}}\right) e^{\mu H} \quad (17)$$

De même du côté entrée en imposant une contre-traction  $T_1$  ( $T_1 = 2h_1 L t_1$ ) on obtient :

$$\sigma_y \text{ entrée} = -\sigma'_0 \frac{h}{h_1} \left(1 - \frac{t_1}{\sigma_0^{(1)}}\right) e^{\mu(H_1 - H)} \quad (18)$$

Au neutre :  $\sigma_y$  sortie =  $\sigma_y$  entrée, soit :

$$\frac{1}{h_2} \left(1 - \frac{t_2}{\sigma_0^{(2)}}\right) e^{\mu H_n} = \frac{1}{h_1} \left(1 - \frac{t_1}{\sigma_0^{(1)}}\right) e^{\mu(H_1 - H_n)}$$

d'où :

$$H_n = \frac{H_1}{2} - \frac{1}{2\mu} \ln \left( \frac{h_1 \left(1 - \frac{t_2}{\sigma_0^{(2)}}\right)}{h_2 \left(1 - \frac{t_1}{\sigma_0^{(1)}}\right)} \right) \quad (19)$$

et

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2h_2}{R}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{h_2}{2R}} H_n \quad (20)$$

#### XIV.2.2.4.4 → Colline de frottement. Effort de laminage :

Toute comme en laminage à chaud on peut tracer une colline de frottement d'allure très voisine ; on note simplement que l'écroutissage se traduit par  $\sigma'_0$  (entrée)  $\neq$   $\sigma'_0$  (sortie) et que la courbure des versants de la colline est plus nette.

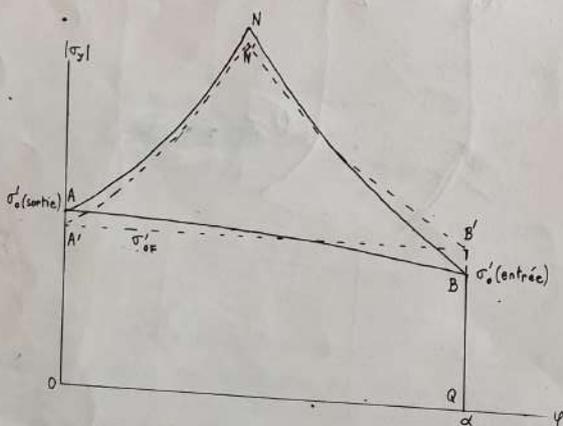


Fig. XIV.7. - Colline de frottement.

Ici encore l'aire de la colline de frottement correspond à l'effort de laminage : on peut distinguer deux parties : O A B Q représentant l'effort de résistance du matériau à la déformation, A B N représentant l'effort dû au frottement.

On peut penser que cette dernière aire est peu sensible à la distribution de contrainte d'écoulement dans l'emprise. Si donc on veut transformer l'expression de l'effort de laminage :

$$F = \int_0^\alpha \sigma_0(\varphi) f(\varphi) d\varphi \quad \text{en} \quad F = \sigma'_{0F} \int_0^\alpha f(\varphi) d\varphi$$

en introduisant une contrainte d'écoulement "équivalente" il est naturel de prendre :

$$\sigma'_{0F} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \sigma'_0(\varphi) d\varphi$$

Cela revient à remplacer la colline O A N B Q par O A' N' B' Q avec Aire (OABQ) = Aire (OA'B'Q).

Dans le cas où  $\sigma'_0$  est fonction linéaire de la réduction, on trouve :

$$\sigma'_{0F} = \frac{2}{3} \sigma'_0 \text{ (sortie)} + \frac{1}{3} \sigma'_0 \text{ (entrée)}$$

#### XIV.2.2.4.5 - Couple de laminage.

En appelant  $R_0$  le rayon initial des cylindres, R leur rayon déformé, l'expression du couple est :

$$C = R R_0 \int_0^\alpha |\sigma_y(\varphi)| \varphi d\varphi$$

c'est-à-dire le moment par rapport à l'axe vertical de l'aire sous la colline de frottement.

En faisant les mêmes hypothèses que précédemment (moment de l'aire ABN peu sensible à la variation de  $\sigma'_0$ ), on introduit  $\sigma'_{0c}$  défini par :

$$\sigma'_{0c} \int_0^\alpha \varphi d\varphi = \int_0^\alpha \sigma'_0(\varphi) \varphi d\varphi$$

↓  
moment de l'aire OABQ

Soit :

$$\sigma'_{0c} = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\alpha \sigma'_0(\varphi) \varphi d\varphi$$

Toujours dans le cas d'une loi linéaire on aboutit à :

$$\sigma'_{0c} = \frac{1}{2} (\sigma'_0 \text{ (entrée)} + \sigma'_0 \text{ (sortie)})$$

Remarque : l'influence d'une traction ou d'une contre-traction sur l'effort et le couple est tout à fait analogue à ce qu'on a observé en laminage à chaud.

#### XIV.2.2.4.6 - Correction de déformation des cylindres :

Sous l'effort de laminage les cylindres se déforment élastiquement. En approchant la colline de frottement par une ellipse la théorie de Hertz permet de calculer le rayon du cercle osculateur à la déformée du cylindre. Ce rayon est donné par la formule dite de Hitchcock :

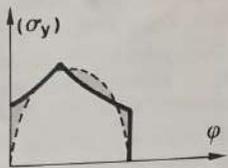


Fig. XIV.8. -

$$R = R_0 \left( 1 + \frac{F'}{c \Delta e} \right)$$

avec :  $R_0$  rayon non déformé,

$F'$  effort par unité de largeur de la tôle,

$\Delta e$  prise de fer ( $2(h_1 - h_2)$ )

$c$  constante élastique définie par  $\frac{\Pi E}{16(1-\nu^2)}$

( $E$  : module d'Young ;  $\nu$  : coef. de Poisson)

XIV.2.2.4.7 - Calcul par abaques :

Les expressions ci-dessus donnant couple et effort de laminage ont permis d'établir les abaques ci-contre (fig. XIV.9 et XIV.10) tracées pour  $\mu$  (coefficient de frottement) = 0,07.

Ces abaques s'utilisent en itérant pour tenir compte de l'aplatissement des cylindres ; ces itérations ont été représentées sur ces abaques dans le cas d'un laminage de caractéristiques :

$R_0 = 240 \text{ mm}$

$e_1 = 2 \text{ mm}$

$r = 0,5$

$\mu = 0,07$

$L = 1000 \text{ mm}$

$\sigma'_{0F} = 300 \text{ Nmm}^{-2}$   $\sigma'_{0c} = 200 \text{ Nmm}^2$

On trouve  $F = 4,84 \cdot 10^6 \text{ N}$   $R = 267 \text{ mm}$

$C = 7,62 \cdot 10^4 \text{ N} \times \text{m}$

XIV.2.3 - Réflexions sur la méthode :

La méthode des tranches fournit-elle une borne inférieure ? On pourrait le penser du fait que les hypothèses de base portent sur les contraintes ; mais nous avons vu que le "rajout" des conditions de frottement conduit à violer le critère, donc la méthode n'est pas une méthode de B.I.

Fournit-elle une borne supérieure ? Nous avons vu que les conditions sur les contraintes peuvent se traduire au niveau cinématique. Cependant les hypothèses mêmes de la méthode ne permettent pas de cisaillement entre tranches ; or l'écoulement imposé en laminage conduit à un cisaillement au moins dans le plan d'entrée (discontinuité verticale de vitesse) ; la méthode n'est pas une méthode de B.S.

En pratique, en laminage, la méthode fournit des résultats excellents dans le cas des tôles (cisaillement

moindre à l'entrée, corroyage important "forçant" la déformation homogène ?) mais au fur et à mesure qu'on remonte la ligne des produits laminés la sous estimation des paramètres mécaniques globaux ( $F, C$ ) croît régulièrement.

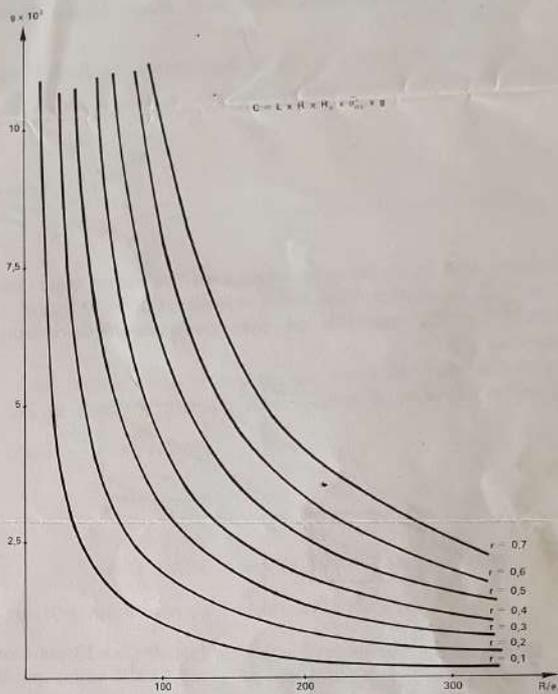


Fig. XIV.9

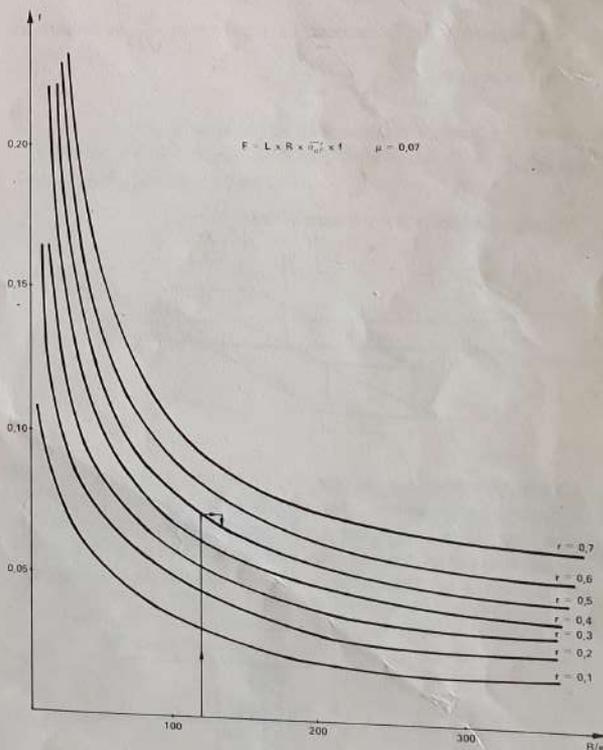


Fig. XIV.10

Bibliographie

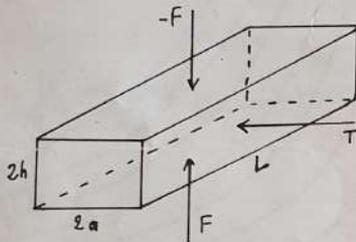
- [1] OROWAN E. - The calculation of Roll Pressure in Hot and Cold Flat Rolling, *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 1948, 150, 152.
- [2] SIMS B.B. - Calculation of Roll Force and Torque in Hot Rolling Mills. *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 1954, 168, 191-219.
- [3] BLAND & FORD. - The calculation of Roll Force

and Torque in cold strip Rolling with Tensions. *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 1948, 159, 144-153.

- [4] BAQUE P., DAIGNIERES P., HYAFIL J., de VATHAIRE M. - Modèles mécaniques du laminage (74.22) Séminaire CESSID 1973-1974, 133.
- [5] BAQUE P., FELDER E., HYAFIL J., D'ESCATHA Y. - Mise en forme des métaux. Calculs par la plasticité. Dunod.

EXERCICES

Entre deux tas de presse on écrase à sec très lentement un lopin d'Al (A5) de hauteur  $2h = 6$  mm de longueur  $2a = 10$  mm et de largeur  $L = 100$  mm (On est donc quasiment en déformation plane).

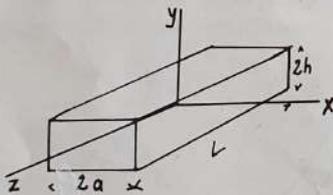


Simultanément on exerce sur la face latérale ( $2a \times L$ ) une force de compression  $T$  qui croît jusqu'à  $T_m = 5,2 \cdot 10^4$  N valeur qui déclenche le glissement du lopin. La force de compression correspondante est alors  $F_m = 2,3 \cdot 10^5$  N.

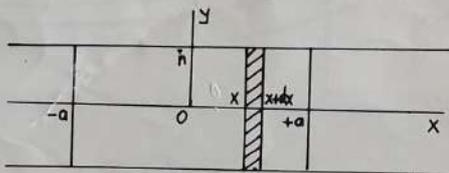
En supposant le frottement du type  $\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  en déduire les valeurs de  $m$  et  $\sigma_0$ .

Solution.

Prenons un repère  $O x y z$  ainsi défini :

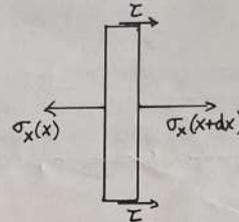


Nous sommes dans un cas de déformation plane avec donc  $Oz$  comme axe principal. Par ailleurs pour une large part du matériau  $Ox$  et  $Oy$  sont aussi à peu près directions principales. Enfin, les contraintes varient plus rapidement par rapport à  $x$  que par rapport à  $y$ . Cela nous conduit à adopter le découpage en tranches suivant :



La tranche est en équilibre sous les actions suivantes :

Du fait que nous sommes "à la limite"  $\tau$  est dirigé positivement sur tout le contact (pour s'opposer au glissement).



L'équation d'équilibre horizontal s'écrit :

$$2h L (\sigma_x(x + dx) - \sigma_x(x)) + 2\tau dx L = 0$$

soit :  $\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{\tau}{h}$  ; pour  $\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  :

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{m\sigma_0}{h\sqrt{3}} \tag{1}$$

qui s'intègre en :

$$\int_x^a d\sigma_x = -\int_x^a \frac{m\sigma_0}{h\sqrt{3}} dx$$

$$\sigma_x(x) = \sigma_x(a) + \frac{m\sigma_0}{h\sqrt{3}}(a - x)$$

Les conditions aux limites sont :  $\sigma_x(a) = -\frac{T_m}{2hL}$

et :  $\sigma_x(-a) = 0$  (il s'agit d'une surface libre)

Ce qui conduit à :

$$0 = -\frac{T_m}{2hL} + 2a \frac{m\sigma_0}{h\sqrt{3}}$$

soit :

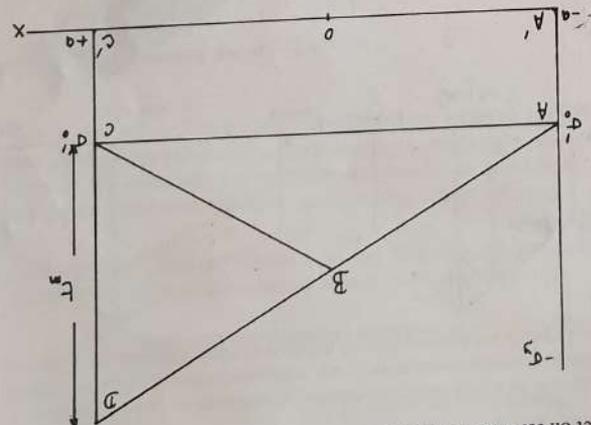
$$\frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}} = \frac{T_m}{4aL} \tag{2}$$

Par ailleurs le critère de Von Mises en déformation plane s'écrit :

$$|\sigma_y - \sigma_x| = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Ici on est dans le cas  $\sigma_x - \sigma_y = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$  (plus compressif selon  $Oy$ )

La force limite  $T_m$  qui provoque le glissement est caractérisée par le fait que les forces de frottement sont toutes dirigées dans le même sens, donc la colline de frottement n'a plus qu'un versant et on est donc dans le cas :



Ici l'effort du au frottement est représenté par l'aire de ACD qui est double de l'aire de ABC. Comme la pente de AD est toujours  $\frac{m \sigma_0'}{2h}$  on en déduit :

$$\frac{F}{m} = 2a\sigma_0' + aT_m$$

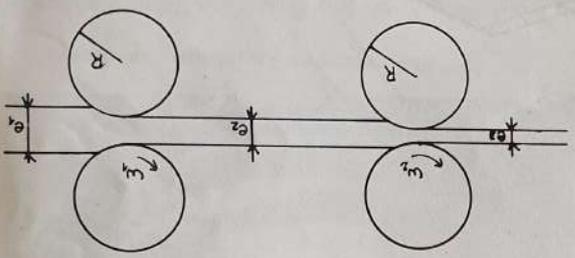
aire de  $A'DC'$  aire de  $ACC'A'$  aire de  $ADC$  qui n'est rien d'autre que l'équation (3). Par ailleurs

$$CD = T_m = m\sigma_0' \frac{h}{a}$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (2).

