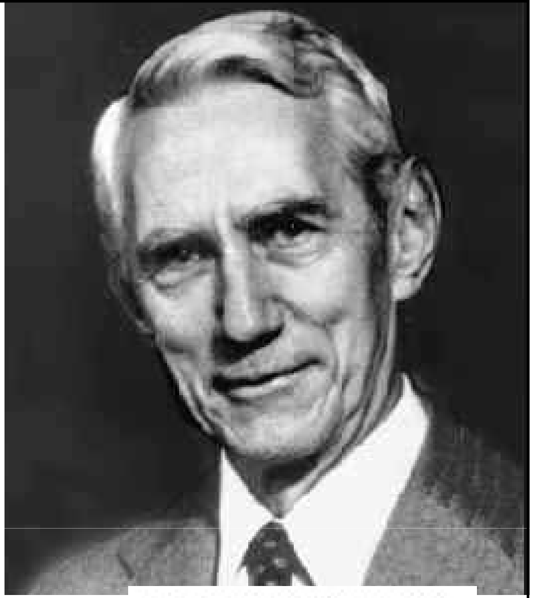

Jean Baptiste Joseph Fourier
1768 – 1830


Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)


Claude Shannon
(1916-2001)

Traitement du signal

A. ELAMRI

Traitement du signal

Sous ce nom se cache une discipline à la frontière entre mathématiques, électronique et informatique.

Conditionnement, compréhension et analyse du monde qui nous entoure seront les maitres mots de cours qui vous emmènera dans les secrets du **signal processing**

C'est une discipline qui est méconnue car elle se fond à l'intersection de plusieurs domaines scientifiques.

Les premiers développements trouvent leurs origines dans l'électronique et l'automatique.

Dans les années 1960, l'arrivée des ordinateurs et le début de la numérisation des signaux font basculer la discipline dans l'informatique moderne.

Traitement du signal

Ce cours a pour objectif de vous faire découvrir les bases de **la théorie du signal** qui a pour but principal la description mathématique des signaux.

Le traitement du signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'informations.

Son but est donc de réussir à extraire un maximum d'information utile sur un signal perturbé par du **bruit** en s'appuyant sur les ressources de l'électronique et de l'informatique

Traitement du signal

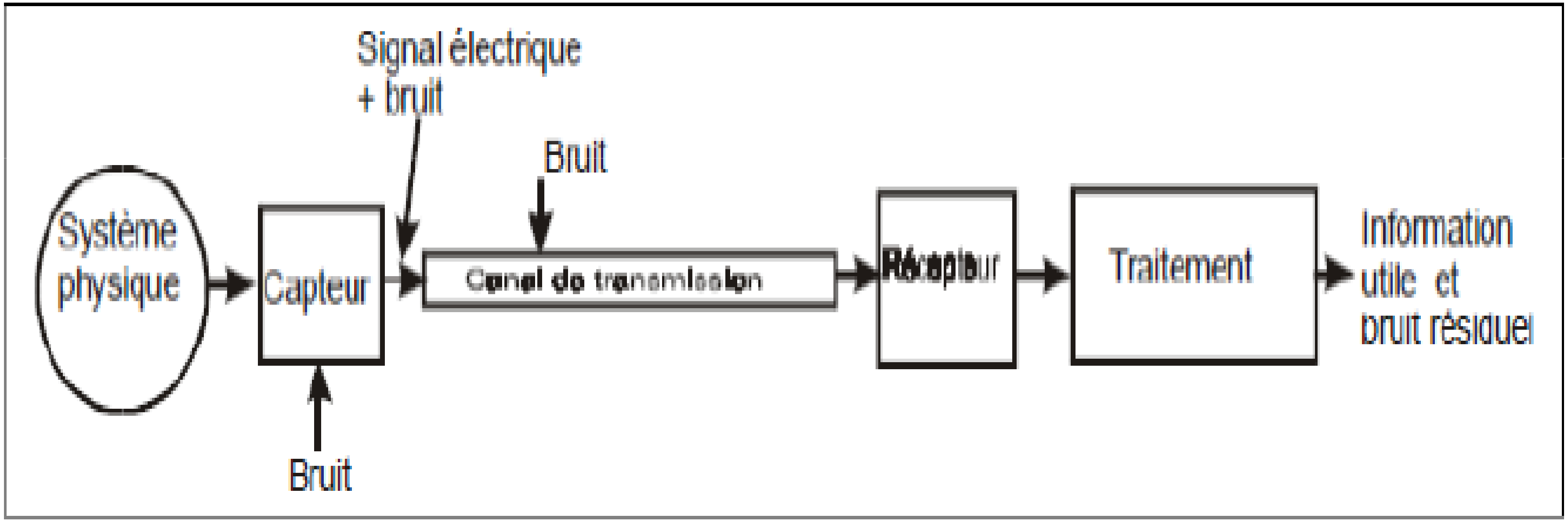
Signal: représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire. La description mathématique des signaux est l'objet de la théorie du signal. Elle offre les moyens d'analyse, de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

Bruit: Phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

Traitement du signal: discipline technique a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information

Traitement du signal

Un système de mesure a de façon générale cette structure:



Le phénomène physique que l'on veut étudier est présenté à un capteur qui le transforme en un signal électrique tension ou courant, à ce niveau un bruit s'ajoute. Le signal transmis à travers le canal de transmission atteint le récepteur, puis il subit un traitement pour extraire l'information utile sans bruit

Classification des signaux

Plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

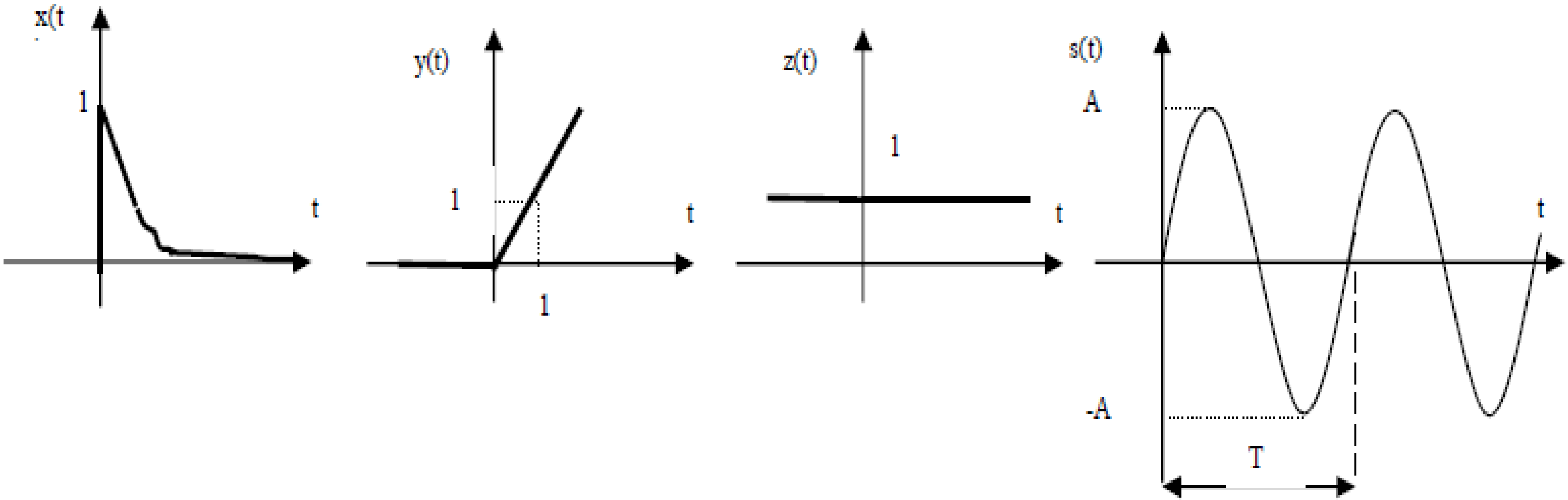
Deux types de signaux:

- **Les signaux déterministes**: ou signaux certains en fonction du temps peut être modélisé par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe :
  - Les signaux périodiques : x(t)=x(t+kT), T étant la période
  - Les signaux non périodiques
  - Les signaux transitoires,
  - Les signaux pseudo-aléatoires, etc…
- **Les signaux aléatoires**: leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

Classification des signaux

Exemples de signaux déterministes

- Périodiques : sinusoïdal $\rightarrow$ $s(t) = A \sin[(2\pi/T)t+\phi]$
- Non périodique: sont des cas particuliers
  - $x(t)= e^{-at}$ pout $t>0$ sinon $x(t)=0$
  - $y(t)= t$ pour $t>0$ sinon $y(t)=0$



Classification des signaux

Classification énergétique :

- Les signaux à énergie finie: il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie
- Les signaux à puissance moyenne finie: il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.

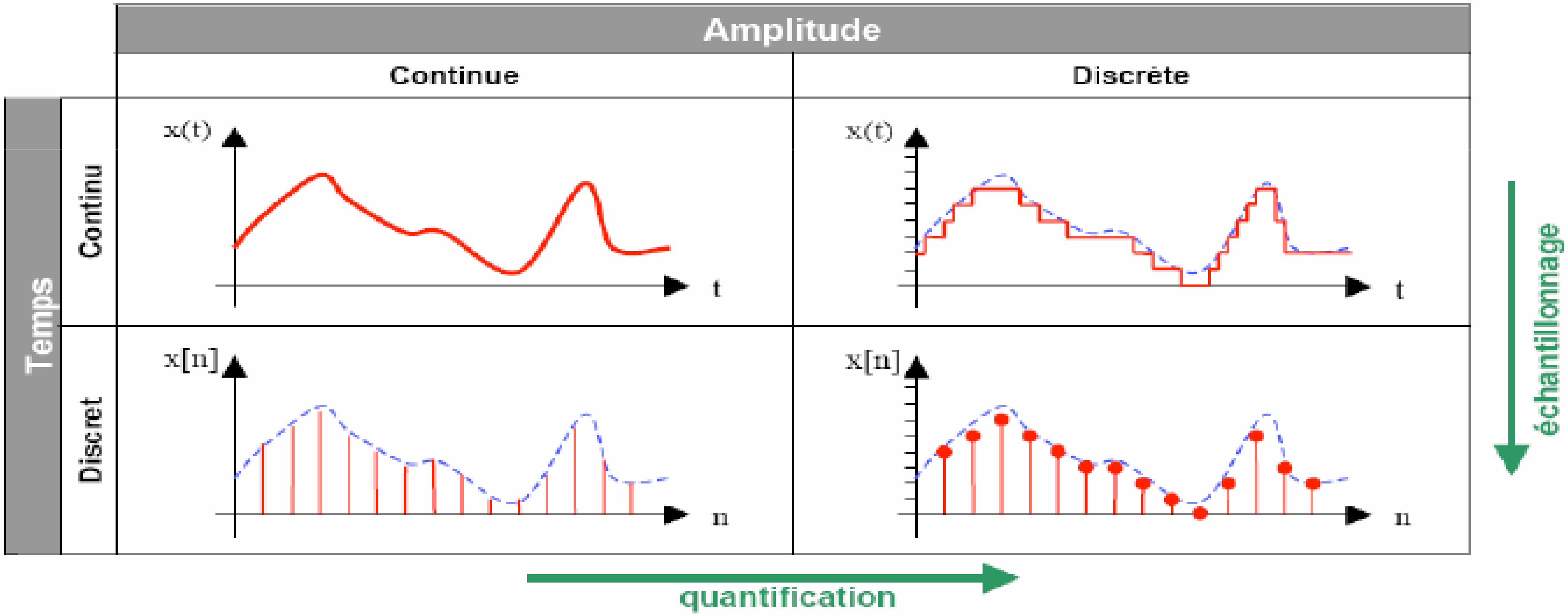
→ Rappels

- Energie d'un signal x(t) $\Rightarrow W_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$
- Puissance d'un signal x(t) $\Rightarrow P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$

Classification des signaux

Classification morphologique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète



On obtient donc 4 classes de signaux :

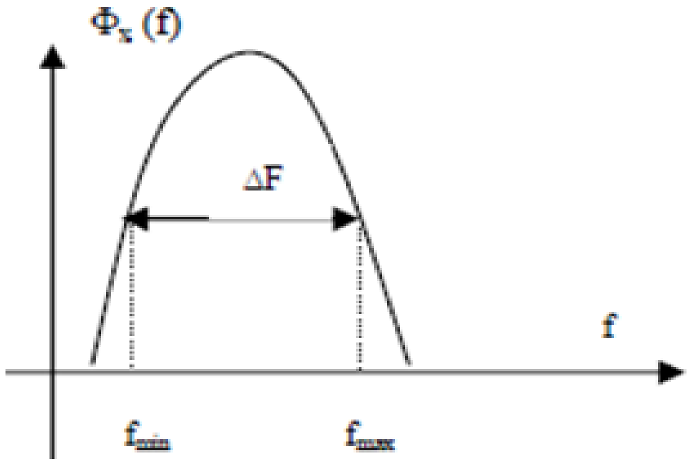
- **Les signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
- **Les signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- **Les signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
- **Les signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

Classification des signaux

Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution $\Phi_x(f)$ de son énergie ou de sa puissance en fonction de sa fréquence (spectre du signal).