Exercice 2.

On considère 2 cages rigides d'un laminoir à chaud qui font passer une tôle de 2000 mm de large, de l'épaisseur  $e_1 = 8,3$  mm à  $e_2 = 5$  mm puis  $e_3 = 3$  mm.



Initialement les deux cages sont synchronisées (il n'y a pas de traction entre elles), sans traction ni contre-traction extérieures. On augmente alors la vitesse de rotation de la cage aval d'une quantité  $\Delta\omega_2$ .

Quel est le nouveau régime d'équilibre en l'absence de traction et contre-traction extérieures ? Quelle traction T apparaît entre les cages, comment se répartissent les efforts et les couples de laminage ?

(on prendra  $\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} = 10^8$  Pa

$R = 0,25$  m)

Donc  $\sigma_y(x) = -\frac{T_m}{2hL} + \frac{\sqrt{3}}{2h} m(a-x) - 2$  que selon Oxy

Or  $F_m = -L \int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) dx = \frac{h}{a} T_m + L \frac{\sqrt{3}}{2h} (-2m \frac{h}{a^2} + 4a)$

$$F_m = a \left( \frac{T_m}{h} + 4L \frac{\sqrt{3}}{2h} \right) \quad (3)$$

De (2) et (3) on tire :

$$F_m = a \left( \frac{T_m}{h} + 4L \frac{\sqrt{3}}{2h} \right)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2h} \left( \frac{F_m}{a} - \frac{T_m}{h} \right)$$

A.N.  $\sigma_0 = 4 \times 0,1 \left( \frac{2,3 \cdot 10^5}{5,10^{-3}} - \frac{5,2 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^{-3}} \right) = 1,62 \cdot 10^8$  Pa

$$m = \frac{5,2 \cdot 10^4}{20 \cdot 10^{-3} \times 0,1} \frac{1,62 \cdot 10^8}{1,732} = 0,28$$

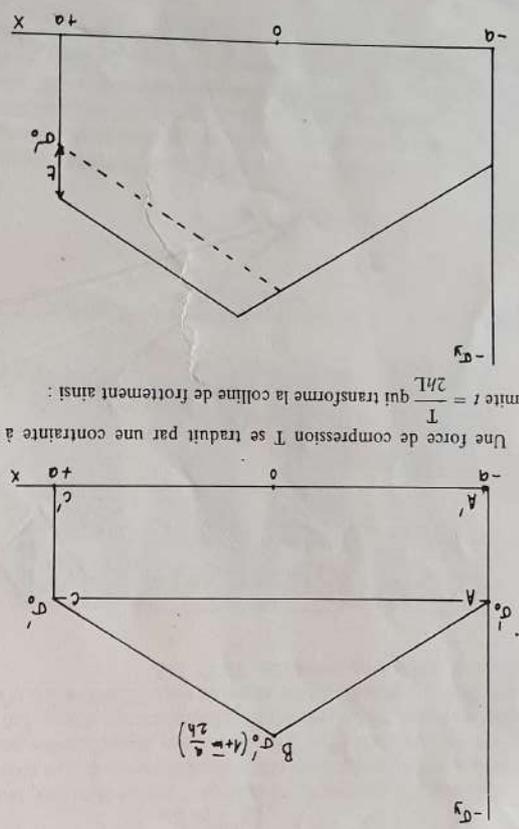
Colline de frottement :

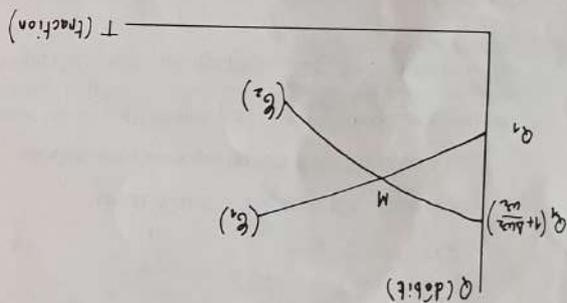
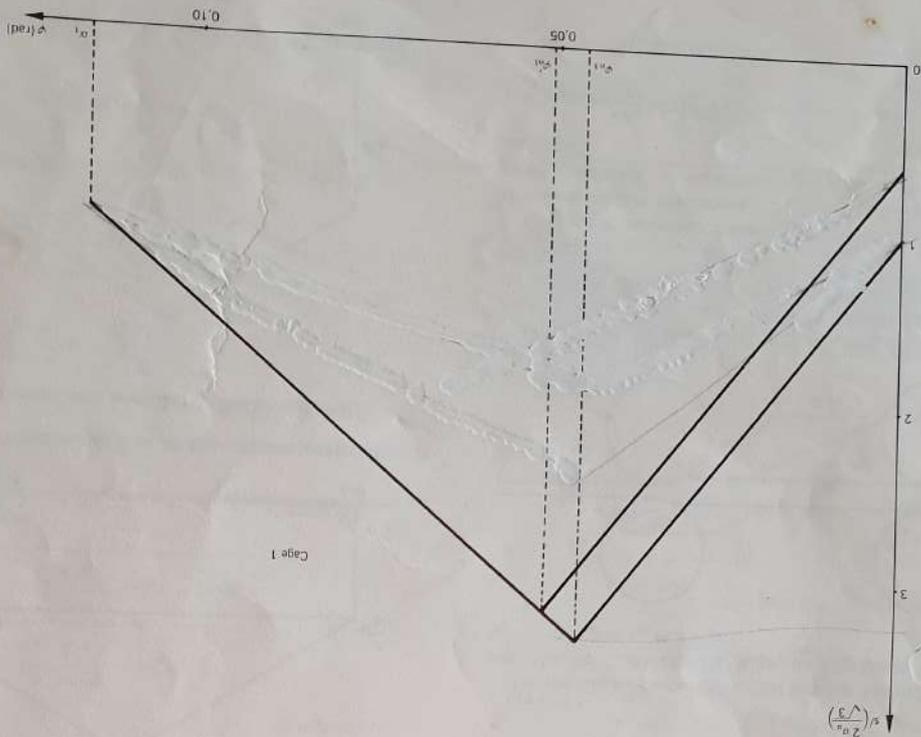
L'équation différentielle (1) est valable, quelle que soit la valeur de T. Par exemple pour  $T = 0$  on obtient la colline de frottement suivante :

L'aire de ABC représente l'effort du au frottement.

L'aire de  $AA'C'C$  représente l'effort de déformation proprement dit.

Une force de compression T se traduit par une contrainte à la limite  $t = \frac{2hL}{T}$  qui transforme la colline de frottement ainsi :

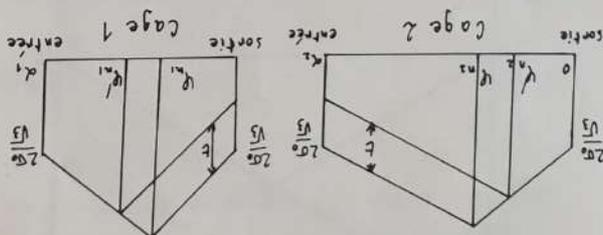




Ce qui peut se traduire graphiquement au niveau du débit :

et  $\phi_{n2} < \phi_{n1}$   
(nouvel angle neutre)

On voit immédiatement que  $\phi_{n1} > \phi_{n1}$



Augmenter  $\omega_2$  va modifier la position du point neutre de la cage 2 donc induire une contre-traction qui se retrouvant en traction sur la cage 1 va modifier aussi la position du point neutre sur la cage 1 :

Analyse physique :

Solution.

Plus la traction est grande plus  $\phi_{n1}$  remonte, le débit en 1 est donc fonction croissante de T.  
Plus la traction est grande plus  $\phi_{n2}$  descend, le débit en 2 est donc fonction décroissante de T.

Le point de fonctionnement M est donc à l'intersection de ces 2 courbes (ce qui traduit la conservation du débit).

Si on appelle  $e_{ni}$  l'épaisseur de la tôle au point neutre à la cage i le point M est défini par :

$$R\omega_1 e_{n1} = R(\omega_2 + \Delta\omega_2) e_{n2}$$

$$\text{soit } \frac{\omega_2 + \Delta\omega_2}{e_{n1}} = \frac{\omega_1}{e_{n2}}$$

(rapelons que  $e_{ni}$  s'obtient comme  $e_{t+1} + R\phi_{ni}^{(M)}$ )

Pour les cages étudiées les collines de frottement obtenues par méthode de tranches se caractérisent initialement par :

Cage n°	$\alpha$ (rad)	$\phi_n$ (rad)	$e_n$ (mm)
1	0,1155	0,0459	5,53
2	0,0895	0,0364	3,33

On a alors

$$\frac{\omega_2}{e_{n2}} = \frac{\omega_1}{e_{n1}} = 1,66$$

Pour obtenir  $e_{n1}$  et  $e_{n2}$ , donc  $\phi_{n1}$  et  $\phi_{n2}$ , et par lecture sur les collines la traction entre cages, il faut procéder par itération.

Le plus simple est de se fixer une valeur de la traction entre cages et de remonter au  $\Delta\omega_2$  correspondant.

Exemple : prenons une traction  $T = 4,10^5$  N ce qui correspond à une contrainte  $\frac{T}{Le_2} = 0,46 \sigma_0$

$$\left( = 0,40 \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \right)$$

15

TD: Filage des métaux - frottement plastique / 16.  
Bipoinçonnement plan - Naissance de chevrons

Lorsque l'angle de la filière est supérieur à une valeur critique  $\alpha_{cr}$ , le mode d'écoulement donnant l'énergie de déformation la plus faible est celui qui correspond à la formation d'une zone morte - d'angle  $\alpha_1$  égal à l'angle de filage optimum pour  $\bar{m} = 1$  - qui jouera le rôle de la filière (figure XXIV.13 et 14). Avitzur [2] a calculé les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_{cr}$  en fonction de  $R\%$  et de  $\bar{m}$  en supposant un écoulement convergent. L'angle critique est d'autant plus faible que le taux de réduction de section est plus faible et le coefficient de frottement plus grand (fig. XXIV.15).

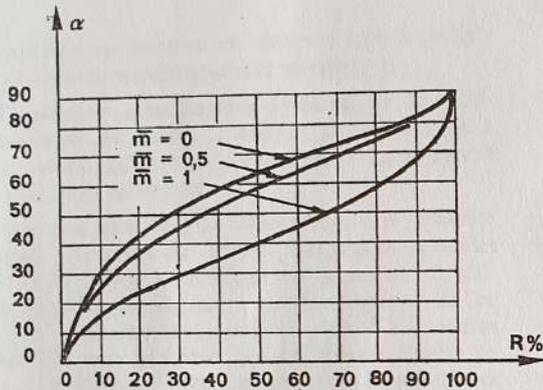


Fig. XXIV.15 - Angle critique de formation d'une zone morte en fonction de la réduction de section et du frottement [2].

XXIV.3.2 - Décohésions superficielles

On observe parfois à la surface de lopins filés des décohésions qui peuvent se répéter périodiquement. Les conditions de formation de ces déchirures superficielles sont mal définies. Elles résultent généralement d'une faible ductilité du métal, d'une mauvaise lubrification ou d'un angle de filage trop élevé (fig. XXIV.16).

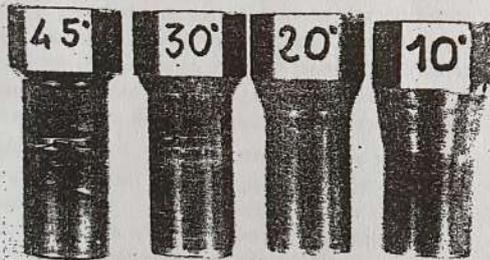


Fig. XXIV.16 - Décohésions superficielles : influence de l'angle. ( $R = 40\%$ ).

XXIV.3.3 - Eclatement en bout.

Lors de l'introduction du métal dans la filière, l'extrémité du lopin est soumise à des contraintes de tension très élevées qui peuvent induire des fissurations longitudinales. Ces éclatements sont favorisés par des angles de filage trop importants. Très souvent, ils sont associés à une dureté superficielle élevée due au cisailage du lopin.

Un recuit de détente après cisailage est le plus souvent suffisant pour les éviter [11].

XXIV.3.4 - Décohésions internes en chevrons.

Un défaut interne d'une grande importance pratique se produit parfois lors des opérations de filage direct ou de tréfilage.

Il s'agit d'une décohésion prenant naissance sur l'axe de la pièce au passage de la filière. Il se propage par cisaillement à environ  $45^\circ$  hors de l'axe, ce qui lui donne une forme conique caractéristique (fig. XXIV.17 et XXIV.18).

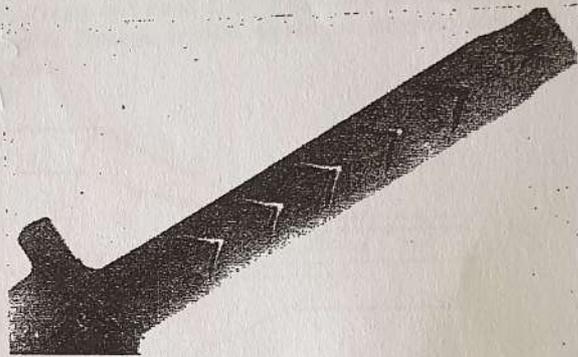


Fig. XXIV.17 - Décohésion interne en chevron dans une pièce filée à froid.

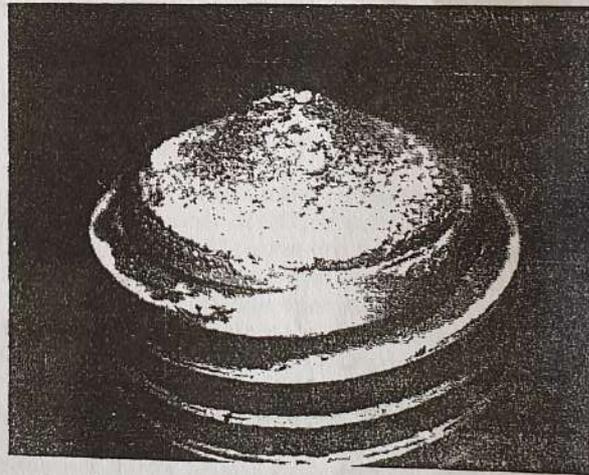


Fig. XXIV.18 - Rupture due à la présence d'un chevron.

la pointe étant dirigée vers l'apex de la filière, d'où le nom de chapeau chinois, pointe de flèche, ou chevron, donné à ces défauts. Leur nombre dans une pièce est aléatoire, mais ils se répètent souvent périodiquement, la distance entre deux défauts étant de l'ordre de grandeur du diamètre de la pièce filée.

Les chevrons débouchent rarement à la surface et ne sont donc détectables que par des méthodes destructives ou par contrôle aux ultra-sons ou par radiographie. Toutefois, lorsqu'ils sont très développés, leur présence peut se traduire par une striction visible à l'extérieur de la pièce. Ils sont également souvent associés à une dépression prononcée de l'extrémité de la pièce filée.

La fréquence de ces défauts dans un lot de pièces est toujours très faible, généralement de quelques pour mille et rarement supérieure à 4 ou 5 %. Cela rend l'étude et la détection délicates. L'importance industrielle des chevrons a été soulignée dans l'exposé précédent. Elle a justifié de nombreuses études [4,6,12-16] dont le but est de comprendre leur mécanisme de formation afin d'en prévoir l'apparition.

XXIV.4 – Détermination des conditions d'apparition des chevrons

Les décohésions internes en chevron sont la conséquence de facteurs métallurgiques et mécaniques.

– Le paramètre métallurgique principal est la ductilité intrinsèque du métal. L'examen au microscope à balayage montre qu'il s'agit d'une rupture typiquement ductile avec faciès en cupules.

Les chevrons sont le plus souvent liés à la présence d'inclusions, de porosités ou de ségrégations centrales (fig. XXIV.19). Des simulations sur plasticine de différentes ductilités soulignent bien l'importance de ce facteur [15]. La sensibilité des aciers varie d'une coulée à l'autre. Elle est renforcée par des teneurs élevées en carbone (C = 0,40 à 0,50 %) et en soufre et phosphore (P + S > 0,40 %) (14).



Fig. XXIV.19 – Chevron lié à la présence d'une ségrégation à cœur.

– Un faible coefficient d'écroutissage est également défavorable. Il est en effet très rare d'observer des chevrons sur un acier recuit, même fortement chargé en inclusions. En revanche, lors des filages en plusieurs passes, ces défauts sont fréquents pour les dernières passes lorsque le métal étant écroui son taux de consolidation est devenu faible.

– La géométrie de la filière est un paramètre prépondérant. Les chevrons sont favorisés par des angles de filage trop importants ; ils n'apparaissent que pour de faibles réductions de sections, encore que certains résultats tendent à prouver qu'une déformation minimale est nécessaire [15 - 16]. C'est ainsi que la pièce de la figure XXIV - 17 est forgée sans aucun problème en une seule passe alors que des chevrons apparaissent lorsqu'elle est faite en trois passes successives bien que la déformation globale soit identique.

– Le frottement fait l'objet de résultats contradictoires [12 - 22] et il est difficile de trancher actuellement. Son incidence doit, en fait, être assez faible.

Des critères reliant ces différents paramètres ont été établis pour déterminer des conditions de formation des chevrons. Le premier, dû à Avitzur et Zimerman [12 - 13],

utilise une méthode de borne supérieure. Le second, plus physique, part du calcul de l'état de plus ou moins grande tension hydrostatique au cœur du lopin, et le relie à la ductilité du métal.

XXIV.4.1 – Critère énergétique.

Avitzur [12] dans le cas d'un matériau rigide parfaitement plastique, puis Zimerman et Avitzur [13] dans le cas d'un matériau écrouissable, ont procédé à une analyse des conditions d'apparition de ces décohésions en utilisant une méthode de borne supérieure.

Le champ de vitesse de la figure XXIV.4, déjà utilisé dans le cas d'un écoulement normal, est modifié par la formation d'une décohésion à cœur qui crée une discontinuité de vitesse sur l'axe (fig. XXIV.20). L'écoulement qui nécessite l'énergie la plus faible est supposé être le plus probable.

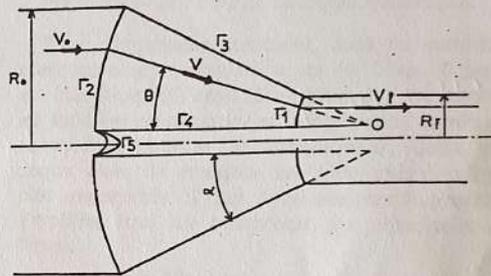


Fig. XXIV.20 – Champ de vitesses lors de la formation d'un chevron selon Avitzur [12].

La loi d'écroutissage du métal est prise linéaire :

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \beta \bar{\epsilon})$$

La comparaison des énergie mises en jeu dans les deux types d'écoulement permet de définir une limite dans le plan (R %,  $\alpha$ ) (fig. XXIV.21) entre une zone dite "saine" dans laquelle aucun chevron ne peut se former dans un métal non écrouissable et une zone dangereuse (située au-dessous et à droite des courbes limites) dans laquelle il y a risque de formation de décohésions. Les courbes tracées pour plusieurs valeurs du coefficient d'écroutissage  $\beta$  montrent que la zone dangereuse est fortement réduite lorsque le métal peut s'écrouir pendant la déformation. Elles soulignent le rôle néfaste du frottement, et surtout des faibles réductions de section et des angles de filage trop importants.

Nous avons essayé de vérifier ces critères en reportant l'ensemble des cas de chevrons que nous avons rencontrés dans nos essais ou que nous avons trouvés dans la littérature.

Il apparait que tous les points expérimentaux sont bien situés dans la zone dangereuse correspondant au frottement maximum et à un coefficient d'écroutissage nul. Ce critère fournit un outil intéressant pour définir une gamme de filage et surtout indiquer le sens des modifications à apporter à la fabrication d'une pièce critique, à savoir, mieux répartir les déformations entre les passes pour conserver

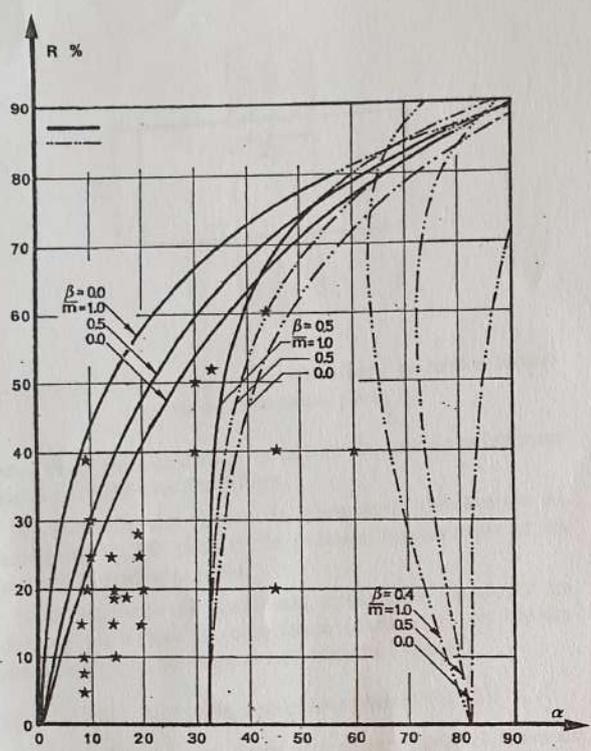


Fig. XXIV.21 - Critère de formation de chevrons selon Zimmerman [4] en fonction de la réduction de section  $R\%$ , du demi-angle de la filière  $\alpha$ , et des coefficients de frottement ( $\bar{m}$ ) et d'écroutissage ( $\beta$ ). La zone dangereuse est située au-dessous et à droite des courbes. Les étoiles correspondent à des cas de chevrons effectivement observés.

une réduction de section suffisante en dernière opération, et réduire l'angle de filage. Son emploi tend à sa généraliser.

Il faut toutefois souligner que le rôle de l'écroutissage est fortement exagéré. En effet, pour un acier, le coefficient  $\beta$  est égal à  $\frac{n}{\epsilon}$ , si on suppose une loi du type  $\sigma = k\epsilon^n$ .

Pour les aciers utilisés en forge à froid  $0,15 < n < 0,25$ , il faudrait des déformations de  $\epsilon = 5$  à  $10$  pour que des chevrons puissent se former selon les courbes établies par Zimmerman, ce qui est évidemment exagéré. Inversement, si on ne considère que la courbe la plus défavorable ( $\beta = 0$ ), on s'aperçoit que la très grosse majorité des pièces fabriquées par filage à froid est située dans la zone dangereuse, et heureusement les cas d'apparition de chevrons sont très rares. Cette courbe est donc trop sévère.

XXIV.4.2 - Critère ductilité - contraintes.

L'une des limitations de la validité des critères précédents provient de ce qu'ils ne prennent pas en considération le problème de l'initiation de la décohesion. Or celle-ci résulte de la juxtaposition d'un état de contrainte défavorable et d'une faible ductilité. Felgères et Baqué [15] ont montré que les contraintes, qui sont fortement compressives près de la filière, peuvent s'inverser sur l'axe pour certaines géométries ; une tension hydros-

tatique élevée apparaît à cœur pour les forts angles et les faibles réductions (fig. XXIV.32). Il retrouvent ainsi un résultat semblable à celui obtenu par Rogers et col. [17] en déformation plane, par une méthode de lignes de glissement dans le cas de l'étrirage de tôles.

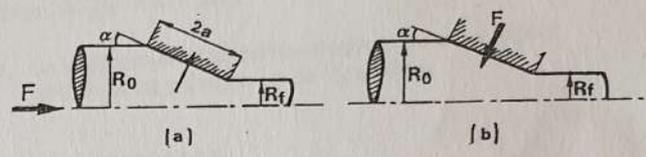


Fig. XXIV.22 - Equivalence entre le filage avant (a) et le frettage plastique conique (b) dans une approche du type chargement limite et d'écoulement instantané.

XXIV.4.2.1 - Principe de l'analyse mécanique.

Pour comprendre comment, dans un matériau globalement en compression au cours du filage, il peut se créer cet état dépressif, nous allons procéder par étapes. En effet les modèles mécaniques en filage avant conduisent à des expressions lourdes et compliquées. Cette complexité risque alors de masquer les phénomènes physiques les plus importants. Il faut donc analyser le procédé pour le simplifier tout en conservant ses principales caractéristiques.

Au cours du filage la matière est forcée dans une filière conique de demi-angle  $\alpha$  pour une réduction en aire  $R\%$  donnée. La matière vient s'écraser sur l'outil (fig. XXIV.22a).

Imaginons maintenant que la filière est déformable et que c'est l'anneau conique qui exerce la pression sur la matière pour la plastifier (fig. XXIV.22b). Cette dernière considération permet de procéder à une première simplification : on considère le cas limite d'un anneau plat ( $\alpha = 0$ ) frettant plastiquement une barre cylindrique (fig. XXIV.23).

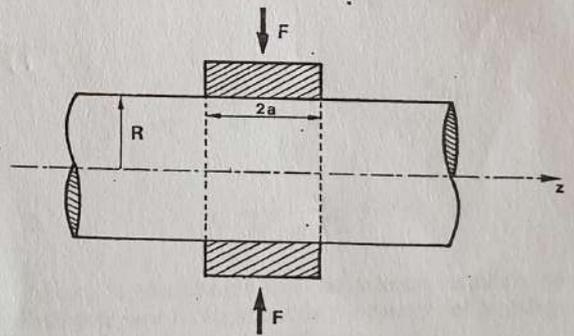


Fig. XXIV.23 - Frettage plastique d'une barre cylindrique par un anneau "déformable".

Une deuxième simplification nous amène à étudier le cas de la Figure XXIV.23 en déformation plane. Nous sommes alors ramenés à l'étude du bipoinçonnement d'une barre rectangulaire par deux indenteurs plans (fig. XXIV.24).

Nous utilisons ici une méthode de calcul approchée (la méthode des tranches) mais physiquement très par-

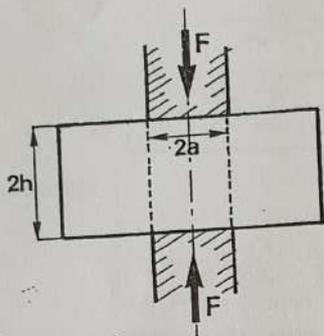


Fig. XXIV.24 - Bipoinçonnement d'une barre de section rectangulaire en déformation plane.

lante, pour faire sentir les variations de pressions internes avec la géométrie de l'outillage.

La méthode des lignes de glissement développée en annexe XXIV.5.2 permet de préciser les résultats et les limites du premier modèle.

Dans chacune de ces deux approches l'analogie ira toujours du simple au compliqué (c'est-à-dire du bipoinçonnement plan au filage avant axisymétrique).

XXIV.4.2.2 - Le bipoinçonnement plan [19] [20].

Soit un barreau et deux indenteurs plats et lisses de longueur L selon la direction z. La hauteur du barreau est 2h et ses deux faces perpendiculaires à l'axe des x sont libres de contraintes. Les poinçons ont une largeur 2a

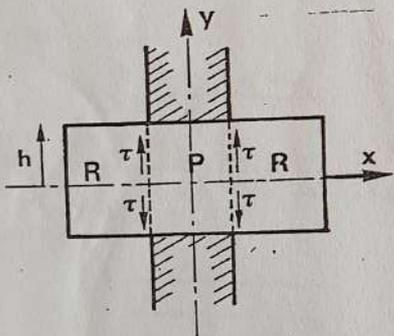


Fig. XXIV.25 - Bipoinçonnement en déformation plane.

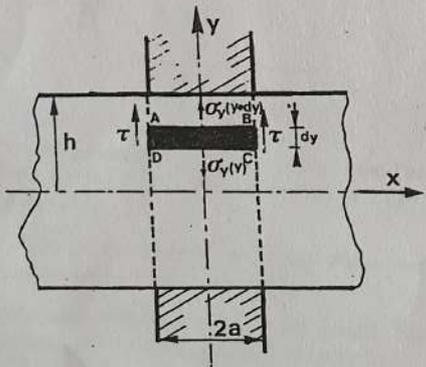


Fig. XXIV.26 - Bipoinçonnement en déformation plane - méthode des tranches.

La zone plastifiée sous les poinçons est entourée par deux zones rigides. La colonne de matière centrale va subir une cisssion  $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$  parallèlement aux frontières rigide-plastique (fig. XXIV.25).

Considérons la zone plastique comme une superposition de tranches de largeur 2a et d'épaisseur dy sur toute la hauteur 2h (fig. XXIV.26).