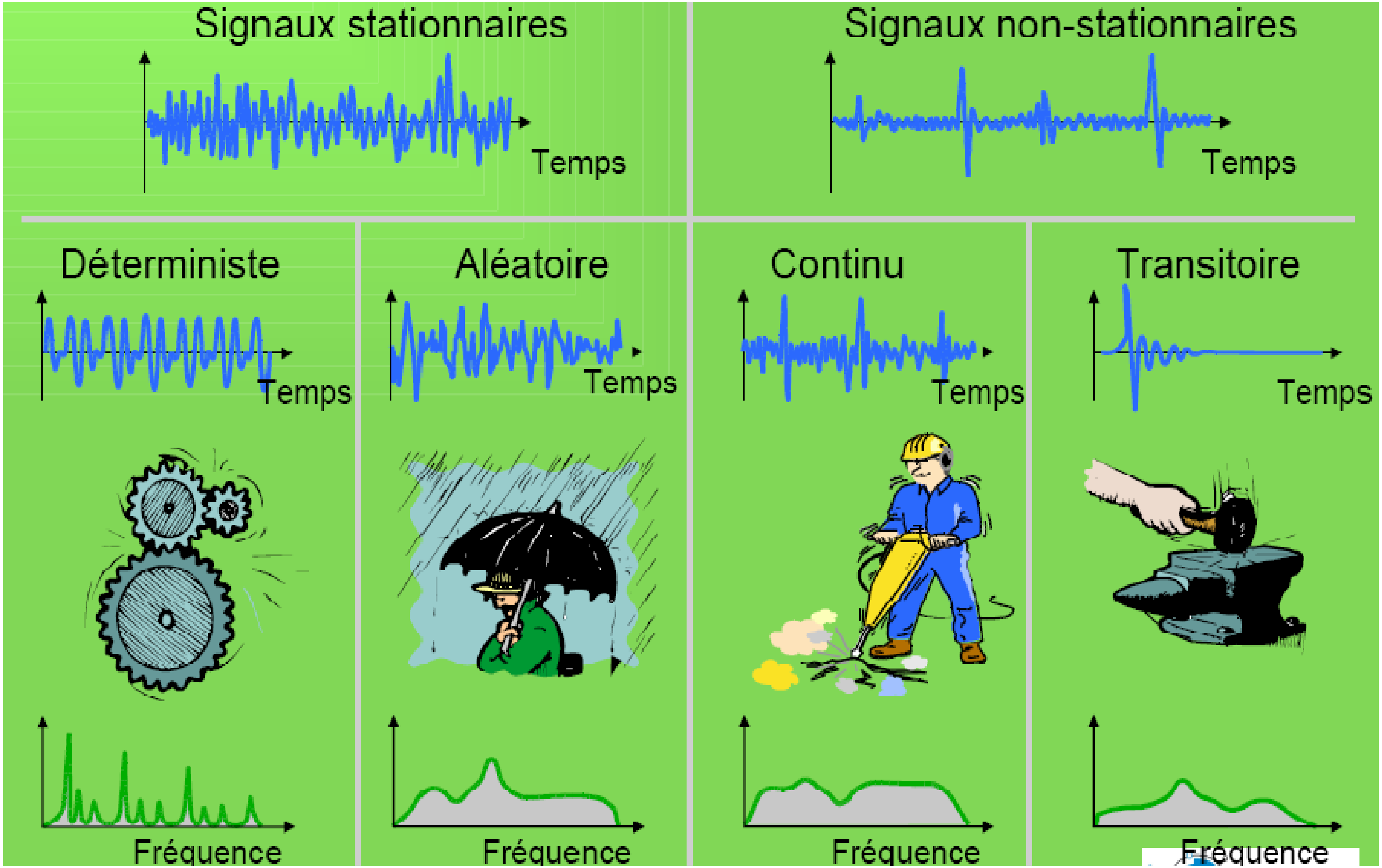
La largeur de bande Δf d'un signal est le domaine principal des fréquences (positives ou négatives) occupé par son spectre. Elle définie par la relation $\mathbf{\Delta f = f_{max} - f_{min}}$



On peut distinguer deux types de signaux

- Les signaux de basses fréquences
- Les signaux de hautes fréquences
- Les signaux à bandes étroite ($\mathbf{f_{max} \approx f_{min}}$)
- Les signaux à large bande avec ($\mathbf{f_{max} >> f_{min}}$)

Classification des signaux

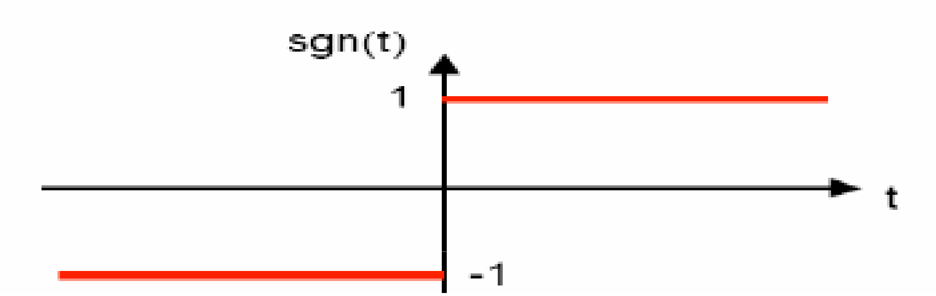


Classification des signaux

Signaux particuliers

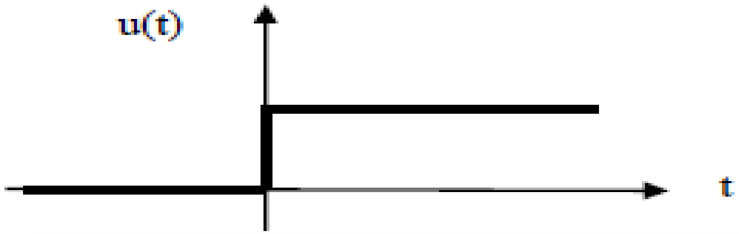
Fonction signe

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t > 0 \end{cases}$$



Fonction échelon

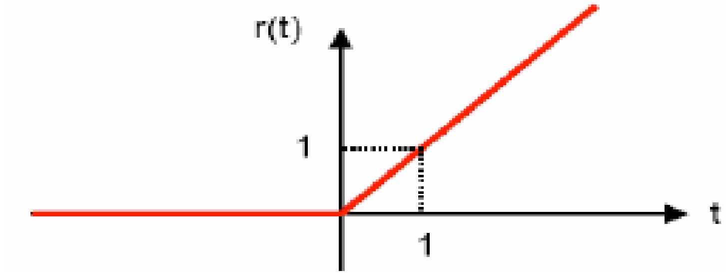
$$u(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ 1 & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$



Fonction rampe

Cette fonction est définie par :

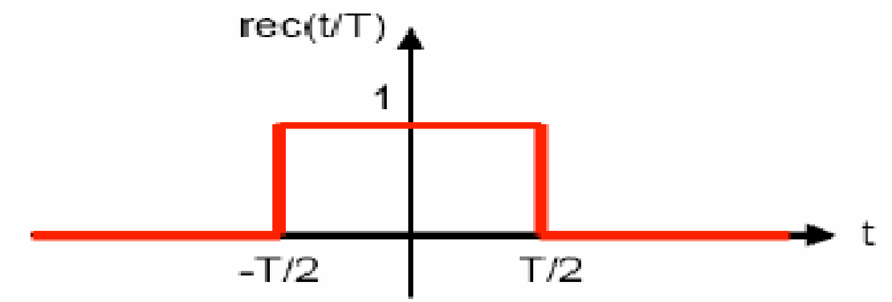
$$r(t) = t.u(t)$$



Fonction rectangulaire ou porte

Cette fonction est définie par :

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & pour \quad |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & pour \quad |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



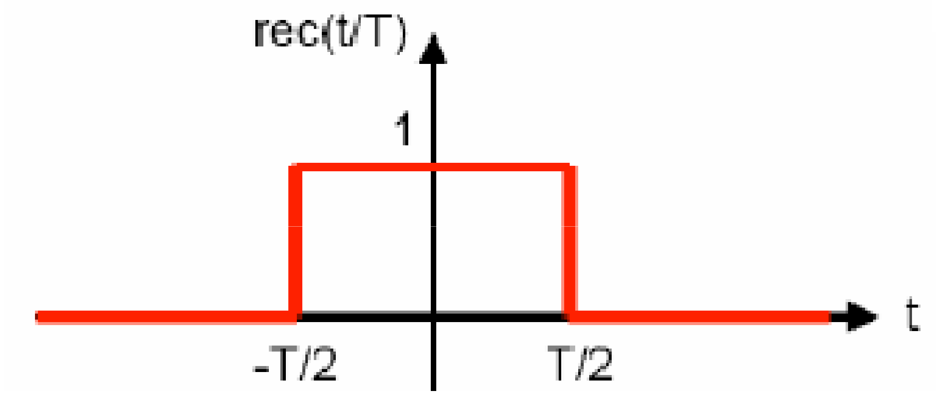
Classification des signaux

Signaux particuliers

Fonction rectangulaire ou porte

Cette fonction est définie par :

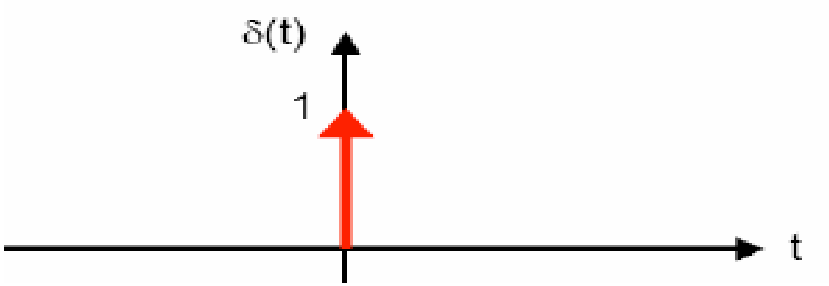
$$rect(t) = \begin{cases} 1 \quad pour \quad |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \quad pour \quad |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

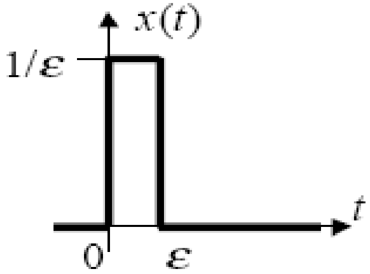


Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 \quad pour \quad t = 0 \\ 0 \quad pour \quad t \neq 0 \end{cases}$$



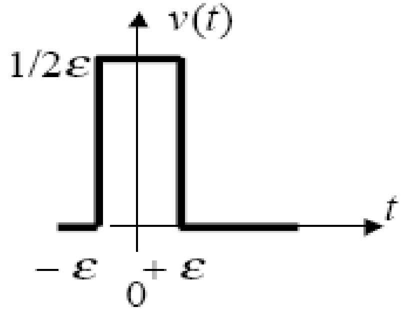


RECTANGLE

$$v(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ pour } t \in [0, \varepsilon]$$

$$v(t) = 0 \text{ pour } t \notin [0, \varepsilon]$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} [x(t)]$$



RECTANGLE

$$v(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \text{ pour } t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$$

$$v(t) = 0 \text{ pour } t \notin [-\varepsilon, +\varepsilon]$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} [v(t)]$$

Classification des signaux

Propriétés

- ***Intégrale***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

- ***Produit***

$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t) = x(0)$$
$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

- ***Identité***

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- ***Translation***

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$
$$x(t-t_1) * \delta(t-t_0) = x(t-t_1-t_0)$$

Classification des signaux

Signaux particuliers

Peigne de Dirac

On appelle *peigne de Dirac* une succession périodique d'impulsions de Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

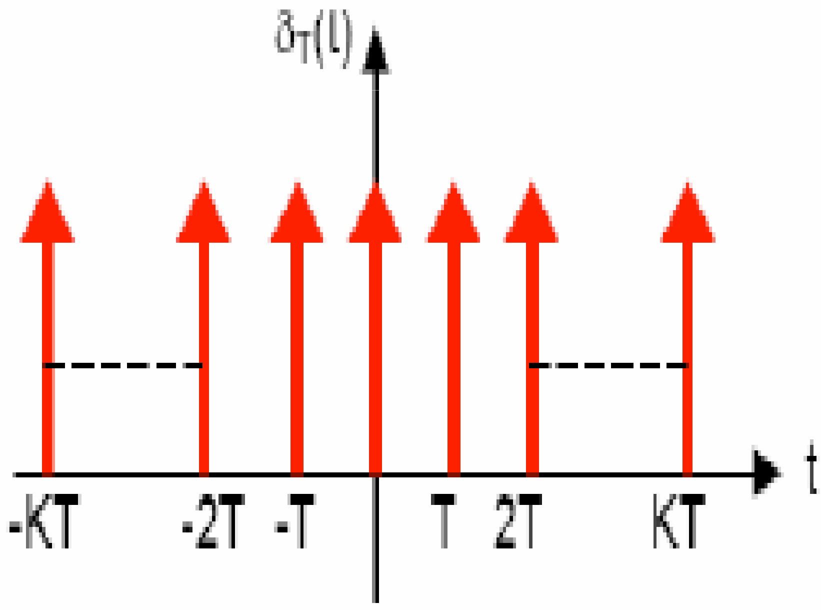


Figure (1.16): Peigne de Dirac.