N.B : Le matériau est supposé homogène, isotrope, rigide parfaitement plastique et de Von Mises.

Calcul des contraintes.

Hypothèses : Les axes principaux des contraintes sont dans toute la barre Ox, Oy, Oz. Les contraintes principales  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ne dépendent que de y, c'est-à-dire sont constantes dans une tranche infiniment mince. La cisssion  $\tau$  ne perturbe pas les contraintes dans la tranche. Le frottement est nul à l'interface métal outil.

\* L'équilibre des forces agissant sur cette tranche de matière s'écrit :

$$2aL [\sigma_y(y + dy) - \sigma_y(y)] + 2\tau L dy = 0 \quad (1)$$

soit :

$$\frac{d\sigma_y}{dy} = -\frac{\tau}{a} = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} \quad (2)$$

Cette expression met en évidence que  $\sigma_y$  est de moins en moins compressive quand on se déplace de l'outil vers le cœur.

\* Le critère de plasticité en déformation plane s'écrit :

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad (3)$$

avec  $\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  conséquence de la loi d'écoulement (4)

comme le matériau est homogène :  $\frac{d\sigma_0}{dy} = 0$

alors :

$$\frac{d\sigma_x}{dy} = \frac{d\sigma_y}{dy} ; \frac{d\sigma_x}{dy} = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} y + C \quad (6)$$

Ainsi, la plastification de la colonne centrale permet d'affirmer que la variation de  $\sigma_x$  avec y est la même que  $\sigma_y$  :  $\sigma_x$  est moins compressif à cœur.

\* Toutefois comme les bords sont libres d'efforts, la résultante de  $\sigma_x$  doit être nulle.

Alors  $\sigma_x$  est forcément compressif en peau et dépressif à cœur quelle que soit la géométrie.

$$\int_{-h}^h \sigma_x dy = 2 \int_0^h \sigma_x dy = 0 \quad (7)$$

Cette condition donne la valeur de la constante C :

$$C = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{a} \quad (8)$$

$$\sigma_x = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{4a} - \frac{y}{2a} \right) \quad (9)$$

et, avec (3) :

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{4a} - \frac{y}{2a} - 1 \right) \quad (10)$$

Au centre du lopin les contraintes sont :

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h}{4a} \\ \sigma_y^0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{4a} - 1 \right) \end{cases} \quad (11)$$

$\frac{h}{4a} < 1$        $\sigma_y^0$  est encore compressive à cœur

$\frac{h}{4a} = 1$        $\sigma_x^0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$  ;  $\sigma_y^0 = 0$

$\frac{h}{4a} > 1$        $\sigma_x^0$  et  $\sigma_y^0$  sont positives.

La pression hydrostatique s'écrit :

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

avec (4) :

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (12)$$

$$p = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{4a} - \frac{y}{2a} - \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

A cœur :

$$\frac{p^0}{\sigma_0} = \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{4a} \right) \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

avec  $\sigma_0' = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$

$$\frac{p^0}{\sigma_0'} = \frac{1}{2} - \frac{h}{4a} \quad (15)$$

Selon la géométrie ( $h/a$ ), la pression sur l'axe est dépressive ( $p^0/\sigma_0' < 0$ ), ou compressive ( $p^0/\sigma_0' > 0$ ). (Fig. XXIV.27).

#### XXIV.4.2.3 - Le frettage plastique d'une barre cylindrique par un anneau de largeur $2a$ .

Considérons maintenant une barre ronde, très longue, de rayon  $R$ , serrée par un anneau de largeur  $2a$ .

Un modèle de tranches axisymétriques (fig. XXIV.28) permettra de comprendre de la même façon que, pour

certaines géométries, la pression hydrostatique sur l'axe peut devenir négative.

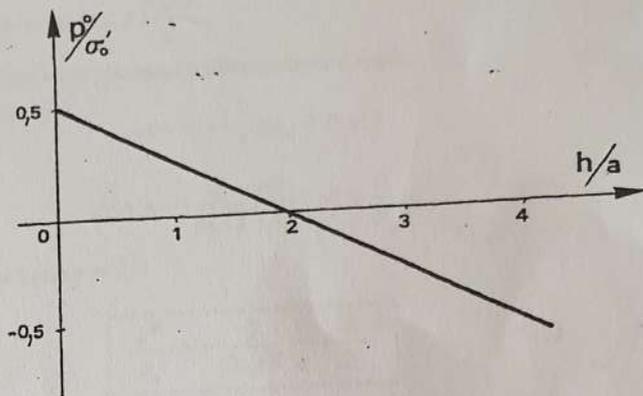


Fig. XXIV.27 - Pression hydrostatique à cœur en fonction de la géométrie du bipoinçonnement ; déformation plane ; méthode des tranches.

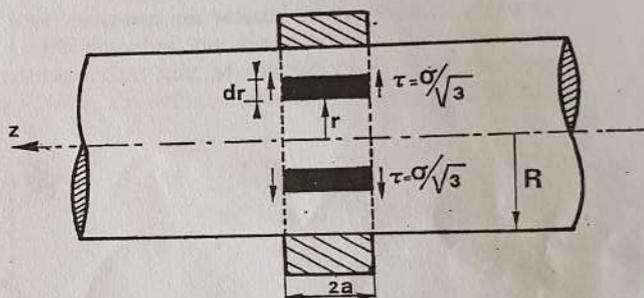


Fig. XXIV.28 - Frettage plastique d'une barre cylindrique - découpage en tranches axisymétriques de la zone plastique

Toute la zone comprimée sous l'anneau est plastifiée. Elle est bordée par deux zones rigides libres de contraintes en bout.

On découpe la zone plastifiée en tranches annulaires d'épaisseur  $dr$  et de longueur constante  $2a$ .

Une cisssion  $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$  s'exerce sur leurs faces planes à l'interface rigide plastique.

Hypothèses :

- frottement nul sous l'outil,  $\bar{m} = 0$
- les tranches sont homogènes  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$  indépendants de  $z$
- $\dot{\epsilon}_z$  indépendant de  $r$ .

Calcul des contraintes.

Les axes principaux des contraintes sont  $r, \theta, z$ . Les contraintes principales  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  s'exercent sur chaque tranche et ne dépendent que de  $r$  ; elles sont donc constantes dans une tranche infiniment mince.

Comme la vitesse ne peut être infinie sur l'axe, les hypothèses (b) et (c) conduisent à la relation : [18]

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta \quad (16)$$

L'application de la loi d'écoulement conduit alors à une nouvelle relation entre les contraintes :

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (17)$$

Le critère de plasticité et l'équation d'équilibre d'une tranche suffisent à déterminer  $\sigma_r$  et  $\sigma_z$ .

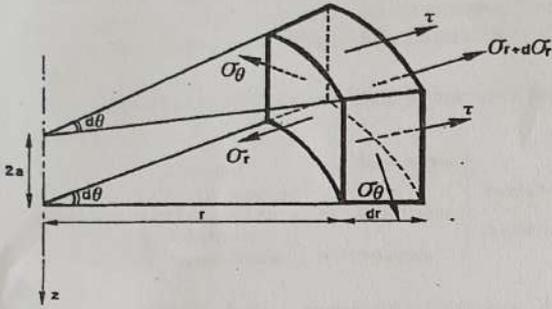


Fig. XXIV.29 - Élément de matière d'une tranche annulaire ; action des contraintes sur les facettes.

Dans le plan  $(r, \theta)$  l'équilibre de la tranche s'écrit :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta \cdot 2a - \sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot 2a + 2 \tau r dr d\theta - 2 \sigma_\theta \frac{dr}{2} 2a = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} + \frac{2\tau}{2a} - \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{\tau}{a} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}a} \quad (19)$$

La plus grande contrainte en valeur algébrique est  $\sigma_z$ . Le critère de plasticité devient avec (17)

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_0 \quad (20)$$

Puisque le corps est homogène :  $\frac{d\sigma_0}{dr} = 0$

$$\frac{d\sigma_z}{dr} = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} \quad (21)$$

$\sigma_z$  varie comme  $\sigma_r$ .

Par intégration :

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} r + A.$$

La condition à la limite fixe la constante A. Aucune force ne s'exerce sur les bouts libres.

$$\int_0^R \sigma_z 2\pi r dr = 0 \text{ d'où } A = \frac{2\sigma_0}{3\sqrt{3}a} R.$$

On en déduit les valeurs de  $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$  en fonction de  $r$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{3} \frac{R}{a} - \frac{r}{a} \right) \\ \sigma_r = \sigma_\theta &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{3} \frac{R}{a} - \frac{r}{a} \right) - \sigma_0 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Sur l'axe  $(r = 0)$  on vérifie bien que  $\sigma_z$  est toujours en traction et qu'il en est de même de  $\sigma_r$  dès que  $R/a$  est supérieur ou égal à  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Calcul de la pression hydrostatique à cœur.

$$p(r) = -\frac{1}{3}(\sigma_z + 2\sigma_r)$$

$$p(r) = -\frac{\sigma_0}{a\sqrt{3}} \left( \frac{2}{3} R - r \right) + \frac{2}{3} \sigma_0 \quad (23)$$

Sur l'axe  $r = 0$  :

$$\frac{p^0}{\sigma_0} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{R}{a} + \frac{2}{3} \quad (24)$$

$$\frac{p^0}{\sigma_0'} = \frac{(\sqrt{3} - R/a)}{3} \quad (25)$$

On peut comparer ces valeurs de la pression hydrostatique à celle obtenues lors des essais de traction simple. Elles correspondent aux géométries  $(h/a, R/a)$  pour lesquelles  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  s'annulent respectivement. (fig. XXIV.30).

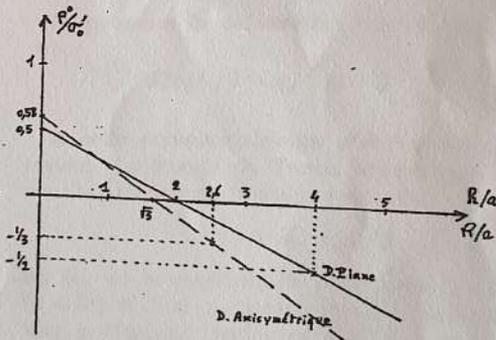


Fig. XXIV.30 - Pression hydrostatique à cœur en fonction de la géométrie du procédé :

(—) cas de la déformation plane  
(---) cas du fretage plastique cylindrique.

# Méthode des Blocs Rigides: filage à chaud

## Taille de la zone morte:

- la taille beaucoup plus grande observée avec le laiton serait due à une effet thermique : le centre de la billette plus chaud s'écoule préférentiellement. D'autre part, on attribue à l'oxyde de zinc la propriété de favoriser l'adhérence du métal au conteneur. Il y aurait donc une combinaison entre les effets thermique et tribologique.

- dans le cas de filage lubrifié, qui se trouve être en même temps avec un fort rapport de réduction, on n'observe pas de formation de zone morte. Le glissement facile le long de la filière peut-il suffire à faire disparaître la zone morte ?

On peut donc synthétiser ces observations de la façon suivant :

Augmentation du	Frottement	→ Augmentation	de la taille de la zone morte
	gradient thermique (centre de la billette chaud)	→ Augmentation	
	Rapport de filage	→ Diminution	

Nous cherchons donc à comprendre l'influence d'un certain nombre de paramètres sur la dimension de la zone morte et également sur son existence même. Nous utiliserons pour cela deux types de champs de vitesse, nous conduisant à deux bornes supérieures BS I et BS II. Il s'agit de champs à blocs rigides (Cf. partie A) en déformation plane. Il faut donc admettre que les résultats obtenus seront représentatifs de la réalité qui est axisymétrique ; cette démarche est très souvent nécessaire et elle est justifiée par un grand nombre d'analogies physiques entre les écoulements plan et axisymétrique.

**Remarque importante :** le rapport de filage plan doit cependant être pris dans le rapport des rayons en axisymétrique. Dans tous les cas, c'est un rapport de surface

$$\lambda_{plan} = \frac{Z * R_{Billette}}{Z * R_{Barre}}$$

$$\lambda_{axi} = \frac{\pi * R_{Billette}^2}{\pi * R_{Barre}^2}$$

### XI.6 - Etude de la borne supérieure avec zone morte : BS I. (Fig. XI.9)

#### XI.6.1 - Hodographe et optimisation.

Le rayon de la billette est pris comme unité de dimension. Le grain de poussée se trouve à une distance  $x$  de la filière. AB est perpendiculaire à l'axe de symétrie,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les angles que font respectivement OA et OB avec cet axe.

$$tg \alpha = \frac{1}{\lambda l}, \text{ et } tg \beta = \frac{\lambda - 1}{\lambda l}$$

**Remarque :** En notant l'extrémité du vecteur vitesse dans chaque bloc par le numéro de ce bloc, nous voyons directement les vecteurs de discontinuités :

- <12> parallèle à AB
- <02> parallèle à OB
- <23> parallèle à OA

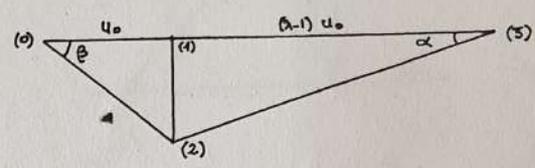
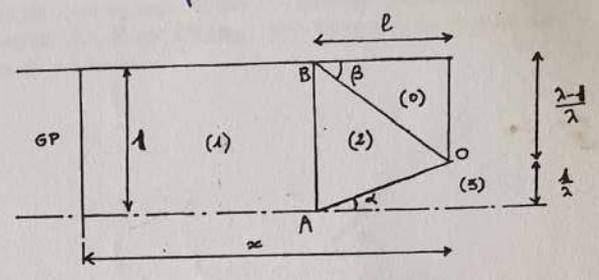


Fig. XI.9.

Le calcul de la puissance de déformation s'effectue sur chaque arête :

Arête	Longueur	Discontinuité	Produit (= Puissance à $\sigma_0/\sqrt{3}$ près)
AB	1	<12> = $u_0 \operatorname{tg} \beta$	$u_0 \operatorname{tg} \beta = \frac{u_0}{l} \frac{\lambda - 1}{\lambda}$
OB	$\frac{l}{\cos \beta}$	<02> = $\frac{u_0}{\cos \beta}$	$\frac{u_0 l}{\cos^2 \beta} = u_0 l (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) = u_0 l \left[ 1 + \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda l} \right)^2 \right]$
OA	$\frac{l}{\cos \alpha}$	<23> = $\frac{(\lambda - 1)u_0}{\cos \alpha}$	$\frac{(\lambda - 1)u_0 l}{\cos^2 \alpha} = (\lambda - 1)u_0 l \left[ 1 + \left( \frac{1}{\lambda l} \right)^2 \right]$

La puissance de déformation interne est la somme :

$$\dot{W}/\sigma_0/\sqrt{3} = u_0 \left[ \lambda l + 2 \frac{\lambda - 1}{\lambda l} \right]$$

A cette puissance s'ajoute celle dissipée par le frottement. Le modèle de Tresca, appelé aussi modèle de couche limite, donne la cission  $\tau$  suivante :

$$\tau = \bar{m}_1 \sigma_0/\sqrt{3}$$

où  $\bar{m}_1$  est le coefficient de frottement billette-conteneur ( $0 \leq \bar{m}_1 \leq 1$ ) et  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement du matériau à filer. Le frottement s'effectue sur la longueur  $(x - l)$  :

$$\dot{W}_f = \bar{m}_1 (x - l) u_0 \sigma_0/\sqrt{3}$$

La puissance dissipée totale (par unité de largeur) est égale à :

$$\dot{W}_1 = \left[ \bar{m}_1 x + l(\lambda - \bar{m}_1) + 2 \frac{\lambda - 1}{\lambda l} \right] u_0 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

La longueur  $l$  optimale rend  $W_1$  minimale :

$$\frac{d\dot{W}}{dl} = 0 \quad l_{opt 1} = \sqrt{\frac{2(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - \bar{m}_1)}}$$

La puissance optimale est donc égale (à  $\sigma_0 u_0/\sqrt{3}$  près) à :

$$\dot{W}_1 = 2 \sqrt{2(\lambda - 1)} \frac{\lambda - \bar{m}_1}{\lambda} + \bar{m}_1 x$$

**XI.6.2 – Variation de la dimension de la zone morte.**

Ce résultat permet de retrouver un certain nombre de phénomènes physiques décrits ci-dessus :

– rôle du frottement :

$\bar{m}_1$  varie de 0 à 1  $\Rightarrow l_{opt}$  varie de  $\sqrt{\frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2}}$  à  $\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$  donc augmente.