T est la période du peigne.
Cette suite est parfois appelée *fonction d'échantillonnage* ou *train d'impulsions.*

Série de Fourier

Le Baron Fourier a montré à la fin du 18ème siècle que tout signal périodique pouvait se décomposer en somme de :

- un signal continu (la moyenne du signal périodique calculée sur une période)
- un signal sinusoïdal de fréquence fondamentale f (égale à l'inverse de la période du signal)
- des harmoniques de fréquences respectives *2f, 3f, ……,nf*

Le spectre obtenu sera donc un spectre « discret » ou spectre de raies qui n'existera que pour des valeurs entières de fois la fréquence fondamentale.

On appelle **série de Fourier de** f, la série : $S(f) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

avec : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, on a : $ao = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt$

et pour $n \geq 1$ $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\ dt$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \sin(n\omega t)\ dt$

Remarque : a_o est la valeur moyenne de *f.*

Série de Fourier

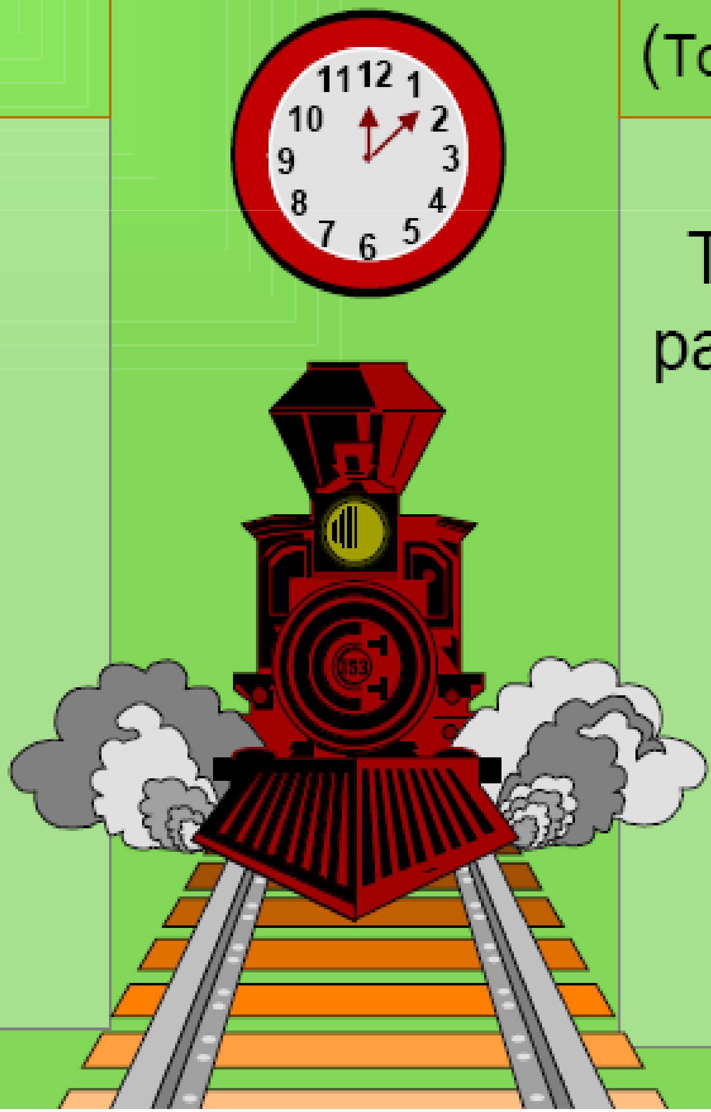
Temps

(Quand?)

.
.
.

06:10
06:30
06:50
07:10
07:30
07:50
08:10

.
.
.



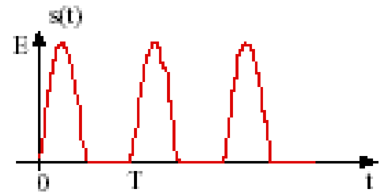
Fréquence

(Tous les combien de temps?)

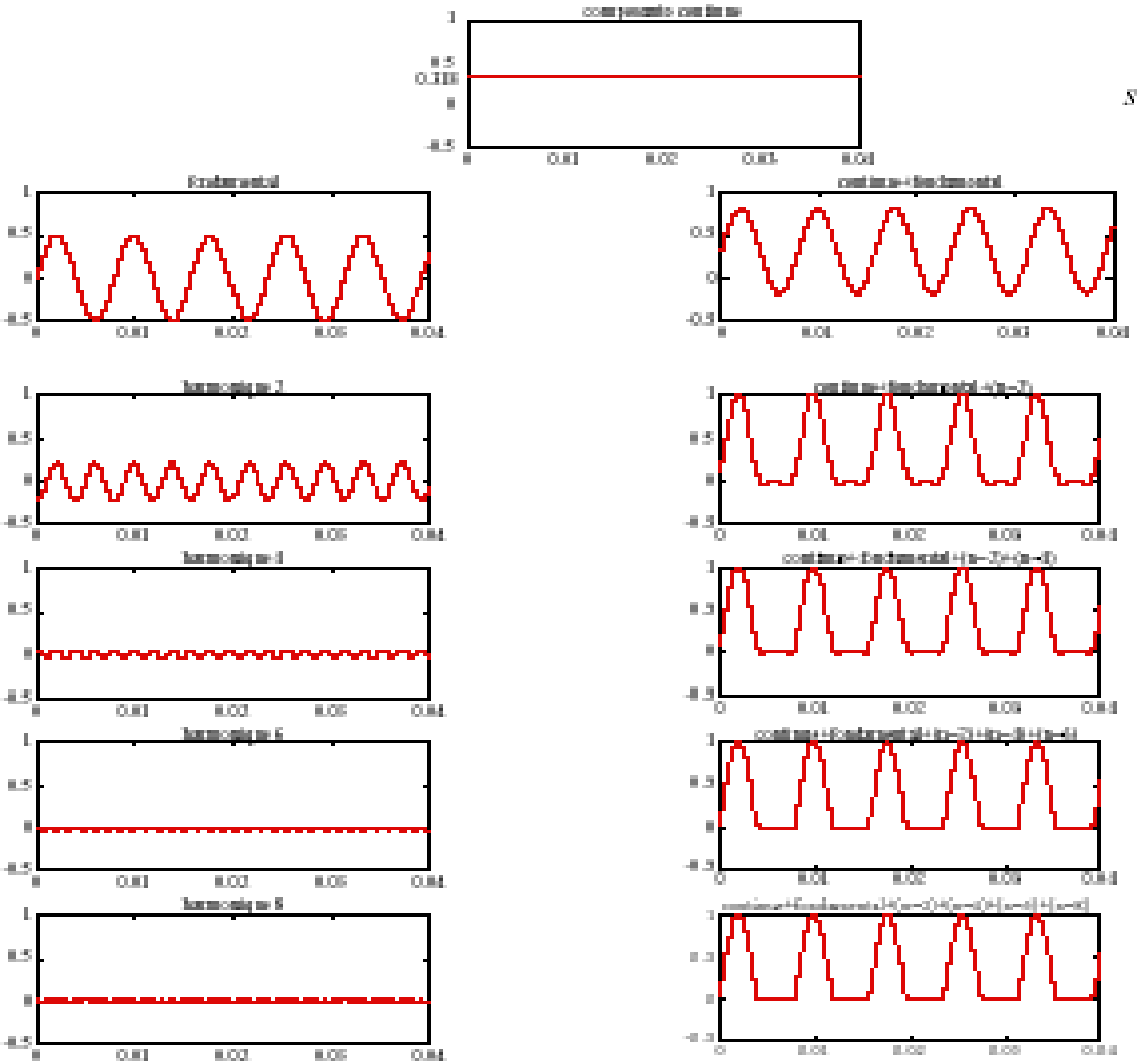
Trois fois par heure à partir de l'heure passée de 10 minutes

Série de Fourier

Reconstruction du signal alternatif monophasé



$$s(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin(\omega t) - \frac{2E}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2p\omega t)}{(4p^2-1)}$$



Transformée de Fourier

Fut introduit pour la première fois par le physicien français Joseph Fourier, pour ses travaux sur la conduction de la chaleur au XIX^{e} siècle. Depuis lors, il a longuement été développé, et des extensions en ont été proposées. Il existe plusieurs sortes de Transformées de Fourier, chacune adaptée aux classes de signaux qu'elle analyse, ou au type de signal qu'elle génère. On dénombre ainsi :

- une transformée continue pour les signaux à temps continu : la Transformée de Fourier à proprement parler ;
- une transformée continue pour les signaux à temps discret : la Transformée de Fourier à temps discret ;
- une transformée discrète pour les signaux périodiques à temps continu : le développement en série de Fourier, ou Transformée de Fourier au sens des distributions ;
- une transformée discrète pour les signaux à temps discret : la Transformée de Fourier Discrète.

Nous allons nous limiter, pour l'établissement des propriétés, à la Transformée de Fourier continue des signaux à temps continu.

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier **:** soit un signal *x(t)* à temps continu, tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt \quad \text{converge.}$$

On définit alors la transformée de Fourier de *x*, notée X(ν) ou TF[*x(t)*], par :

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi\nu t}\, dt$$

où *j* est tel que $j^2=-1$. La transformée de Fourier permet de mesurer le "contenu fréquentiel" d'un signal, à savoir la manière dont on peut le décomposer en une somme de sinusoïdes de fréquences ν.

Transformée de Fourier inverse **:** si de plus *x* est à *énergie finie*, cette relation est inversible en

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu t}\, d\nu$$

Transformée de Fourier

Ces deux définitions permettent de disposer de deux manières de définir complètement un signal qui satisfait aux conditions d'inversibilité de la transformée de Fourier. On peut le définir :

- soit par sa représentation temporelle ;
- soit par sa représentation fréquentielle.

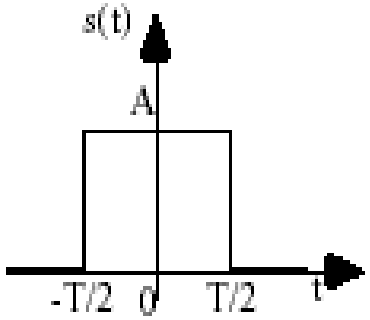
Ces deux domaines sont souvent appelés "duaux" car leurs variables *t* et *f* sont liées par *f=1/t*.

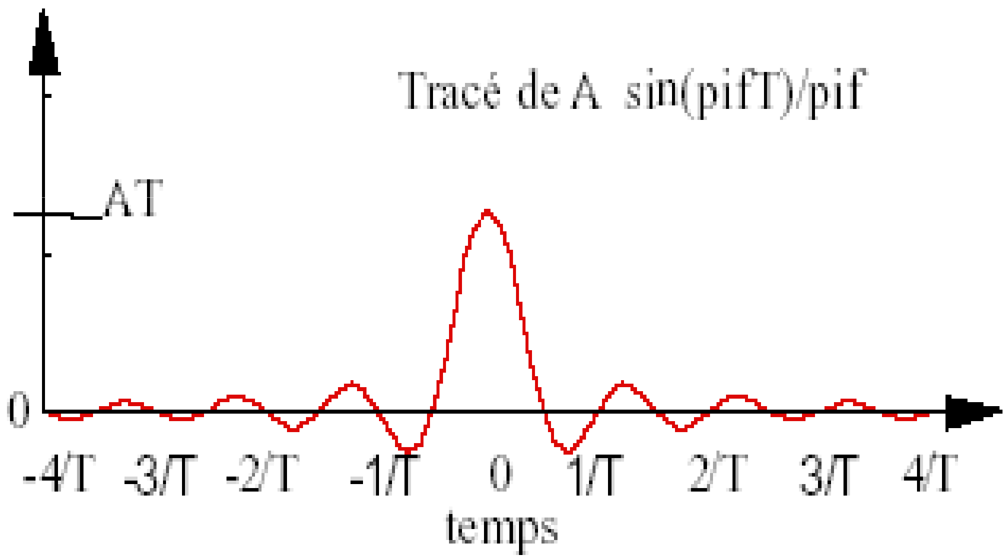
Spectre : on appelle spectre de *x* le *module* de la transformée de Fourier de *x* :

$$S(\nu) = \left| X(\nu) \right|$$

Transformée de Fourier

Exemple 1 : spectre d'un signal rectangulaire





$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-T/2}^{T/2}Ae^{-j2\pi ft}dt=A\left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right]_{-T/2}^{T/2}=A\left[\frac{e^{-j2\pi fT/2}-e^{j2\pi fT/2}}{-j2\pi f}\right]=\frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT)$$

Le spectre obtenu est un sinus cardinal

- *Largeur du lobe principal* : 2/T
- *Sommet du lobe principal :* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{f\to 0}\frac{A\sin(\pi fT)}{\pi fT}=AT$

Transformée de Fourier

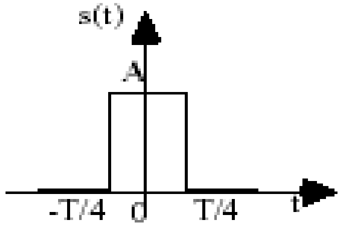
Exemple 1 : spectre d'un signal rectangulaire

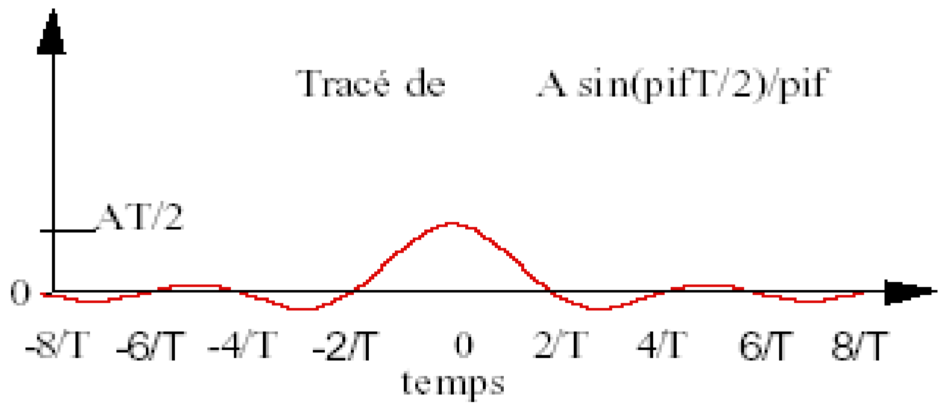
Pseudo-période : Pour $f \neq 0$, le sinus cardinal s'annule pour $sin(\pi fT)=0$ $\Leftrightarrow \pi fT=0 \pm k\pi \Rightarrow f=\pm k/T$

- *Largeur des lobes secondaires* : $1/T$
- *Sommets des lobes secondaires* : Les sommets sont atteints tous les $1,5/T \pm k/T$.

La valeur est :
$$\frac{A}{\pi(1,5/T \pm k/T)} \sin(\pi(1,5/T \pm k/T)T) = \frac{AT}{\pi(1,5 \pm k)} \sin(\pi(1,5 \pm k))$$

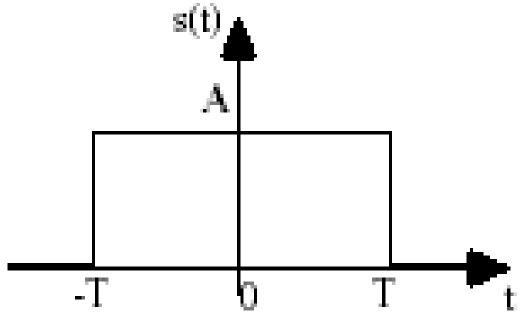
N.B. Lorsque la fenêtre rectangulaire se réduit, le sinus cardinal a tendance à s'étaler et les amplitudes décroissent :

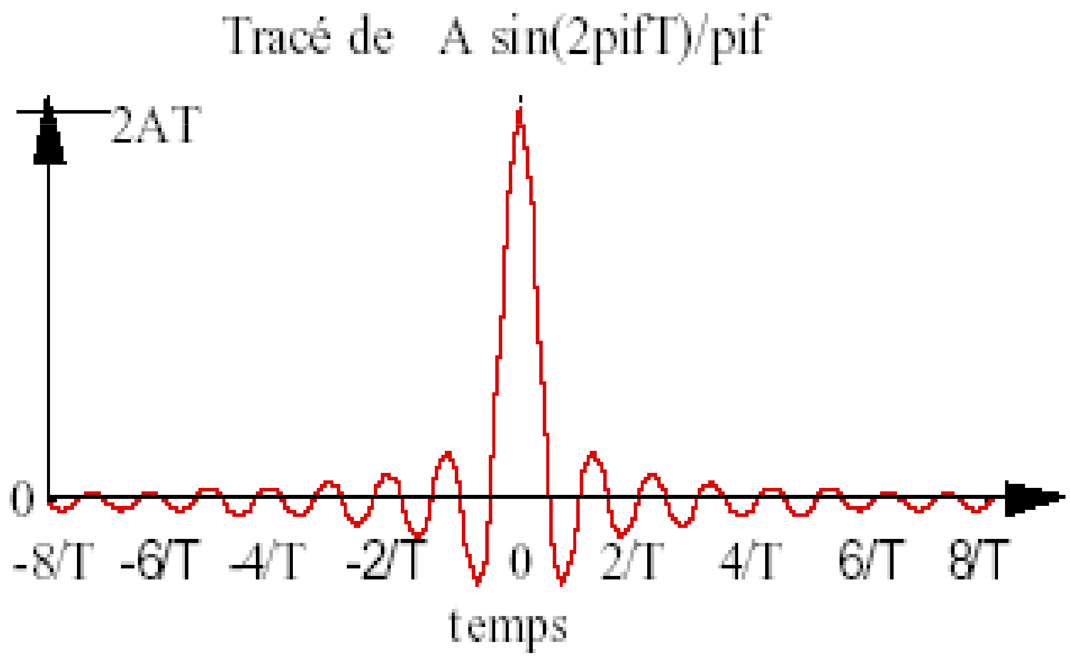




Transformée de Fourier

Au contraire, si la fenêtre est plus longue, le sinus cardinal se resserre et les amplitudes croissent :





Exemple 2 : spectre de l'impulsion de Dirac δ(t)

- La transformée de Fourier de δ(t) est la suivante :

$$F[\delta_1(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)\, e^{-j2\pi ft}\ dt = e^{-j0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)\ dt = 1$$

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité

Soit λ un nombre complexe quelconque. La linéarité de l'équation entraîne facilement que : $F(u(t)+\lambda\cdot v(t))=F(u(t)+\lambda\cdot F(v(t))=U(f)+\lambda\cdot V(f)$

De la même façon, on peut écrire pour la transformée de Fourier inverse : $$F^{-1}(U(f)+\lambda\cdot V(f))=F^{-1}(U(f)+\lambda\cdot F^{-1}(V(f))=u(t)+\lambda\cdot v(t))$$

Transformée de u(at) avec a réel ≠0

Soit v(t)=u(at), on effectue le changement de variables x=at, donc dx=a.dt

$$F(u(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(at)\, e^{-2\pi jft}\, dt = \frac{1}{|a|} U(\frac{f}{a})$$

Si t varie de -∞ à +∞, alors il faut discuter du signe de a :

- \- Si a > 0, x varie de -∞à +∞, la fonction sgn(a)=1 (signe de a = 1),
- \- Si a < 0, x varie de +∞à -∞, la fonction sgn(a)=-1

Transformée de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

Transformée de $u(t-t_0)$, autrement dit du signal u(t) décalé de la constante t_0. Pour résoudre ce problème, on effectuera le changement de variable $x = t-t_0$, d'où dx=dt.

$$F(u(t-t_o))=F(u(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi jf(x+t_o)}\,dx=e^{-2\pi jfto}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi jfx}\,dx=e^{-2\pi jfto}F(u(t))=e^{-2\pi jfto}U(f)$$

Transformée inverse de $U(f-f_0)$, autrement dit du spectre U(f) décalé de la constante f_0

En faisant la même démonstration que dans le cas précédent :

$$F^{-1}(U(f-f_o))=e^{2\pi jtfo}u(t)$$

Transformée de Fourier de U'(f)

$$F(u'(t))=2j\pi f\,U(f)$$

Transformée de Fourier

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightleftharpoons j2\pi f\, X(f).$$

Pour s'en convaincre, il suffit, comme souvent, de revenir à la définition :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df, \\
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f\, X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df, \\
&= \mathrm{TF}^{-1}\{j2\pi f\, X(f)\}.
\end{aligned}$$

Plus généralement, et sous réserve d'existence de la dérivée considérée et de sa TF,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j2\pi f)^n\, X(f).$$

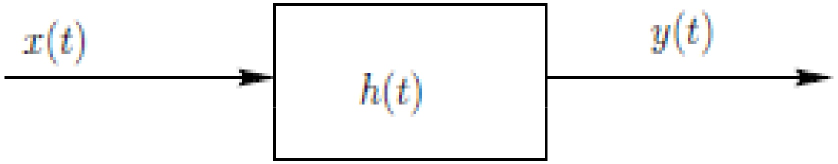
Table des Transformées de Fourier

$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1	1
1	$\delta(f)$	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$rect(t)$	$\sin c(f)$	$\sin c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\sin c(t)$	$rect(f)$	$rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\Lambda(t)$	$\sin c^2(f)$	$\sin c^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\sin c^2(t)$	$\Lambda(f)$	$\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
$te^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$
$e^{-\alpha\|t\|},\quad \alpha>0$	$\frac{2\alpha}{(\alpha^2+(2\pi f)^2}$	$\frac{2\alpha}{(\alpha^2+(\omega)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$\frac{d}{dt}\delta(t)$	$j2\pi f$	$j\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T_0}\right)$

Convolution et Filtrage

Produit de convolution

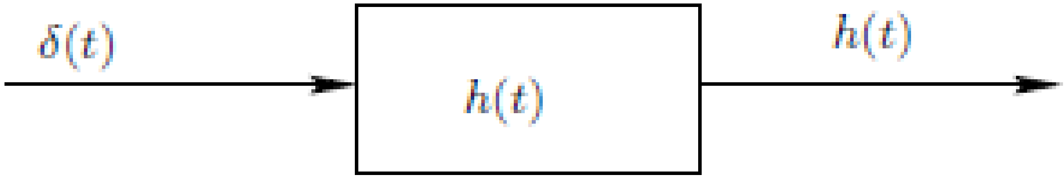
Le produit de convolution est un outil qui permet de trouver de manière simple la réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée



Sa réponse temporelle est donnée :

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = [x * h](t).}$$

h(t) représente la réponse impulsionnelle d'un système linéaire (comme un filtre,)



On appelle réponse impulsionnelle, souvent notée h(t), la réponse à l'application d'une impulsion de Dirac δ(t): δ(t)*h(t)= h(t)

Convolution et Filtrage

Propriétés

- Le produit de convolution est une bilinéaire (linéaire, commutatif et distributif par rapport à l'addition et associatif

$$f * (g_1 + \lambda g_2) = f * g_1 + \lambda (f * g_2)$$
$$(f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda (f_2 * g)$$
$$f * g = g * f$$
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

- **La fonction de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution** :

$$(f * \delta)(x) = f(x)$$

- **Translation de la fonction**

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$$
$$f(x - x_1) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0 - x_{1s})$$

- **Transformée du produit de convolution**

$$F(u(t) * v(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot v(t-x)\, e^{-2j\pi f t}\; dx\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot v(t-x)\, e^{-2j\pi f(t-x)}\, e^{-2j\pi f x}\; dxdt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{-2j\pi f x}\; dx \int_{-\infty}^{+\infty} v(t-x)\, e^{-2j\pi f(t-x)}\; dt = U(f) \cdot V(f)$$

Identité de Parseval

- Si $x(t) \rightleftharpoons X(f)$
- Alors

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, y^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, Y^*(f) \, df$$

Interprétation: L'énergie est un invariant de la transformée de Fourier ou encore "L'énergie totale s'obtient en sommant la contribution de toutes les harmoniques"

Transformée de la dérivée

On note $x'(t)$=dx/dt. Alors :

$$\mathrm{TF}[x'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

On effectue une intégration par parties en intégrant $x'(t)$ et en dérivant l'exponentielle complexe. On obtient alors :

$$\mathrm{TF}[x'(t)] = \left[x(t) e^{-j2\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Comme x est, physiquement, nécessairement nul à [(1)], et que l'exponentielle complexe y reste bornée, le premier terme de la somme devient nul et donc

$$\boxed{\mathrm{TF}[x'(t)] = j2\pi\nu X(\nu)}$$

[(1)] Un signal observé est toujours nul en -∞ car il n'était alors pas encore observé, et nul en +∞ car il ne l'est plus.