Reprenons l'exemple des filages de métaux non ferreux sur la figure XI.7 :

pour  $\lambda = 3$   $\bar{m}_1$  varie de 0 à 1  $\Rightarrow l_{opt}$  varie de 0,67 à 0,82. (Fig. XI.10.).

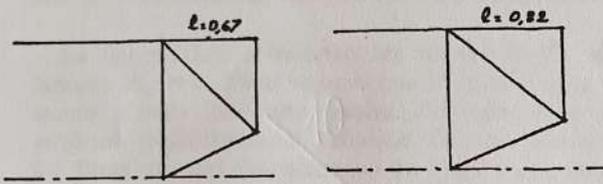


Fig. XI.10.

Nous retrouvons qualitativement la faible variation de dimension de zone morte entre le cuivre et l'aluminium ; en aucun cas le phénomène observé sur le laiton ne peut être expliqué.

– rôle du rapport de filage :

la dimension de la zone morte est fonction décroissante de  $\lambda$ , quel que soit  $\bar{m}$ . Cette diminution est visible sur les parties droites des photos XIII.3 et XIII.4.

**XI.6.3 – Limite de validité de la BS I.**

Enfin, lorsque  $x$  devient inférieur à  $l_{opt}$ , la zone I a complètement disparu et la ligne AB n'est plus une ligne de discontinuité de vitesse mais la frontière entre le grain de poussée et la billeterie ; on peut considérer que c'est une autre borne supérieure, BS I'. Soit  $\bar{m}_2$  le frottement sur cette nouvelle frontière, le calcul de la puissance se déduit facilement de ceux effectués précédemment.

A  $\sigma_0 u_0 / \sqrt{3}$  près, elle est égale à :

$$\dot{W}_2 = \lambda x + (1 + \bar{m}_2) \frac{\lambda - 1}{\lambda x}$$

Application numérique :

$$\lambda = 2 \quad \dot{W}_2 = 2x + (1 + \bar{m}_2) \frac{1}{2x}$$

La figure XI.11 superpose deux courbes  $\dot{W}_2$  correspondant à  $\bar{m}_2 = 0$  et  $\bar{m}_2 = 1$  aux courbes  $\dot{W}_1$ . On voit que si  $\bar{m}_2 = 1$ , la BS I' est toujours supérieure à la BS I ; elle en prend le relai lorsque  $x$  atteint  $l_{opt}$ .

Si au contraire  $\bar{m}_2 = 0$ , la BS I' devient inférieure à la BS I avant même que  $x$  atteigne  $l_{opt}$ . Ceci indique une tendance de la zone morte à remonter vers le grain de poussée lorsque celui-ci est très lubrifié. Ce phénomène peut être rapproché de la cavitation en fin de filage qui

pourrait correspondre à un écoulement préférentiel vers le centre et qui est d'autant plus marqué que le grain de poussée est lubrifié.

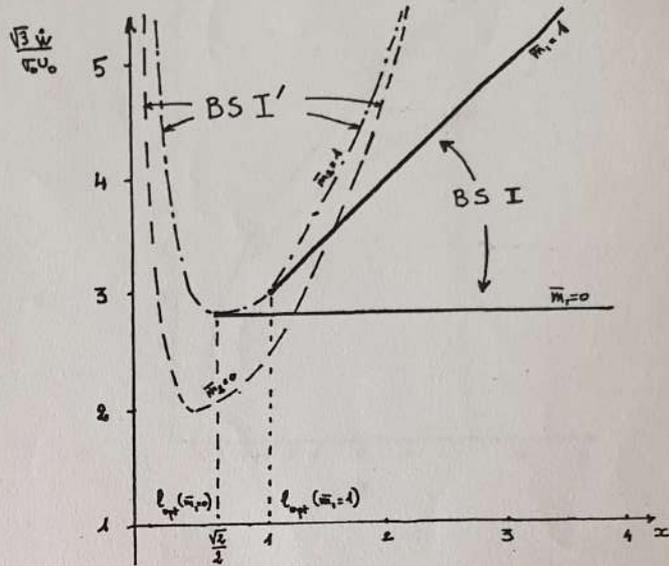


Fig. XI.11.  $\lambda = 2$

Enfin, en observant ces courbes dans le sens des  $x$  décroissants, nous retrouvons l'allure des courbes de pression de filage.

**XI.7 – Etude de la borne supérieure sans zone morte (BS II).**

**XI.7.1 – Hodographe et optimisation.**

C'est le champ sans zone morte représenté par la figure XI.12.

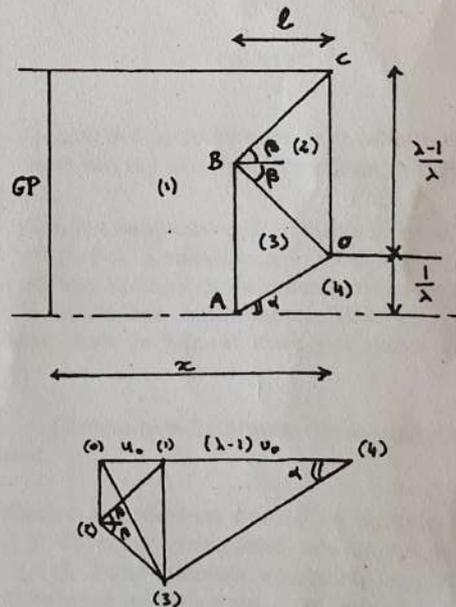


Fig. XI.12.

Le calcul de la puissance peut s'effectuer comme précédemment. L'optimisation de ce champ est cette fois-ci indépendante du frottement bille-cteneur (le terme  $\bar{m}_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} x$  est constant). En revanche le frottement le long de la filière (OC) intervient, et nous le prendrons égal à  $\bar{m}_1$ .

A  $\sigma_0 u_0 / \sqrt{3}$  près, l'énergie est égale à :

$$\dot{W}_3 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{2(\lambda^2 - 1)((2 + \bar{m}_1)\lambda + 2 - \bar{m}_1)} + \bar{m}_1 x$$

XI.7.2 - Comparaison entre BS I et BS II sans frottement.

La figure XI.13 a. compare les valeurs de  $\dot{W}_1$  et  $\dot{W}_3$  lorsque  $\bar{m}_1 = 0$ . Nous voyons que le champ sans zone morte dissipe beaucoup moins d'énergie. Ceci nous explique qualitativement l'absence de zone morte lors du filage au verre des aciers ou du filage hydrostatique.

XI.7.3 - Comparaison entre BS I et BS II avec frottement.

La figure XI.13 b. compare les valeurs des parties constantes de  $\dot{W}_1$  et  $\dot{W}_3$  lorsque  $\bar{m}_1 = 1$ . Si l'écoulement avec zone morte l'emporte pour de faibles rapports de réduction, à partir d'une certaine valeur du rapport de filage, l'écoulement sans zone morte finit par l'emporter. Cette évolution était prévisible puisque la grandeur  $l$  optimale du champ I, qui caractérise l'étendue de la zone morte, diminuait avec le rapport de filage ( $l_{opt I} \sim \sqrt{\frac{l_0}{\lambda}}$ ). La valeur critique à partir de laquelle elle disparaît ne peut être donnée précisément. Nos deux modèles fournissent une valeur voisine de 8 mais il suffit par exemple de choisir un champ à zone morte plus élaboré (Cf. Fig. XI.17). pour l'augmenter. Il est par contre indéniable que la décroissance initialement en  $1/\sqrt{\lambda}$  s'accélère à partir d'une valeur voisine de 8.

La photo XI.7 c. représente un cas de filage où le rapport est faible et où le frottement bille-cteneur est important. Le modèle avec zone morte s'applique bien à ce cas, mais il est incapable d'expliquer une telle remontée de la zone morte. Nous allons maintenant étudier l'influence d'un gradient thermique dans la bille-cte.

XI.8 - Le rôle du gradient thermique.

Dans le cas du filage des cuivreux, et notamment des laitons biphasés, la température de la bille-cte est hétérogène car le conteneur ne peut être maintenu à une température aussi élevée que celle de la bille-cte. La surface de contact bille-cte est donc plus froide que le cœur de la bille-cte.

On suppose ici que la température de la surface reste constante au cours du filage (on néglige donc l'échauffement dû au frottement bille-cte) et est égale

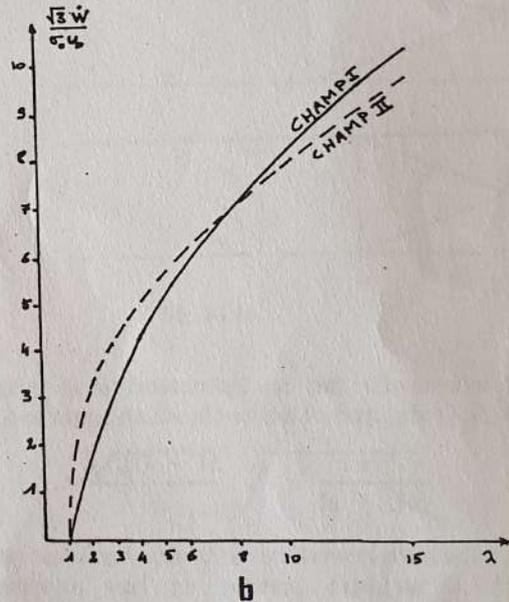
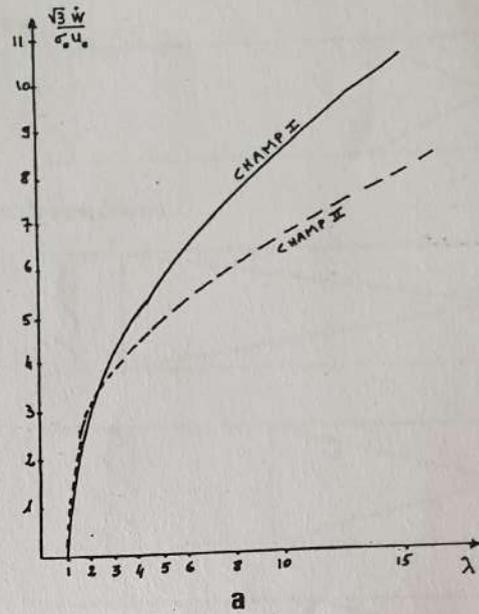


Fig. XI.13.

à la moyenne des températures de la bille-cte et du conteneur pondérées par leurs coefficients de partage superficiel respectifs.

De plus, on suppose que la distribution des températures n'est pas profondément modifiée dans la zone morte et dans la zone de déformation (les échauffements ont une amplitude relativement faible par rapport aux variations dans la bille-cte dues aux pertes thermiques).

XI.8.1 - Distribution hétérogène de la contrainte d'écoulement.

A chaque température  $\theta(y)$  d'un élément de matière situé à  $y$  du cœur correspond une contrainte d'écoulement  $\sigma_0(y)$ . Nous pouvons approcher la distribution de la contrainte par un polynôme de la forme :

$$\sigma_0(y) = a + c y^n$$

Au cours du filage, les températures s'homogénéisent : l'exposant  $n$  diminue.  $\theta_s$  restant constant, la contrainte d'écoulement à la surface reste aussi constante et égale à  $\sigma_0(1) = a + c$  (Fig. XI.14.).

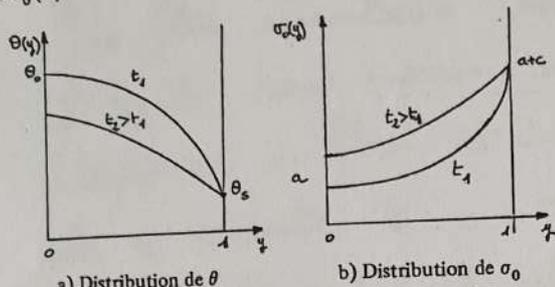


Fig. XI.14.

**XI.8.2 – Synergie entre frottement et gradient thermique.**

Reprenons le champ I et appliquons lui une distribution hétérogène de la contrainte d'écoulement.

Ligne	Discontinuité	Incrément de longueur	
AB	$u_0 \operatorname{tg} \beta$	$dy$	$\sqrt{3} \dot{W}_{AB} = \frac{\lambda-1}{\lambda l} u_0 \int_0^1 (a + cy^n) dy$
OB	$u_0 / \cos \beta$	$dy / \sin \beta$	$\sqrt{3} \dot{W}_{OB} = \frac{u_0}{\sin \beta \cos \beta} \int_{1/\lambda}^1 (a + cy^n) dy$
OA	$u_0 / \cos \alpha$	$dy / \sin \alpha$	$\sqrt{3} \dot{W}_{OA} = \frac{u_0}{\sin \alpha \cos \alpha} \int_0^{1/\lambda} (a + cy^n) dy$

L'expression de la puissance totale est complexe, nous nous contenterons ici de donner l'expression de la valeur optimale de  $l$ , où  $\bar{m}$  traduit le frottement bille-tenneur.

$$l_{opt} = \frac{2 \frac{\lambda-1}{\lambda} (a + c/(n+1))}{\sqrt{a(\lambda - \bar{m}) + \frac{c}{n+1} \left[ \frac{1}{\lambda^n} \left( \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} + \lambda - 1 \right) - \bar{m}(n+1) \right]}}$$

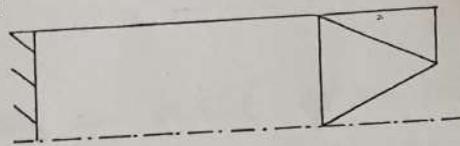
L'étude du régime thermique au cours du filage d'une bille-tenneur en laiton 60-40 ayant pour température initiale 760°C et introduite dans un conteneur à 400°C nous a permis d'évaluer les coefficients  $a$ ,  $c$  et  $n$  qui évoluent au cours du temps.