Echantillonnage

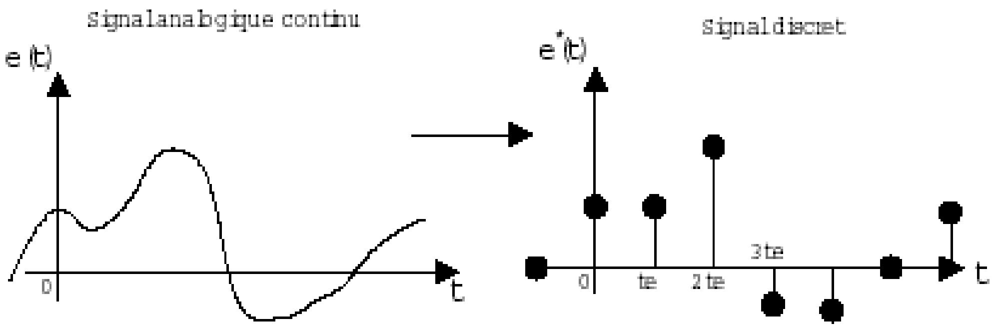
Mettre en place les outils mathématiques permettant de modéliser l'acquisition numérique de signaux analogiques, Le but est de comprendre :

- Le choix de *Te,* période d'échantillonnage.
- Le Choix de n, nombre de bit de code.
- L'influence de l'échantillonnage sur les propriétés d'un signal.

l'acquisition numérique ne doit pas détériorer le signal. On doit conserver au travers de la numérisation l'information utile : Voix : [0 - 20kHz] ; Vidéo [0- 6MHz]

De plus, il faut limiter l'espace mémoire nécessaire au stockage. En effet, il faut stocker « n*Fe » bits par seconde. On s'attachera dans une chaîne d'acquisition à minimiser cette valeur tout en ne détériorant pas le signal.

Acquisition des Signaux : Pour transformer un signal analogique en un signal numérique, il faut le discrétiser. On va donc prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret et permettre ainsi sa numérisation :

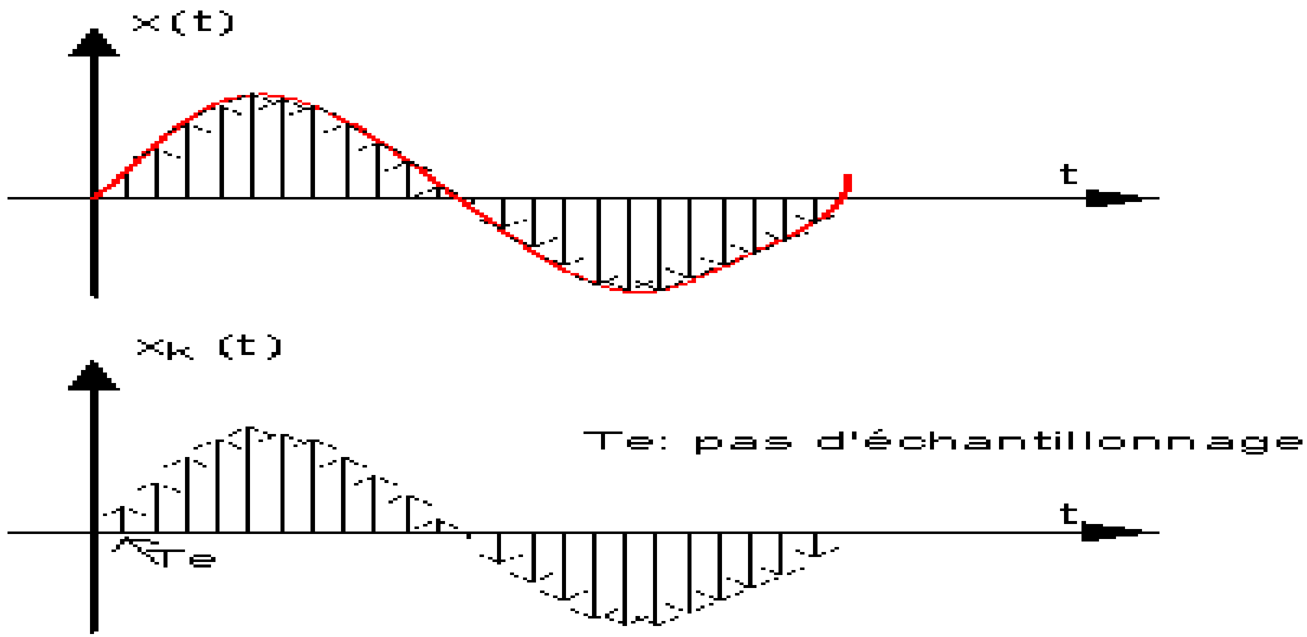


Echantillonnage

Définitions – Motivations

- Les signaux primaires d'informations sont pratiquement toujours analogiques (Amplitude et temps continu). Un ordinateur ou tout autre système électronique numérique est un dispositif qui traiter les données, c-à-d des suites de nombre.
- Il y a apparemment incompatibilité si on veut traiter un signal par voie numérique il faut le présenter au préalable par une suite de valeurs ponctuelles prélevées régulièrement ou irrégulièrement.

Définition : Echantillonner un signal : c'est prélever à intervalles de temps régulier T_e, la valeur instantanée de ce signal.



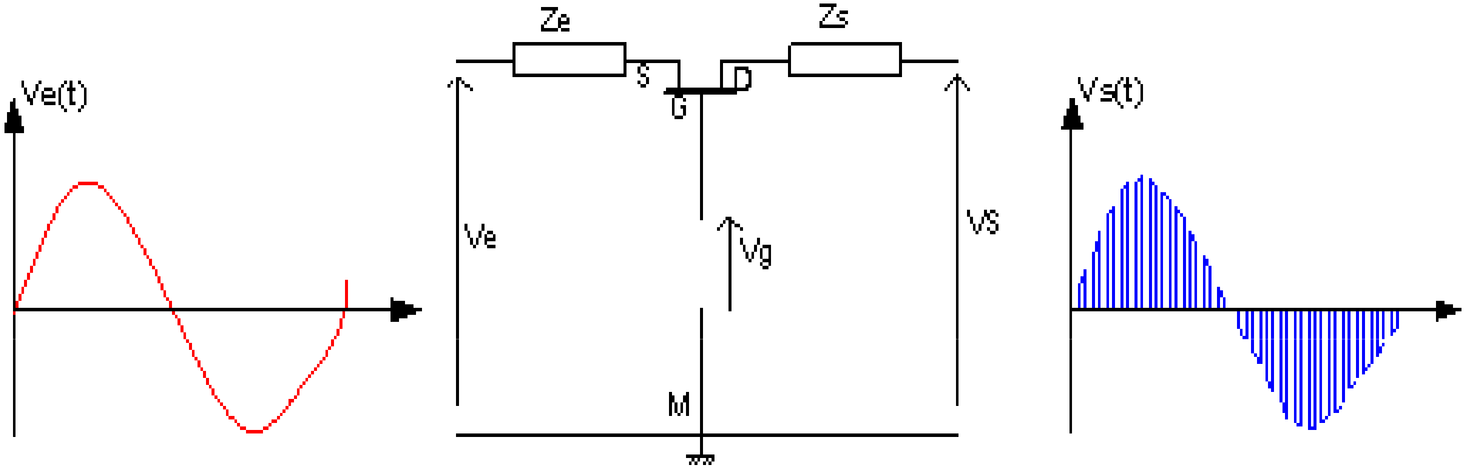
Echantillonnage

- La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de quantification et de codage, l'ensemble réalise une fonction de CAN
- Il existe, par ailleurs, des dispositifs tels que les circuits de transfert de charges et les filtres à capacités commutés qui travaillent naturellement avec des signaux échantillonnés
- Lorsqu'un signal doit être échantillonné, la première question à résoudre et de savoir si la transformation réalisée est réversible ou non. En d'autres termes doit-on pouvoir reconstituer les échantillons ultérieurs.
- Le 2ème cas sous entend, que seule une information partielle sur la nature du signal sera extraite par le traitement numérique.

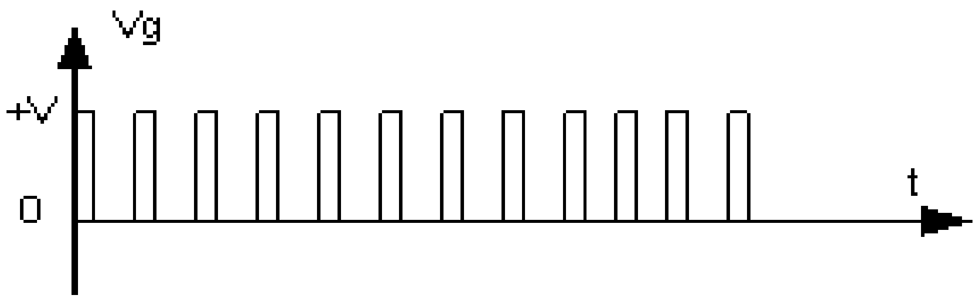
On peut assimiler l'opérateur d'échantillonnage à un opérateur de modulation AM travaillant avec une porteuse constituée par une suite périodique d'impulsions de Dirac. L'échantillonnage est associé à toutes les techniques de modulation d'impulsions

Echantillonnage

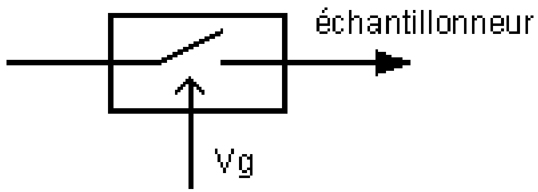
Echantillonnage à l'aide d'un FET



le signal de commande de l'échantillonneur appliqué entre G et M



le rôle du FET sera le même qu'interrupteur commandé par vg



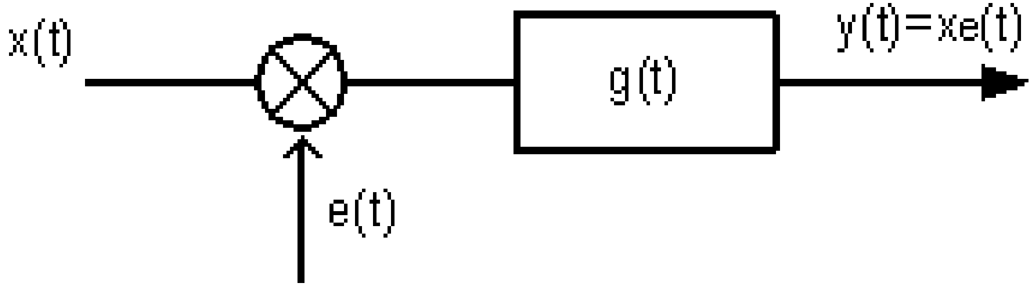
quand une impulsion arrive entre G et M $V_g>V_s$ et le FET laisse passer le signal BF pendant la durée de l'impulsion

Ensuite il n'a pas d'impulsion $V_g<V_s$ et le FET reste bloquer

Echantillonnage

Le modèle des signaux échantillonnés

Le modèle d'un échantillonneur est celui d'un opérateur paramétrique séparable comprenant un multiplieur suivi d'un circuit linéaire de mise en forme ayant une réponse impulsionnelle g(t).