Les résultats obtenus avec ces coefficients et l'expression précédente sont regroupés dans le tableau suivant ( $\lambda = 2$ ):

Temps écoulé (s)	$a$	$c$	$n$	$\frac{l_{opt}}{\bar{m} = 1}$
0	1	0,9	$\infty$	3,2
5	1	0,9	8	1,9
10	1	0,9	4	1,6
16	1,2	0,7	2	1,2

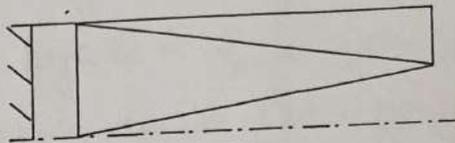
On constate qu'un frottement maximal entraîne une augmentation sensible de la zone morte, d'autant plus grande que le gradient thermique est important (Fig. XI.15).

a) Cas isotherme

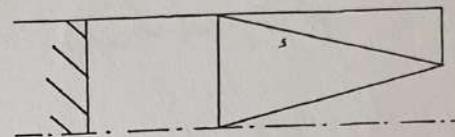


Hétérogénéité de température :

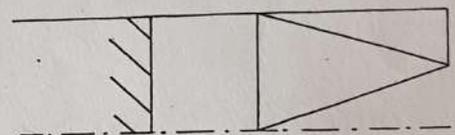
b)  $t \sim 0$



c)  $t \sim 5$



d)  $t \sim 10$



e)  $t \sim 16$

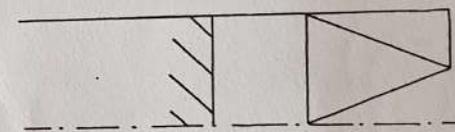


Fig. XI.15.

Par contre, si le frottement est nul, elle évolue très peu. Pour des rapports de réduction importants ( $\lambda \geq 10$ ),

$$l_{opt} = \frac{\sqrt{2(\lambda-1)}}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{c}{(n+1)a}}$$

Nous voyons donc que ni le frottement seul, ni le gradient thermique seul ne peuvent expliquer la forte remontée de la zone morte vers le grain de poussée. C'est la contribution simultanée de ces deux phénomènes qui conduit à une telle extension et entraîne un accroissement catastrophique de la pression de filage.

Le gradient thermique entraîne un refroidissement important de la peau de la bille-tenneur, et par conséquent une augmentation de la cission critique en cet endroit et c'est le frottement, du type Tresca, qui entraîne une dissipation d'énergie proportionnelle à la cission critique.

Exercice :

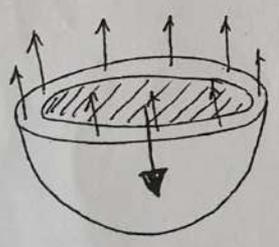
Gonflement d'un diaphragme :

Un flan circulaire est serré entre un outil et un serre-flan. L'huile sous pression va gonfler le flan comme un diaphragme. L'épaisseur du flan est initialement égale à  $e_0$ . Sous pression, elle est réduite à  $e < e_0$ . On suppose que le flan est sphérique (rayon  $R$ ) lorsqu'il est sollicité ( $p > 0$ ). On néglige l'effet de la pression atmosphérique.

- 1) Calculer les contraintes  $\sigma_{nn}$  et  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $p, R$  et  $e$  ( $\sigma_{33} = 0$ ).
- 2) Calculer la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  de Von Mises en fonction de  $p, R$  et  $e$ .
- 3) Donner de 2 façons différentes que :  $\begin{cases} d\varepsilon_{nn} = d\varepsilon_{yy} \\ d\varepsilon_{33} = -2d\varepsilon_{nn} \end{cases}$
- 4) Sachant que :  $d\varepsilon_{33}^p = \frac{de}{e}$  ; calculer la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}^p$ .
- 5) Expliquer comment on peut obtenir (de façon expérimentale) la courbe d'érouissage du matériau.

Solution :

1) Calcul de  $\sigma_{nn}$  et  $\sigma_{yy}$  :



Equilibre :  $p \pi R^2 = \sigma_{nn} (2\pi R e)$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{pR}{2e} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{nz} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

2) Contrainte de Von Mises :  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{xx})^2]}$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$$

$$\boxed{\bar{\sigma} = \frac{pR}{2e}}$$

3) Platicité  $\Leftrightarrow \Delta V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d\Sigma_{xx}^P + d\Sigma_{yy}^P + d\Sigma_{zz}^P = 0 \\ d\Sigma_{xx}^P = d\Sigma_{yy}^P \text{ (par symétrie)} \\ \text{d'où : } d\Sigma_{zz}^P = -2d\Sigma_{xx}^P \end{cases}$  (27)

Relations que l'on peut retrouver par application des lois de comportement de Levy-Navier :

$$\frac{d\Sigma_{xx}^P}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{d\Sigma_{yy}^P}{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}} = \frac{d\Sigma_{zz}^P}{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{d\Sigma_{xx}^P}{\sigma_{xx}} = \frac{d\Sigma_{yy}^P}{\sigma_{xx}} = -\frac{d\Sigma_{zz}^P}{2\sigma_{xx}} \quad \text{et nous retrouvons}$$

les mêmes relations :

$$\begin{cases} d\Sigma_{xx}^P = d\Sigma_{yy}^P \\ d\Sigma_{zz}^P = -2d\Sigma_{xx}^P \end{cases}$$

$$4^e) \bar{\Sigma}_P = \frac{1}{3} \sqrt{2[(d\Sigma_{xx}^P - d\Sigma_{yy}^P)^2 + (d\Sigma_{yy}^P - d\Sigma_{zz}^P)^2 + (d\Sigma_{zz}^P - d\Sigma_{xx}^P)^2]} = 2d\Sigma_{xx}^P = -d\Sigma_{zz}^P$$

$$\bar{\Sigma}_P = -d\Sigma_{zz}^P = -\frac{de}{e} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{\Sigma}_P = \ln \frac{e}{e_0}}$$

5<sup>e</sup>) Nous avons donc :

$$\begin{cases} \bar{\Sigma} = \ln \frac{e}{e_0} \\ \bar{\sigma} = \frac{PR}{2e} \end{cases}$$

Procédure :

- on charge jusqu'à  $P = P_1$  connue
- on décharge le diaphragme ( $P = 0$ )
- on mesure l'épaisseur  $e_1$  au milieu du diaphragme
- on calcule :  $\bar{\sigma}_1 = \frac{P_1 R}{2e_1}$  et  $\bar{\Sigma}_1 = \ln \frac{e_0}{e_1}$
- on reporte sur un graphique le couple  $(\bar{\sigma}_1; \bar{\Sigma}_1)$
- on construit point par point la courbe  $\bar{\sigma} = f(\bar{\Sigma})$

### Exercice

Étude de la traction biaxiale. L'éprouvette est soumise à  $\sigma_{xx}$  et à  $\sigma_{yy} = k\sigma_{xx}$  (voir figure). L'objet de cette application est de tracer la courbe d'écrouissage  $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$   $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  étant respectivement la contrainte généralisée et la déformation généralisée.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{3} \sqrt{2 [(\epsilon_I - \epsilon_{II})^2 + (\epsilon_{II} - \epsilon_{III})^2 + (\epsilon_{III} - \epsilon_I)^2]}$$

1) Calculer le tenseur dérivé

2) Montrer que :

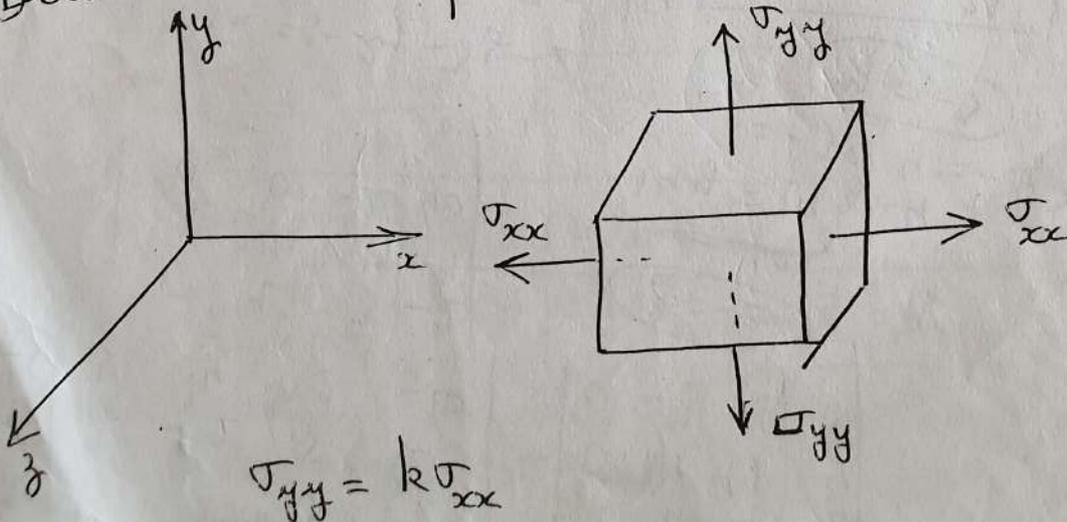
$$\bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_{xx}}{|2-k|} \sqrt{k^2 - k + 1}$$

(Utiliser les relations de Levy-Mises)

3) Calculer  $\bar{\sigma}$  et montrer qu'elle vaut :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} \sqrt{k^2 - k + 1}$$

Décrire comment peut-on alors tracer  $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$



Solution :

$$1) \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{\sigma_{xx}}{3} (1+k)$$

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{3} (2-k) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{xx}}{3} (2k-1) & 0 \\ 0 & 0 & = \frac{\sigma_{xx}}{3} (1+k) \end{pmatrix}$$

2) d'où, par application de lois de comportement de Lemaitre-Risès :

$$\frac{3 d\epsilon_{xx}}{\sigma_{xx} (2-k)} = \frac{3 d\epsilon_{yy}}{\sigma_{xx} (2k-1)} = - \frac{3 d\epsilon_{zz}}{\sigma_{xx} (1+k)}$$

$$d'où : \begin{cases} d\epsilon_{yy} = \frac{2k-1}{2-k} d\epsilon_{xx} \\ d\epsilon_{zz} = - \frac{1+k}{2-k} d\epsilon_{xx} \end{cases}$$

$$d'où : d\bar{\epsilon} = \frac{1}{3} \sqrt{2 \left[ (d\epsilon_{xx} - d\epsilon_{yy})^2 + (d\epsilon_{yy} - d\epsilon_{zz})^2 + (d\epsilon_{zz} - d\epsilon_{xx})^2 \right]}$$

$$= \frac{d\epsilon_{xx}}{3} \sqrt{2 \left[ \left(1 - \frac{2k-1}{2-k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2-k} + \frac{1+k}{2-k}\right)^2 + \left(\frac{1+k}{2-k} + 1\right)^2 \right]}$$

$$= \frac{d\epsilon_{xx}}{3|2-k|} \sqrt{2 \left[ 9(1-k)^2 + 9k^2 + 9 \right]}$$

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2 d\epsilon_{xx}}{|2-k|} \sqrt{k^2 - k + 1} \Rightarrow \bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_{xx}}{|2-k|} \sqrt{k^2 - k + 1}$$

$$3) \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right]}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (1-k)^2 + k^2 + 1 \right]} \Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{xx} \sqrt{k^2 - k + 1}$$

La mesure de  $\sigma_{xx}$  et  $\epsilon_{xx}$  permet de tracer point par point la courbe d'érouissage :  $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$

IV) Expression du critère de Von-Mises en déformation plane:

Solution:

Le critère de plasticité s'écrit:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 = 2\sigma_0^2 \quad (1)$$

Les lois de comportement de Lévy-Mises donnent:

$$\frac{d\epsilon_{xx}}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{d\epsilon_{yy}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}} = \frac{d\epsilon_{zz}}{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \text{constant}$$

$d\epsilon_{zz} = 0$  donc  $2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

(on peut écrire:  $d\epsilon_{zz} = \frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}} d\epsilon_{yy} = 0$  et

comme  $d\epsilon_{yy} \neq 0$  :  $2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$ ) :

(1) s'écrit alors:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{xx}\right)^2 = 2\sigma_0^2$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 = 2\sigma_0^2$$

soit:

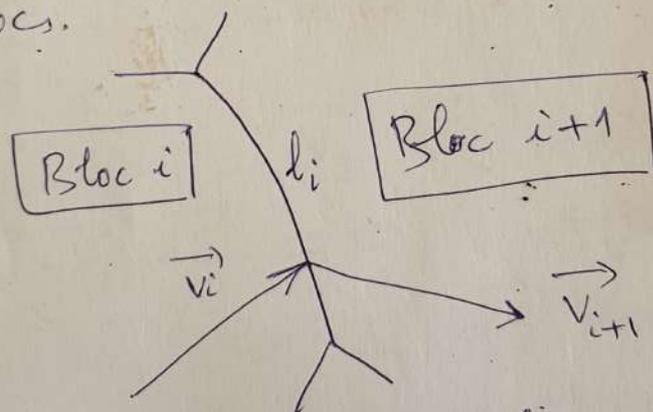
$|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^2 = \frac{2\sigma_0^2}{\sqrt{3}}$

## Méthode des Blocs Rigides

La méthode consiste à décomposer (virtuellement!) la matière à plastifier en blocs (en général des triangles d'épaisseur 1).

Ces blocs sont rigides c'est à dire indéformables. Les particules composant un bloc se déplacent donc à la même vitesse (celle du bloc en question).

Puisque les blocs sont indéformables, la puissance nécessaire à la plastification de la matière est fournie par le frottement au niveau des interfaces entre les différents blocs.



le frottement au niveau des interfaces est supposé de type TRESCA collant ;  $\tau = \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}}$  avec  $m=1$  (c'est la même matière)

donc la puissance nécessaire au niveau de l'interface  $i$  :

$$\dot{W} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \times l_i \times 1 \times \|\Delta \vec{v}_i\| ; \quad \Delta \vec{v}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}$$

pour toutes les interfaces, on a donc :

$$\dot{W}_t = \sum_i W_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sum_i l_i \|\Delta \vec{v}_i\|$$

La méthode des Blocs Rigides qui part d'un champ de vitesse est donc une borne supérieure; la puissance ainsi calculée est supérieure à la puissance réelle.

Pour calculer cette puissance, il suffit donc de connaître les longueurs des différentes interfaces ( $l_i$ ) et  $\|\Delta \vec{v}_i\|$  les variations de vitesse à la traversée de l'interface  $i$ :

Propriétés

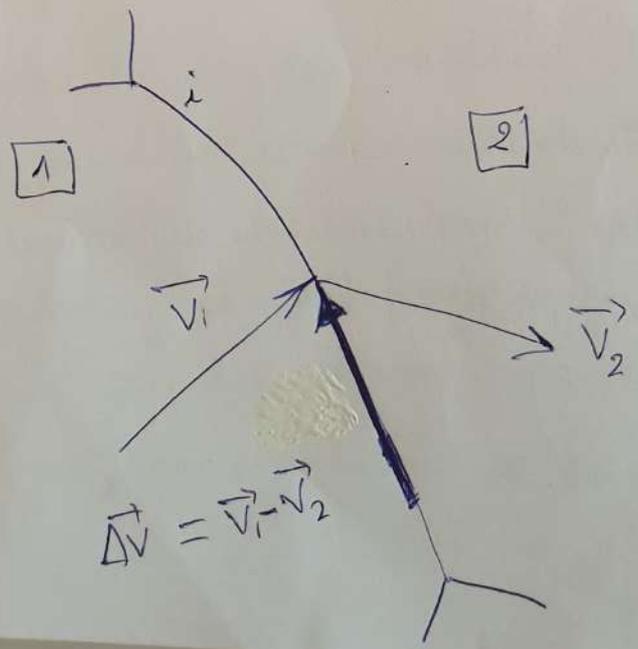
1) pour l'interface  $i$ ; la variation de vitesse  $\Delta \vec{v}_i$  est portée par cette interface; en effet; à la traversée d'une interface  $i$ ; le débit se conserve:

$$\vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = \vec{v}_2 \cdot d\vec{S} \iff$$

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot d\vec{S} = 0 \iff$$

$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  est  $\perp d\vec{S}$  donc parallèle à l'interface (et donc est porté par celle-ci)

( $d\vec{S}$  est  $\perp i$ )

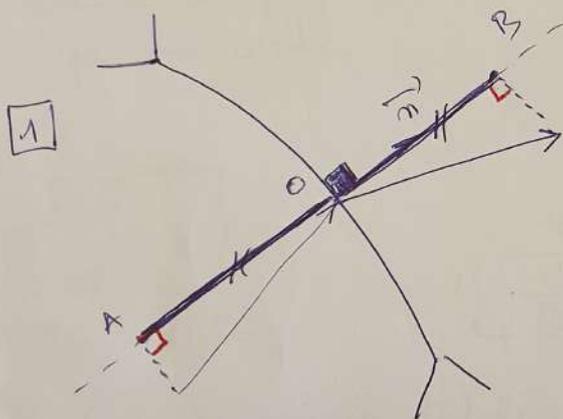


33

2) A la traversée d'une interface, la composante normale de la vitesse se conserve; en effet; il y a conservation du débit; donc:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 &= \vec{V}_2 \cdot d\vec{S} & \text{donc} \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{m} &= \vec{V}_2 \cdot \vec{m} & (\vec{n} \text{ le vecteur normal de l'interface}) \end{aligned}$$

donc:  $V_{1n} = V_{2n}$   
 $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  ont donc la même composante normale

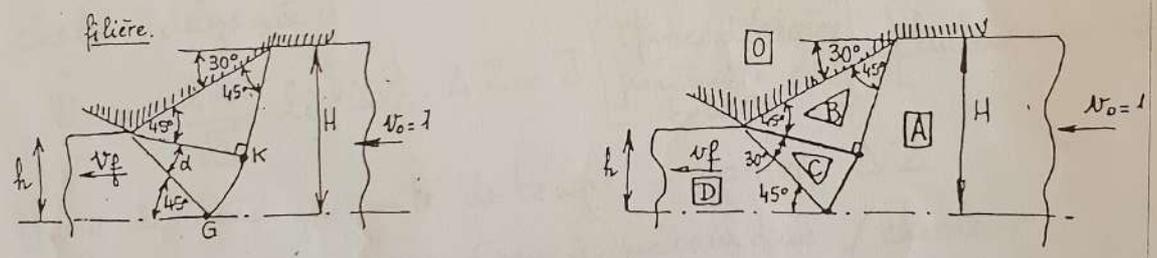


$$(OA = OB)$$

3) A la traversée d'une interface, il y a dissipation d'énergie qui s'accompagne d'un échauffement de la matière. Cet échauffement peut être considéré comme adiabatique (c'est à dire sans échange de chaleur avec l'extérieur) à condition que l'opération se fait rapidement, ce qui est le cas du filetage et du forage par exemple. En outre les transferts par radiation et conduction sont insignifiants.

TD  
Extrusion d'une plaque  
Borne Supérieure - Hodographe des vitesses  
développement graphique  
Évaluation de la distribution des températures

Problème: La théorie des lignes de glissement a été appliquée au cas de l'extrusion d'une plaque, en condition de déformation plane. Elle a permis de trouver les positions des lignes pour lesquelles le cisaillement est maximal (voir fig). On se propose de simplifier cette configuration: l'arc GK est remplacé par une corde.



I - Calcul de la puissance totale:

- Tracer l'hodographe des vitesses (référentiel  $\square$  filière) et en déduire le vitess dans la région  $\square$ .
- Déterminer graphiquement les composantes normale des vitesses aux interfaces.
- Déterminer graphiquement les longueurs de contact ( $l_i$ ).
- Calculer la puissance totale en faisant l'hypothèse d'un frottement de Tresca:  $\tau = \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}}$

II - Calcul des températures d'échauffement:

L'énergie externe fournie lors d'un processus de mise en forme est pas que entièrement dissipée sous forme de chaleur, et si le processus de mise en forme est rapide

il peut être considéré comme adiabatique: transferts par radiation et conduction insignifiants.  
 selon la méthode de la borne supérieure, les mouvements relatifs au sein de la matière se produisent uniquement dans les plans où il y a discontinuités de vitesses (tangentielle).  
 C'est dans ces interfaces que l'énergie interne  $W_i$  est dissipée; un échauffement local peut donc y apparaître et on peut relier l'amplitude de la vitesse tangentielle relative à un "saut" de température.

Considérons une ligne de discontinuité thermique ou de vitesse, le saut de température est  $\Delta T$ , nous faisons l'égalité de l'énergie interne dissipée par unité de temps ( $W_i$ ) et de la quantité de chaleur dégagée:

$$W_i = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{ li } \Delta v_i \cdot \Delta Z = J \left[ \begin{matrix} \text{Masse déplacée} \\ \text{par unité de} \\ \text{temps} \end{matrix} \right] \times \left[ \begin{matrix} \text{chaleur massique} \\ \times \Delta T \end{matrix} \right]$$

Masse déplacée par unité de temps =  $\rho H v_0 \Delta Z$

J: facteur de conversion énergie mécanique / chaleur

donc:  $\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{ li } \Delta v_i \Delta Z = J \rho H v_0 \Delta Z c \Delta T$

avec:  $\text{li} \sin \phi = H$  (voir figure ci-contre)

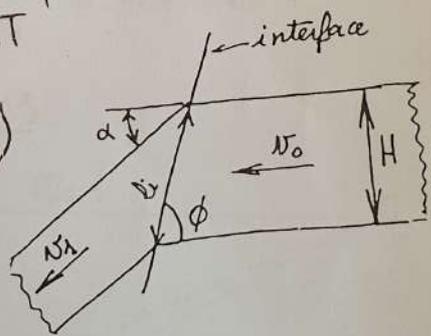
$$\Rightarrow \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta v_i}{\sin \phi} = J \rho v_0 c \Delta T$$

d'où  $\Delta T = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{J \rho c} \frac{\Delta v_i}{v_0 \sin \phi}$

or:  $v_0 \sin \phi = v_N =$  composante normale de  $v_0$  (ou de  $v_i$ )

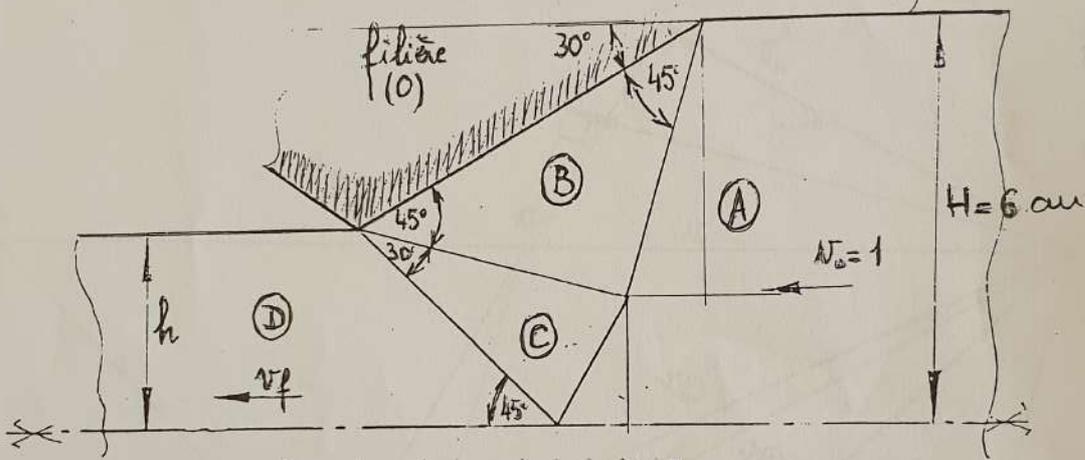
d'où:

$$\Delta T = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{J \rho c} \cdot \frac{\Delta v_i}{v_N}$$



Calculer la température dans chaque bloc, sachant que la plaque d'acier est préchauffée à  $680^{\circ}\text{C}$  (à l'entrée) et qu'à cette température elle possède les propriétés suivantes:  
 $\sigma_0 = 175 \text{ MPa}$ ;  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$  et  $c = 620 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$   
 $J = 1 \text{ mN/Toule}$ ;  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ .

Diagramme physique

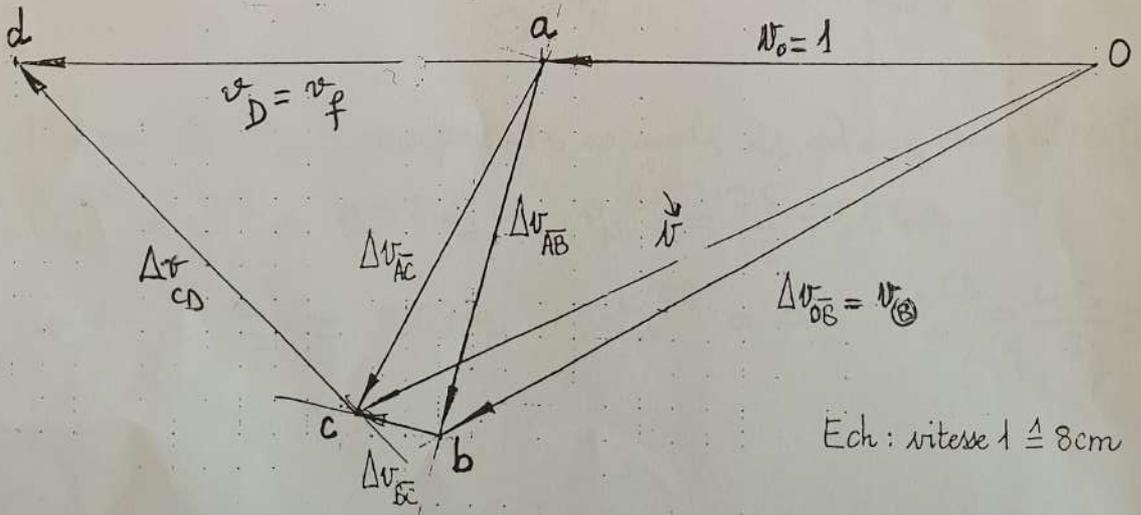


mesure des longueurs

$H = 2h$   
 Ech:  $H \cong 6 \text{ cm}$

$AB = 4,2/6 \cong 0,70H$      $BC = 4,2/6 = 0,70H$   
 $OB = 6/6 \cong H$      $CD = 4,2/6 = 0,70H$   
 $AC = 2,2/6 \cong 0,37H$

Hodographe des vitesses



Ech: vitesse 1  $\cong 8 \text{ cm}$

mesure des  $\Delta v_i$ : avec  $v_0 = \text{vitesse unitaire (8 cm)}$

$$\Delta v_{AB} = \frac{5,70}{8} \approx 0,71 v_0$$

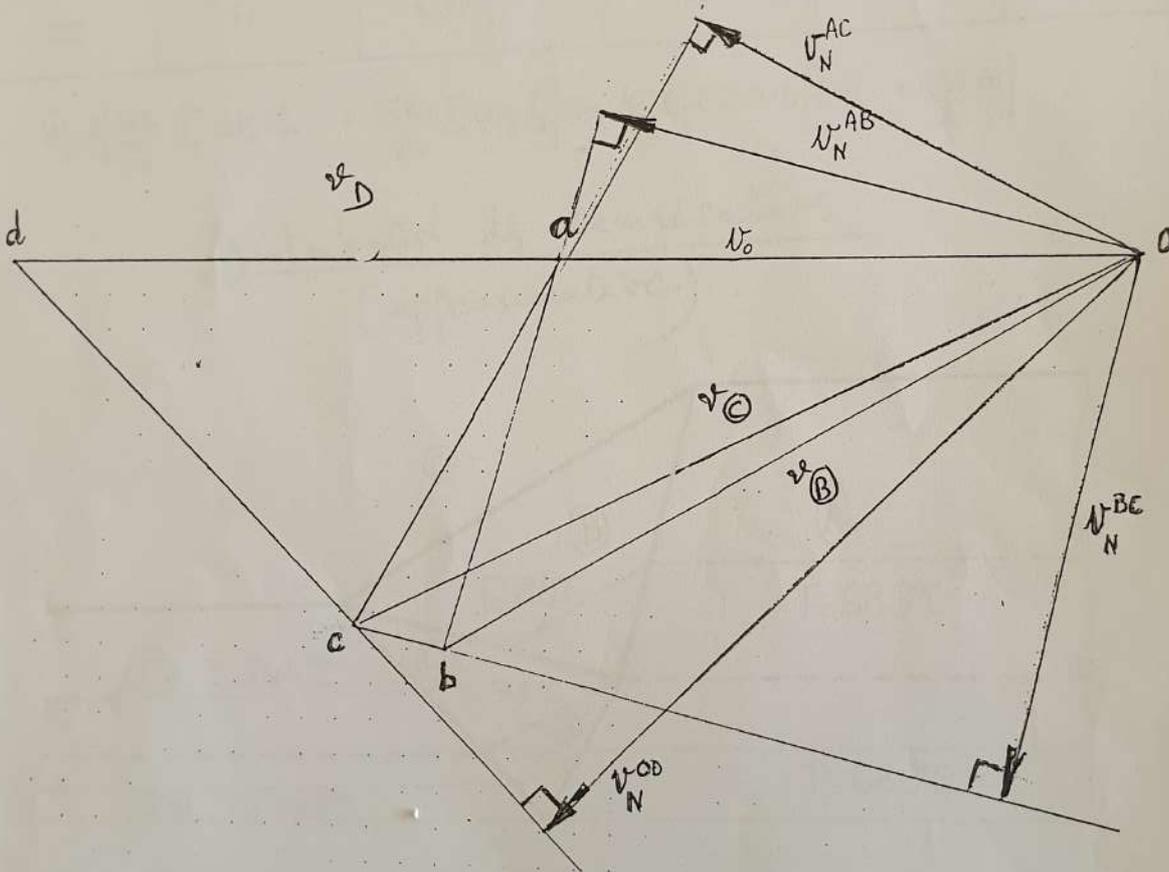
$$\Delta v_{BC} = \frac{1,30}{8} \approx 0,16 v_0$$

$$\Delta v_{AC} = \frac{5,90}{8} \approx 0,74 v_0$$

$$\Delta v_{OB} = \textcircled{1} = \frac{10,95}{8} \approx 1,37 v_0$$

$$\Delta v_{CD} \approx \frac{7,35}{8} \approx 0,92 v_0$$

Hodographe des vitesses  
(composantes normales aux interfaces)



Mesure de  $v_N$ : composantes normales des vitesses aux interfaces

$$v_N^{AB} = \frac{7,8}{8} = 0,97 v_0$$

$$v_N^{BC} = \frac{7,5}{8} = 0,94 v_0$$

$$v_N^{AC} = \frac{7}{8} \approx 0,87 v_0$$

$$v_N^{OB} = 0$$

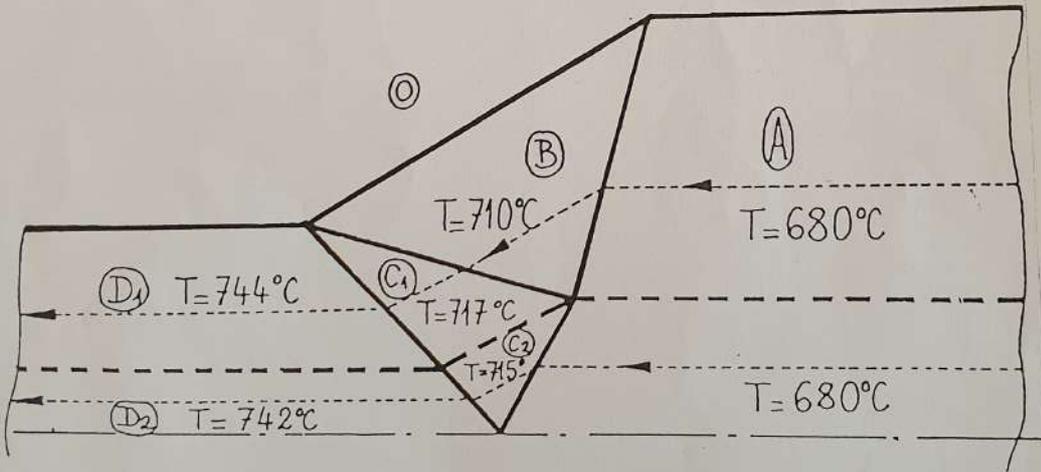
$$v_N^{CD} = \frac{11,3}{8} \approx 1,41 v_0$$

Bilan : vitesse, puissance totale.