Le signal est multiplié par la fonction d'échantillonnage e(t) puis filtré

$$x_e(t) = [x(t).e(t)]*g(t)$$

Dans le cas des signaux déterminés, la forme générale de la transformé de Fourier est :

$$X_e(f) = [X(f)* E(f)].G(f)$$

Et $$\Phi x_e(f) =[\Phi x(f) * \Phi e(f)].|G(f)|^2$$

Echantillonnage

Echantillonnage réel périodique

Définition : Un échantillonneur réel périodique d'un signal analogique x(t) est obtenu par une multiplication de x(t) et e(t) une suite d'impulsion rectangulaire

e(t) = Te(rect(t/D) D= durée de l'impulsion Te période

la décomposition en série de Fourier donne

On prend g(t) = δ(t) (un circuit passe tout)

Donc

$$X_e(f) = X(f) * E(f) = X(f) * \sum f_e D \sin c(nDf_e)\ \delta(f - nf_e)$$

$$X_e(f) = \sum f_e D \sin c(nDf_e)\ X(f - nf_e)$$

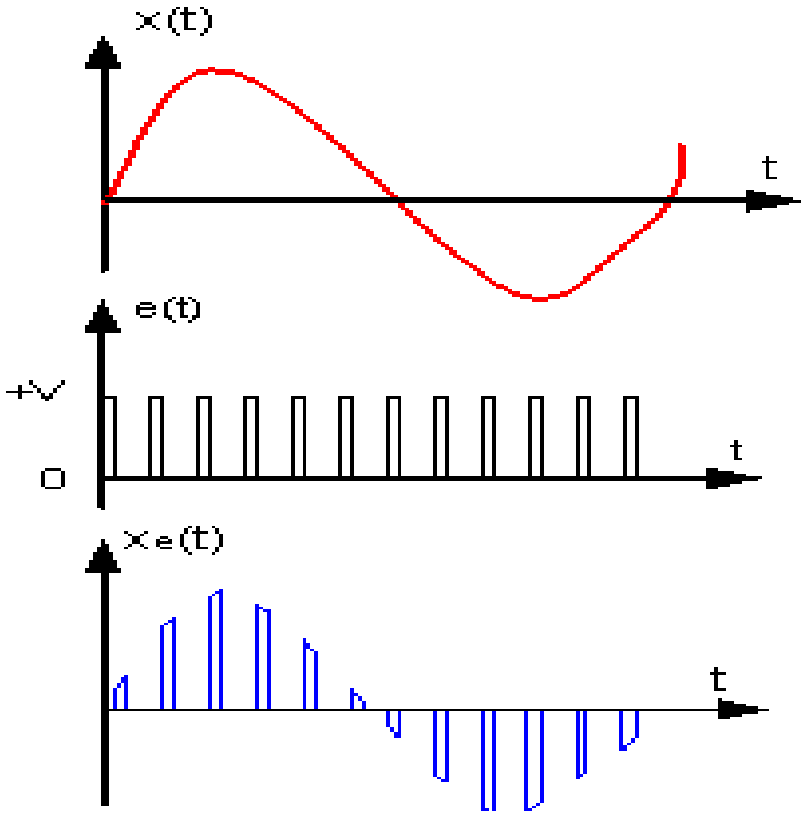
$$\phi x_e(f) = \phi x(f) * \sum [f_e D \sin c(nDf_e)\ ]^2 \delta(f - nf_e)$$

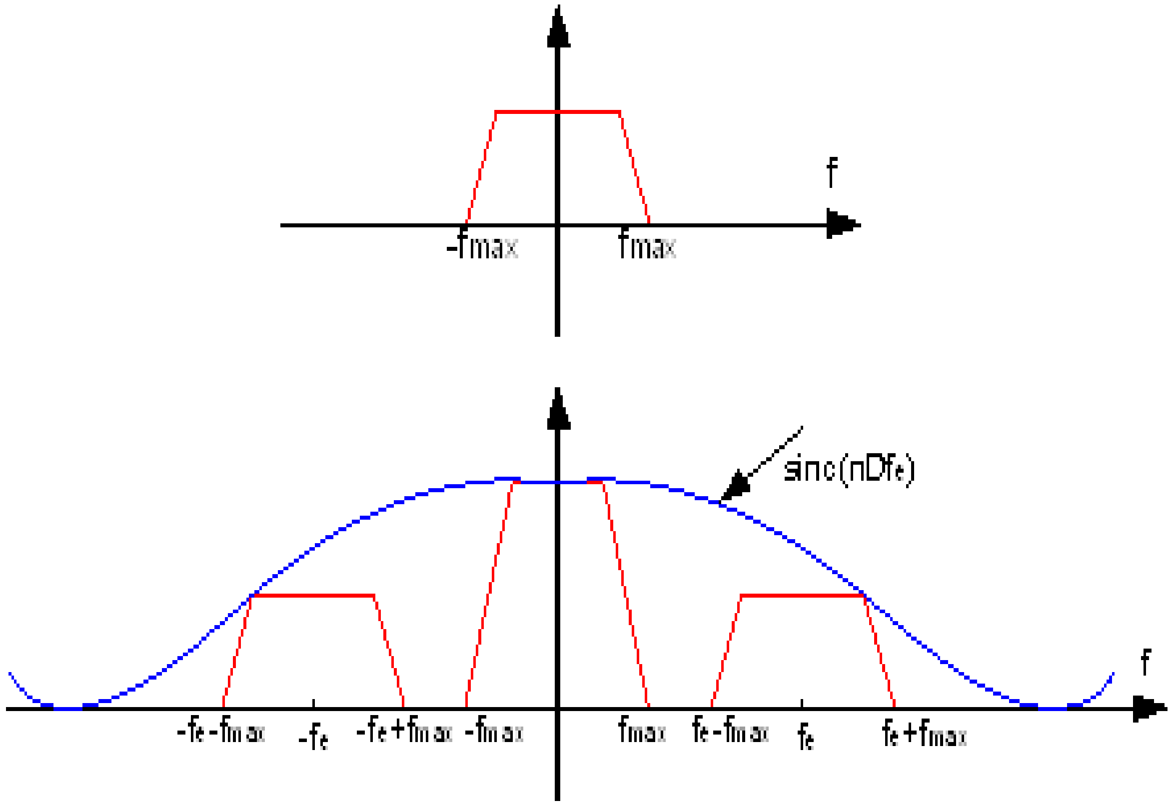
$$\phi x_e(f) = \sum [f_e D \sin c(nDf_e)\ ]^2 \phi x(f - nf_e)$$

Echantillonnage

On constate immédiatement l'importance que joue la cadence ou la fréquence $f_e=1/T_e$ le spectre du signal échantillonné réellement est donc obtenue par une somme pondérée de termes correspondants à la répétition périodique, de période f_e, du spectre du signal analogique.

Le facteur de pondération dépend de la densité d'impulsion f_eD qui varie de 0 et 1





Echantillonnage

Echantillonneur périodique idéalisé

L'échantillon idéal ne constitue pas un signal physiquement réalisable.
En effet on peut obtenir un tel signal à partir d'un échantillonnage réel dans lequel on fait tendre vers 0 ; il est évident que la puissance du signal créée tend vers 0 aussi.
Une manière toute théorique de mettre en évidence, malgré toutes propriétés spectrales d'une telle suite, consiste à multiplier chaque impulsion d'échantillonnage par un facteur 1/D. le passage à la limite pour D tendant vers 0 transforme alors chaque impulsion rectangulaire en une impulsion de Dirac.

$$x_e(t) = x(t) \cdot e(t) = x(t) \cdot \sum_k \delta(t - kTe) = \sum_k x(kTe)\delta(t - kTe)$$

$$e(t) = \delta_{Te} = \sum_k \delta(t - kTe) \qquad \delta_{Te} \; et \;\; f_e \delta_{Te} = \sum_k f_e \delta(f - kf_e)$$

$$X_e(f) = X(f) * \sum_k f_e\, \delta(f - kf_e) = \sum_k f_e\, X(f - kf_e)$$

les densités spectrales s'écrivent :

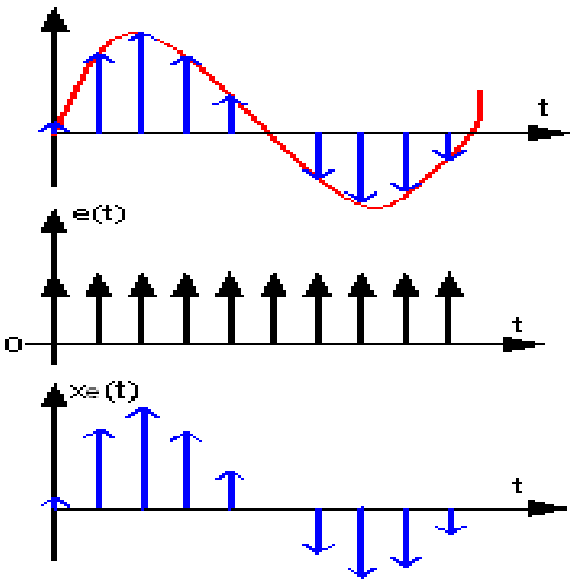
$$\phi x_e(f) = \phi_x(f) * \phi_{\delta T e} = \phi_x(f) * \sum f_e^{\,2} \delta(f - kf_e) = f_e^{\,2} \sum \phi_x(f - kf_e)$$

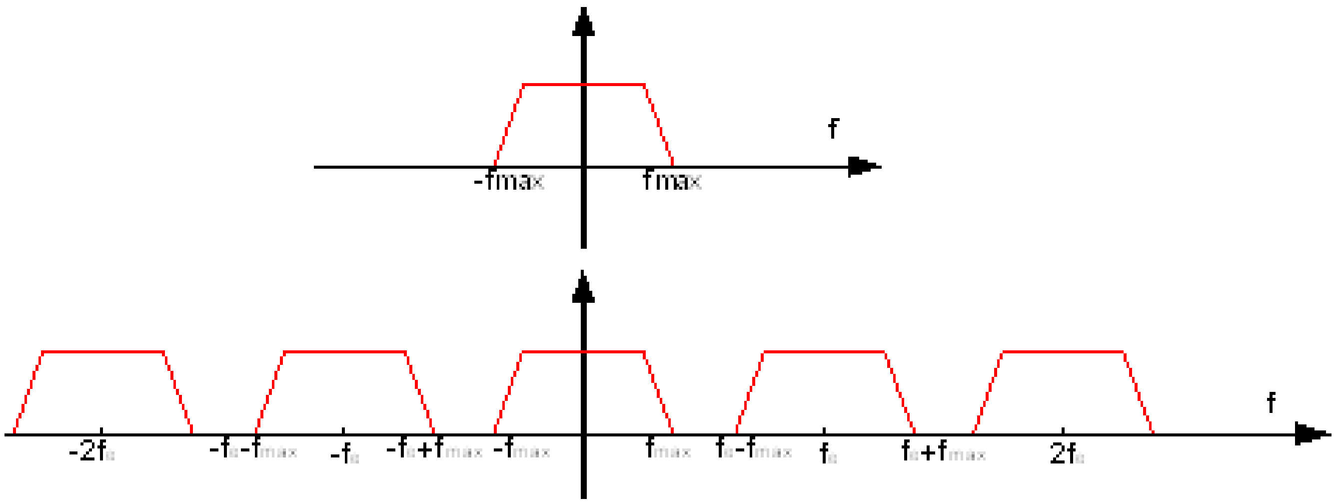
Echantillonnage

Echantillonneur périodique idéalisé

L'échantillon idéal ne constitue pas un signal physiquement réalisable. En effet on peut obtenir imaginer obtenir un tel signal à partir d'un échantillonnage réel dans lequel on fait tendre vers 0 ; il est évident que la puissance du signal créée tend vers 0 aussi.

Une manière toute théorique de mettre en évidence, malgré toutes propriétés spectrales d'une telle suite, consiste à multiplier chaque impulsion d'échantillonnage par un facteur 1/D. le passage à la limite pour D tendant vers 0 transforme alors chaque impulsion rectangulaire en une impulsion de Dirac.

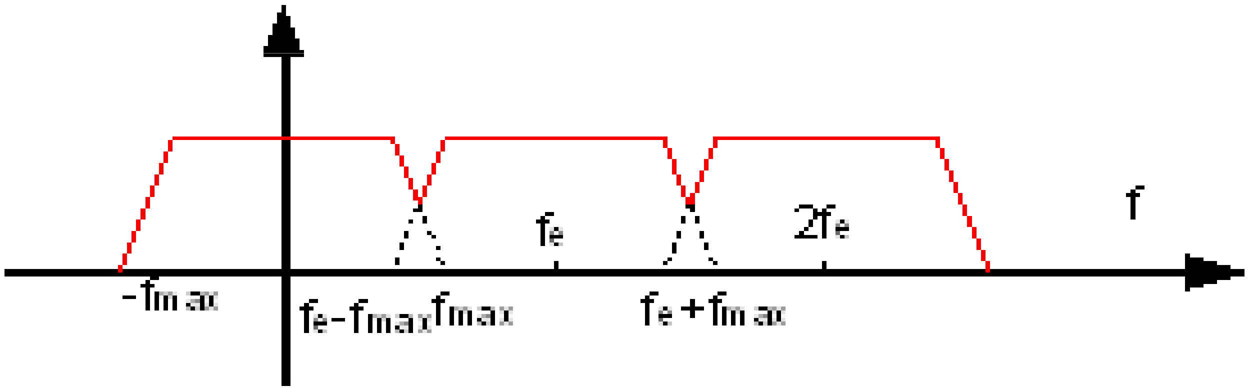




Echantillonnage

Notion de repliement de spectre

On remarquera que si le spectre du signal d'origine à une largeur supérieur à *2Fe* on a ce qu'on appelle un **repliement de spectre**.



s'il y a repliement de spectre, il n'est plus possible de retrouver le spectre du signal d'origine. Dans ce cas, l'opération d'échantillonnage modifie les caractéristiques du signal d'entrée.
Ainsi, si l'on ne veut pas perdre d'informations par rapport au signal que l'on échantillonne, on devra toujours respecter la condition : ($Fe \geq 2Fmax$). Condition plus connue par le théorème de Shannon.

Echantillonnage

Théorème de l'échantillonnage

Chaque spectre du signal échantillonné est une fonction de la répartition périodique de période égale à la cadence d'échantillonnage *fe=1/Te* du spectre originale du signal analogique.
Selon le support fréquentiel de celui-ci les motifs spectraux ainsi répétés sont à supports disjoints, ou au contraire se recouvrent partiellement.

La présence d'un tel recouvrement spectral (on dit aussi effet de repliement) entraîne la non réversibilité de la transformation.
Shannon a posé une condition pour qu'on puisse restituer le signal x(t) :
$f_e=1/T_e \geq 2f_{max}$

Théorème : Un signal analogique x(t) ayant une largeur de bande finie limitée ne peut être restituer exactement à partir de ses échantillons x(kTe) que si ceux-ci sont prélevés avec une période $Te<1/2f_{max}$
Le théorème de l'échantillonnage a une importance capitale, il rend accessible tout l'ensemble du système de traitement numérique pour le traitement du signal analogique.

Echantillonnage

Reconstitution du signal analogique

Cette étude permet d'éclairer le théorème de Shannon. L'échantillonnage ne sera correct que s'il n'y a pas de pertes d'information, lorsqu'on désire restituer le signal analogique.
En sortie d'un filtre numérique, le signal x(n) peut être directement sous forme numérique, mais il est souvent nécessaire de revenir au domaine analogique. Pour cela un convertisseur numérique analogique élabore à partir d'un signal x(n) un signal x(nTe) à priori disponible aux seuls instants multiples de la période de l'échantillonnage.
Pour disposer d'un signal x(t), fonction continue du temps, il faut donc être capable de reconstituer l'information qui manque entre les deux instants nT_e *et* $(n-1)T_e$; il s'agit donc d'effectuer une interpolation (on ne peut faire aussi une extrapolation).
Remarque1 : l'échantillonnage par extrapolation détermine les valeurs du signal à partir de l'échantillon kTe et les m échantillons antérieurs.
Remarque2 : Si les valeurs reconstruites sont déterminées à l'aide de (m+1) échantillons dont certains postérieurs à l'abscisse kTe, on dit qu'il s'agit d'une restitution par interpolation.

Echantillonnage

Reconstitution par un filtre de lissage

En présentant le signal $x_e(t) = \sum_k x(kTe)\delta(t - kTe)$

à l'entrée d'un opérateur linéaire de réponse impulsionnel g(t)

On obtient $$x'(t - to) = \sum_k x(kTe)\, g(t - kTe)$$

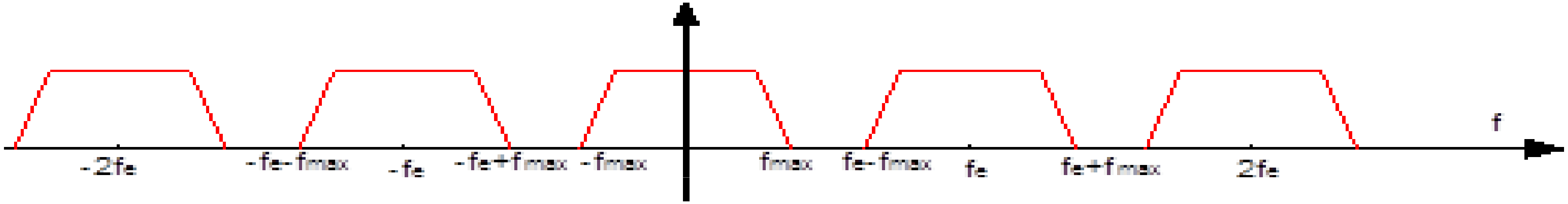
L'opérateur linéaire utilisé dans cette fonction est usuellement appelé filtre de lissage.
Ce filtre est du type passe bas si le signal a un spectre passe bas
Il est de type passe bande si le signal a un spectre passe bande
La densité spectrale s'écrit alors .

$$\phi x'(f) = f_e^{\,2} \sum \phi_x(f - kf_e) \cdot \left|G(f)\right|^2$$

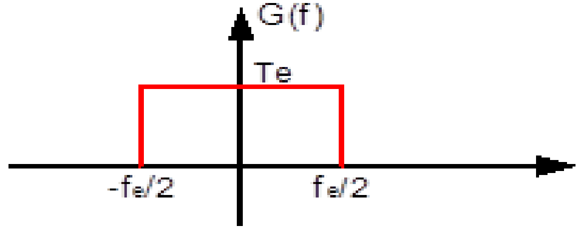
Echantillonnage

L'interpolateur idéal

Le spectre de ϕ_{xe} a l'allure suivante :



Interpoler le signal échantillonné consiste à reconstituer le signal x(t) entre deux échantillons. Ceci peut se faire en ne conservant que le lobe central compris entre $-f_e/2$ et $f_e/2$. On y arrive en multipliant $X_e(f)$ par la fonction fenêtre F suivante :



G(f) représente la fonction de transfert passe-bas idéal conservant les fréquences inférieures à $f_e/2$ et éliminant les fréquences supérieures.
La fonction de transfert d'un système, étant la transformée de Fourrier de sa réponse

Echantillonnage

La fonction de transfert d'un système, étant la transformée de Fourrier de sa réponse

$$g(t) = \int G(f)\, e^{2\pi j f t}\, df = Te \int_{-fe/2}^{fe/2} e^{2\pi j f t}\, df = Sinc(f_e t) = \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi f_e t}$$

$$x(t) = x_e(t) * g(t) = [x(t) \cdot \sum_k \delta(t - kT_e)] * g(t) = \sum_k x(kT_e)[g(t) * \delta(t - kT_e)]$$

$$= \sum_k x(kT_e)\, g(t - kT_e) = \sum_k x(kT_e)\, Sinc[fe(t - kT_e)]$$

Cette expression est la formule d'interpolation idéale.
Si on échantillonne un signal en respectant la condition de Shannon (fe>2fmax), on est capable de reconstituer exactement le signal x à partir de l'ensemble des échantillons *x(kTe).*
Mais on remarque qu'il est impossible d'utiliser cette relation en temps réelle car elle fait appel aux valeurs *x(kTe)* pour n variant de -∝à +∝ ainsi pour calculer x(to) à un instant donné to, il faut connaître les valeurs de x(t) à des instants t>to

Echantillonnage

le bloqueur d'ordre zéro

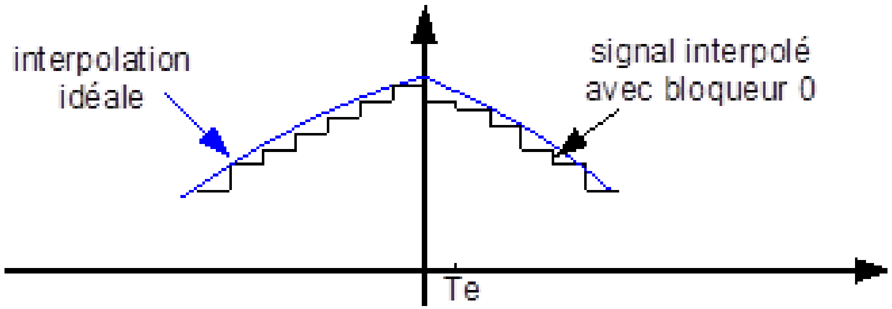
En utilisant le développement de s(t) en série de Taylor au voisinage de t=kTe, on peut écrire :

$$s(t) = s(kTe+u)\, s(kTe) + u\, s'(kTe) + \frac{u^2}{2} s''(kTe) + \ldots\ldots$$

Pour réaliser une telle interpolation, il faut connaître les valeurs des drivées successives de s(t) pour *t=kTe*. On se contente simplement du premier terme comme étant la dérivée d'ordre 0 de s(t) .On écrit alors que :

s(t)=s(kTe+u) =s(kTe).

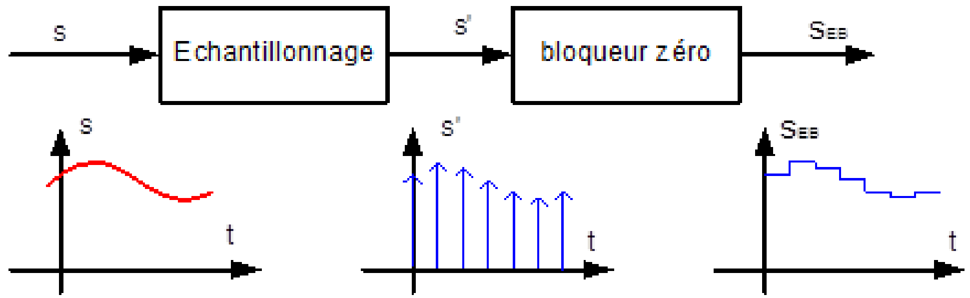
la valeur du signal étant maintenue constante pendant toute la durée Te, on appelle le système réalisant cette opération un bloqueur d'ordre zéro. Le signal interpolé de cette façon a alors, l'allure suivante :



C'est presque toujours sous cette forme que l'on dispose d'un signal échantillonné. En effet l'échantillonnage d'un signal électrique s est réalisé avec un échantillonneur bloqueur

Echantillonnage

Or un échantillonneur peut être considéré comme un système prélevant des échantillons du signal s à des instants kT_e (multiplication par une peigne de Dirac) puis maintenant le signal à sa valeur $s(kT_e)$ pendant la durée Te de la période d'échantillonnage (bloqueur d'ordre zéro).

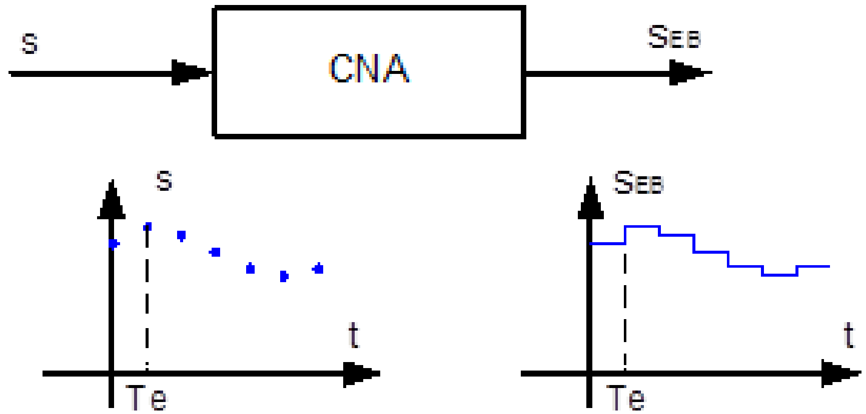


Dans la plupart des applications utilisant l'échantillonnage d'un signal, l'échantillonneur bloqueur d'ordre zéro est suivi d'un convertisseur analogique numérique (CAN), en vue d'un traitement de s.

Echantillonnage

A la sortie de ce traitement numérique, on dispose d'une nouvelle suite de nombre (s') que l'on convertit en signal électrique s'_{EB} à l'aide d'un convertisseur numérique analogique (CNA).