Interfaces	longueurs mesurées (li)	composantes tangentielle ( $\Delta v_i$ )	composantes normales ( $v_N$ )	$\Delta v_i / v_N$	$\Delta T = \delta(\Delta v_i / v_N)$
AB	0,70 H	0,71 $v_0$	0,97 $v_0$	0,73	30°C
AC	0,37 H	0,74 $v_0$	0,87 $v_0$	0,85	35°C
BC	0,70 H	0,16 $v_0$	0,94 $v_0$	0,17	7°C
CD	0,70 H	0,92 $v_0$	1,41 $v_0$	0,65	27°C
OB	H	1,37 $v_0$	0	$\infty$	

$$\dot{W}_E = 2 \left[ \frac{2\sigma_e}{\sqrt{3}} \sum \Delta v_i \cdot l_i + \frac{\bar{m}\sigma_e}{\sqrt{3}} \sum \Delta v_j \cdot l_j \right] \Delta z = \frac{4\sigma_e}{\sqrt{3}} \cdot \Delta z \cdot H \cdot v_0 \left[ 1,52 + \frac{1,37 \bar{m}}{2} \right]$$

Distribution de températures (approximative)

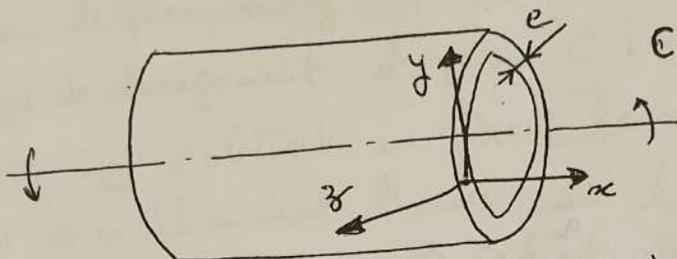


----- trajectoires de particules dans les différents zones

V

## exercice

Un tube mince et soumis à une pression interne  $p$  et à un couple de torsion  $C$ .



Trouver les contraintes et directions principales par la méthode analytique. Représenter les trajectoires de changements à couple constant et à pression constante. Que se passe-t-il si on choisit une loi  $f(C, p) = 0$ ?

Calculer la limite d'écoulement et représenter la surface de charge dans le plan  $(C, p)$ . On étudiera le cas du tube ouvert et du tube fermé que l'on compare. Conclusion?

Solution:

I-A - Tube ouvert : on pose :  $c^* = C / (2\pi r^2 e)$  ;  $p^* = \frac{Pr}{e}$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & c^* & 0 \\ c^* & p^* & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & c^* & 0 \\ c^* & p^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ car } p \ll p^*$$

La résolution de l'équation caractéristique donne :

$$\sigma_{I,III} = \frac{p^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^*}{2}\right)^2 + c^{*2}} ; \sigma_{II} = 0$$

Les cosinus directeurs des trois directions principales s'obtiennent par la résolution du système d'équations :

$$\bar{\sigma} \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i l_i \\ \sigma_i m_i \\ \sigma_i n_i \end{pmatrix} \text{ et } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

(avec :  $i = I, II, III$ )

on trouve :  $l_{II} = m_{II} = 0$  ;  $n_{II} = 1$

et  $l_I = \frac{\pm c^*}{\sqrt{c^{*2} + \sigma_I^2}}$  ;  $m_I = \frac{\pm \sigma_I}{\sqrt{c^{*2} + \sigma_I^2}}$  ;  $l_{III} = \frac{\pm c^*}{\sqrt{c^{*2} + \sigma_{III}^2}}$

$$m_{III} = \frac{\pm v_{III}}{\sqrt{c^{*2} + \sigma_{III}^2}} ; n_I = n_{III} = 0$$

L'axe 3 est donc une direction principale (correspondant à la contrainte principale nulle); les deux autres directions principale sont dans le plan xy.

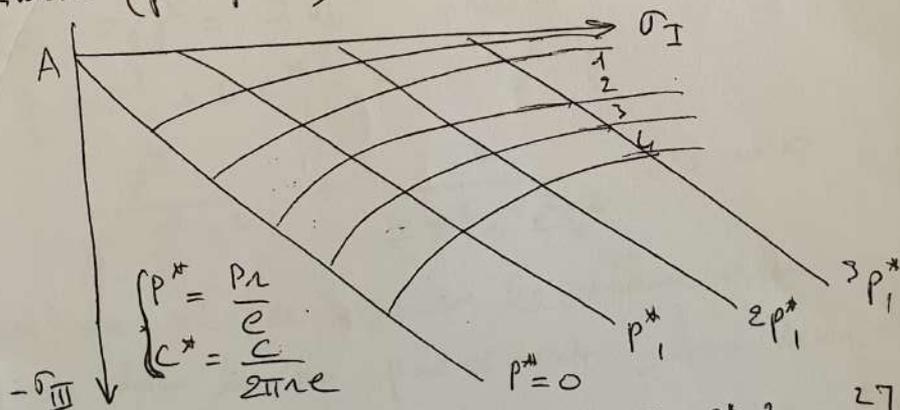
Le trajet de chargement à p ou c constant, dans l'espace plan  $(\sigma_I, \sigma_{III})$  s'obtient en fixant la valeur d'un de ces deux paramètres et en éliminant l'autre entre les équations de liait aux contraintes  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$ . On obtient ainsi un "lieu" qui est constitué en fait de deux séries de courbes. Dans le cas où l'on connaît une loi de chargement  $f(c, p) = 0$ , on pourra éliminer directement les deux paramètres et trouver un seul lieu; le trajet de chargement.

IA1 - Trajet à pression constante:

$$\sigma_I = \frac{P_1^*}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_1^*}{2}\right)^2 + c^{*2}} ; \sigma_{III} = \frac{P_1^*}{2} - \sqrt{\left(\frac{P_1^*}{2}\right)^2 + c^{*2}}$$

on a facilement:  $\sigma_I + \sigma_{III} = P_1^* = \text{constante}$

Equation d'une famille de droites parallèles à la 2<sup>ème</sup> bissectrice de  $(\sigma_I, \sigma_{III})$ . Cette bissectrice appartient d'ailleurs à cette famille (pour  $p = 0$ ).



IA2 - On a: 
$$\begin{cases} (\sigma_I - \sigma_{III})^2 = 4 \left[ \left(\frac{P_1^*}{2}\right)^2 + c_1^{*2} \right] \\ \sigma_I + \sigma_{III} = P_1^* \end{cases}$$

soit: 
$$(\sigma_I - \sigma_{III})^2 = 4 \left[ \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + c_1^{*2} \right]$$

$$k_{III} = \frac{+c^*}{\sqrt{c^{*2} + (\sigma_{III} - \frac{p^*}{2})^2}} \quad ; \quad m_{III} = \frac{+\sigma_{III}}{\sqrt{c^{*2} + (\sigma_{III} - \frac{p^*}{2})^2}}$$

1 B 1 - Trajet de chargement à pression constante;

on a facilement:  $\sigma_I + \sigma_{III} = \frac{3p^*}{2} = \text{constante}$

On a encore une famille de droites parallèles à la 2<sup>e</sup> bissectrice de  $(\sigma_I, \sigma_{III})$ , mais leur équidistance est plus grande que dans le cas du tube ouvert.

1 B 2: Trajet de chargement à couple constant:

$$(\sigma_I - \sigma_{III})^2 = 4 \left( \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 + 4c_1^{*2}$$

$$\text{soit: } \sigma_I^2 + \sigma_{III}^2 - 2,5 \sigma_I \sigma_{III} - 4,5 c_1^{*2} = 0$$

Il s'agit d'hyperboles dont les asymptotes sont les droites d'équations:

$$(\sigma_I - 2\sigma_{III})(\sigma_{III} - 2\sigma_I) = 0$$

Ces asymptotes appartiennent à la famille (pour  $c_1^* = 0$ ).

Compte tenu de la forme de l'ellipse de Von Mises, ceci permet d'atteindre de plus fortes pressions avec un tube fermé.

1 B 3: limite d'écoulement:

$$\sum (\sigma_i - \sigma_j)^2 = 2\sigma_0^2 \quad \text{soit}$$

$$\frac{3}{2} p^{*2} + 6 c_1^{*2} = 2\sigma_0^2$$

$$\text{soit: } \frac{p^2}{\frac{4}{3} \frac{e^2}{r^2} \sigma_0^2} + \frac{c^2}{\frac{4}{3} \pi^2 r^4 \frac{e^2}{\sigma_0^2}} - 1 = 0$$

Il s'agit d'une ellipse ayant le même demi-axe suivant  $c$  que dans le cas précédent. Son demi-axe suivant  $p$  vaut:  $\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{e}{r}$ . Le rapport des pressions limites à couple nul est donc:

$$\frac{P(\text{limite tube fermé à } c=0)}{P(\text{limite tube ouvert à } c=d)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

# Le filage à chaud

## et

### Applications

(Méthode des Blocs Rigides)

#### B - APPLICATION AU FILAGE A CHAUD

##### XI.5 - Phénomènes physiques du filage à chaud.

##### XI.5.1 - Ecoulements avec et sans zone morte.

La géométrie de base du filage avant a été décrite précédemment.

Expérimentalement on observe une grande diversité de formes d'écoulement du métal en amont de la filière. Le plus souvent il apparaît une zone morte, qui peut être peu étendue ou au contraire remonter jusqu'au grain de poussée et dans d'autres cas, il n'y a pas de zone morte du tout. Il est difficile d'établir la loi selon laquelle la dimension de la zone morte varie car, en pratique, beaucoup de paramètres changent simultanément :

- la nature du métal, donc son comportement rhéologique, thermique et tribologique (y compris les propriétés des oxydes),
- la lubrification, en général inexistante pour les alliages d'aluminium et de cuivre, et réalisée au verre pour les aciers,
- le rapport de filage qui peut varier de 10 à 1000 selon les fabrications,
- il est probable que la forme du produit (barre, tube, profilé, ...) joue aussi. Dans tout ce chapitre, nous nous intéresserons seulement au cas, a priori le plus simple, d'un filage de barre axisymétrique.

Typiquement, on observe les comportements suivants :

- Cas du filage non lubrifié (aluminium, cuivre et leurs alliages respectifs) :

Il existe trois formes d'écoulement illustrées par les photos de la figure XI.7.

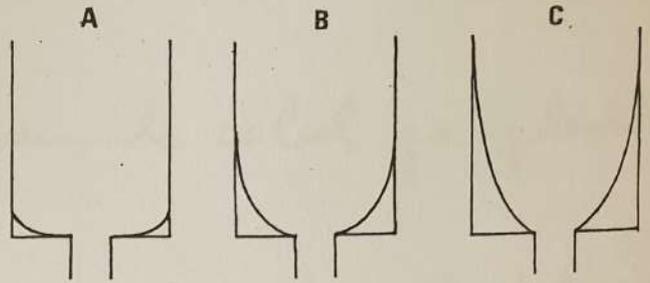
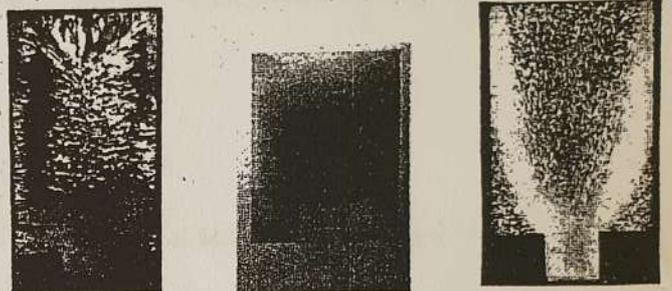


Fig. XI.6.



a) cuivre à 800°C (d'après (1))  
 b) AU4 G1 à 450°C  
 c) laiton 70-30 à 800°C (d'après (1))

Fig. XI.7.

- Cas du filage lubrifié (filage hydrostatique, aciers lubrifiés au verre) :

La billette ne présente pas de zone morte. La figure XI.8 a illustre le cas d'un rapport de réduction faible. Lorsque ce dernier est plus important, l'angle mort rempli par la gargousse de verre disparaît presque entièrement.

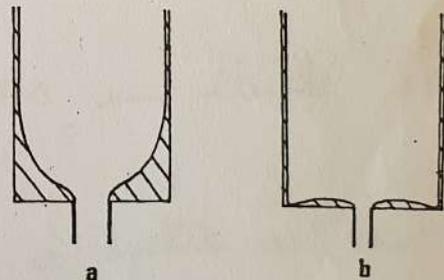


Fig. XI.8.

##### XI.5.2 - Influence du frottement et des gradients thermiques.

Certains de ces résultats ont été interprétés ([1], [3], [5])

- la dimension de zone morte observée pour l'aluminium serait la dimension naturelle correspondant à un frottement collant sur le conteneur et une température sensiblement homogène dans la billette en amont du convergent ; ceci est d'ailleurs vérifié par les observations faites par simulation plasticine (Cf. Fig. XIII.1).

- la taille beaucoup plus petite observée avec le cuivre serait due à un effet lubrifiant de l'oxyde de cuivre (réf. [1]) ; le métal aurait tendance à glisser le plus longtemps possible le long du conteneur ?