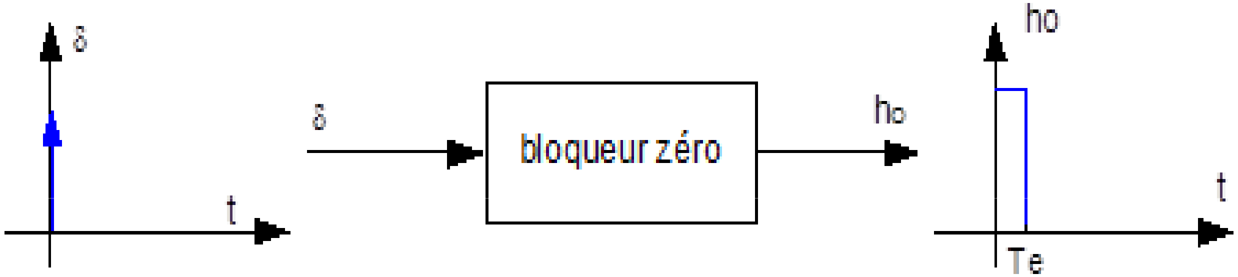
Le CNA reçoit sur son entrée tous les Te un mot binaire *s'n* codé en N bits et fournit sur sa sortie une tension proportionnelle à *(s'n).* le contenu du registre d'entrée n'étant modifié que tous les Te, la tension de sortie est constante pendant toute la durée *kTe*. le CNA réalise naturellement le blocage d'ordre zéro et on dispose sur sa sortie d'un signal en marches d'escalier.



Echantillonnage

Propriétés du bloqueur d'ordre 0

Un bloqueur d'ordre zéro est un système dont la réponse impulsionnelle est ho



Sa fonction de transfert est Ho est la transformée de Fourrier de sa réponse impulsionnelle.

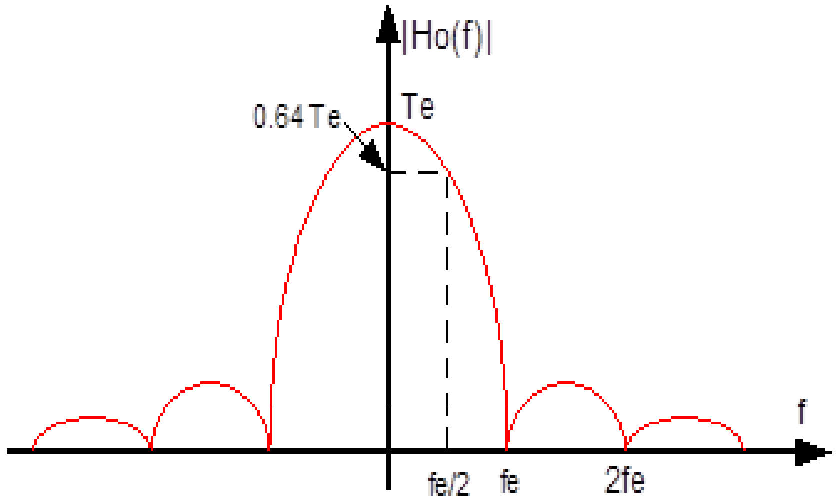
$$Ho(f) = \int ho(t)\ e^{-2\pi jft}\ dt = \int e^{-2\pi jft}\ dt = T_e\ e^{-2\pi jfTe}\ \frac{\sin(\pi f\ T_e)}{\pi fT_e}$$

Remarque : la détermination de Ho(f) que suppose le système est linéaire , or le bloqueur d'ordre zéro n'est pas un système linéaire car la sortie ne dépend pas de l'évolution du signal d'entrée entre les instants 0 et Te. On peut malgré tout le considérer comme linéaire pour une entrée qui n'est définie qu'aux instants kTe, ce qui est le cas d'une suite d'impulsions appliquées à tous les kTe.

Echantillonnage

Propriétés du bloqueur d'ordre 0

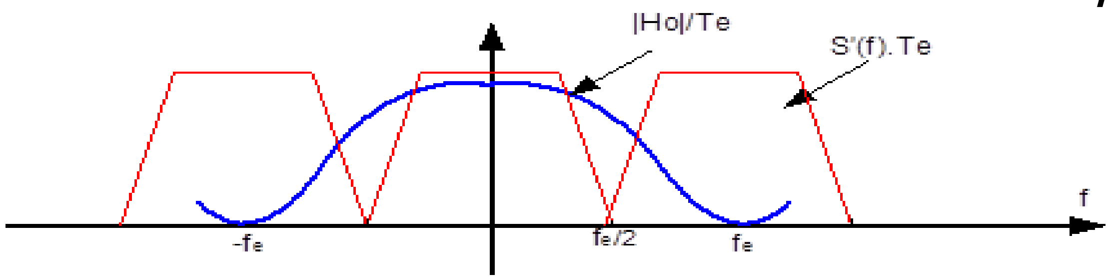
le module|Ho(f)| a l'allure suivante :



On constate que le bloqueur d'ordre zéro réalise en faite un filtrage passe-bas mais ne constitue pas un système **idéal** d'interpolation, car il atténue notablement le signal dans la bande [0,fe/2] (atténuation de 0.64 pour fe/2)

Si on applique s' à l'entrée d'un bloqueur d'ordre zéro on obtient le signal s_{EB}

En représentant *$Ho(f)/T_e$ et $S'(f)T_e$* on a $$s_{EB} = Ho(f)\cdot S'(f) = \frac{Ho(f)}{Te}\cdot S'(f)Te$$



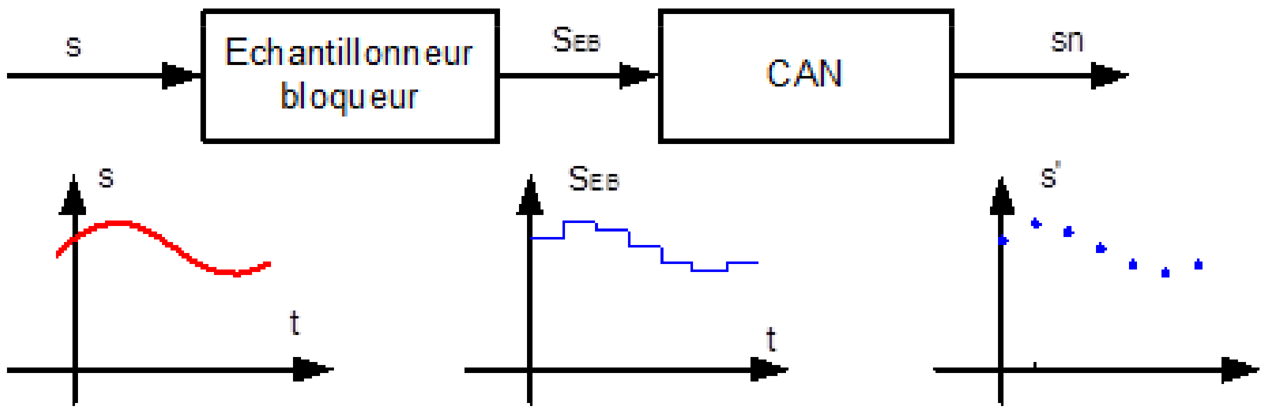
On remarque la déformation du lobe central due au fait que la fonction du transfert du bloqueur d'ordre zéro n'est pas constante dans la bande utile [0,f_e/2] et la présence de résidus des lobes latéraux dus au fait que l'élimination des fréquences >f_e/2 n'est pas parfaite. Il faut donc faire suivre le bloqueur d'ordre zéro d'un filtre passe-bas de lissage pour constituer correctement le signal.

Echantillonnage

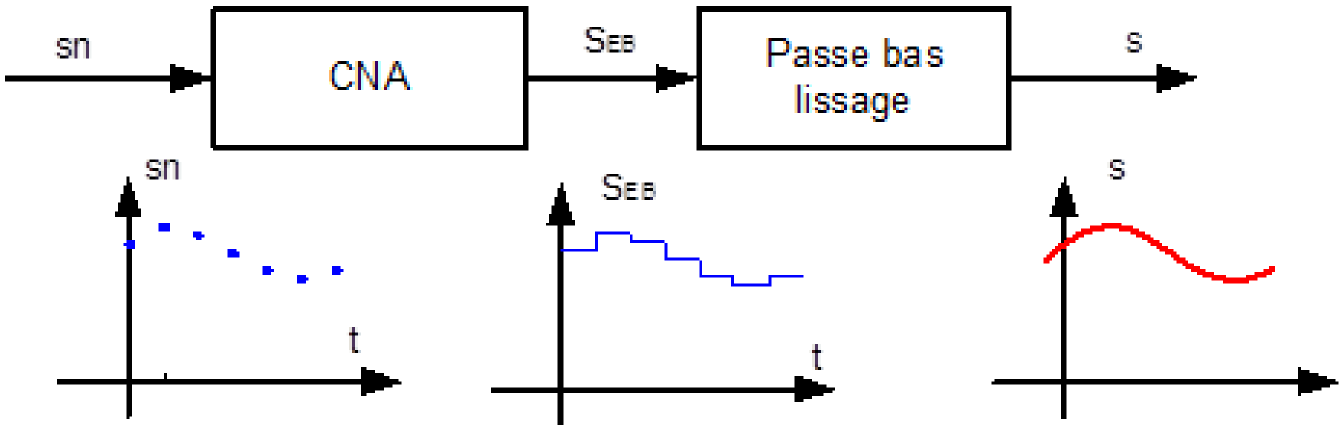
Chaîne d'acquisition et de restitution

En récapitulant tout ce qui vient d'être exposé depuis le début de ce chapitre, on peut représenter une chaîne d'acquisition et de restitution d'un signal par le schéma suivant :

Acquisition



Restitution



Quantification

Le rôle de la quantification est de donner une image binaire d'un signal analogique Passage Analogique – Numérique

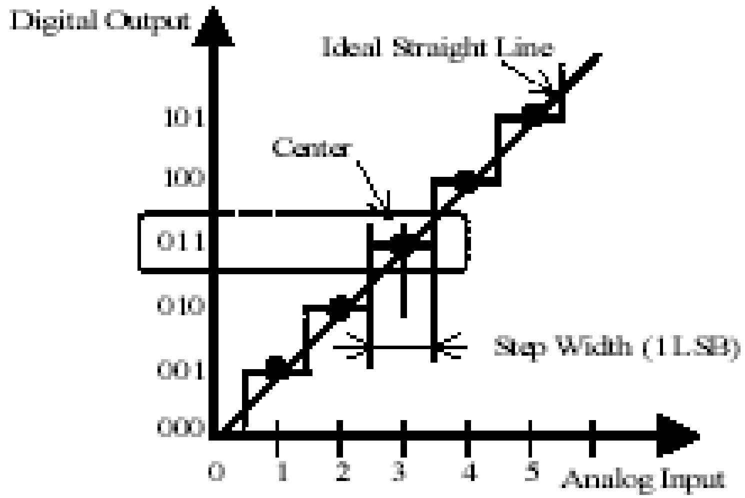
Signal Continu – Signal discret

Tension – chiffre

Principe : A chaque niveau de tension est associé une valeur binaire codée sur n bits: N bits vont permettre de distinguer 2^n niveaux de tension répartis de $-V_m$ à $+V_m$. On a ainsi un pas de quantification : $q = \frac{2V_m}{2^n}$

Ainsi un signal de ±5V codé sur 8 bits donnera un pas *q=39mV*.

La caractéristique d'entrée – sortie d'un CAN est une caractéristique en marche d'escalier. Chaque palier a une largeur d'un pas de quantification q. Le passage d'un palier à un autre correspond à une variation de '1' du code



Le pas de quantification est aussi appelé quantum.
Il correspond à la résolution du convertisseur.

Le quantum est la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder.

Quantification

Définition

La quantification est une règle de correspondance entre le nombre infini des valeurs possibles du signal d'entrée x(t) est un nombre fini de valeurs assignées au signal de sortie xq(t). La règle est obtenue en subdivisant la plage de conversion V des variations du signal d'entrée en n intervalles juxtaposées Δi avec i ………..n

L'opération consiste à remplacer chaque valeur x des échantillons du signal s mesuré, par un multiple entier xq de l'échelon q. $x_q=nq$

La quantification peut être effectuée soit centrée : toute valeur comprise entre *n-1/2)q et (n+1/2)q est remplacée par nq*

soit par défaut : toute valeur comprise entre *nq et (n+1)q* est remplacé par *nq*

L'opération quantification peut être alors représentée par un opérateur Q dont la caractéristique non linéaire serait selon les cas suivants :

Quantification

Bruit de quantification

Le quantificateur Q fournit un signal sq différent du signal réel. On peut alors écrire : $s(t)= s_q(t) + \varepsilon(t)$

Où ε est un signal qui caractérise l'écart instantané entre s et s_q. le signal ε est appelé bruit de quantification

Tout se passe donc comme si le quantificateur superposerait au signal s un bruit *ε.*

On a donc, lors de la quantification, une erreur de codage entre le signal échantillonné et la valeur du code correspondant à un niveau de tension (ce niveau de tension étant la moyenne des tensions correspondant à ce code).

L'évolution du bruit de quantification est une évolution en dent de scie avec une amplitude égal au quantum. En fonction du principe de quantification utilisé, les caractéristiques du bruit de quantification varient.

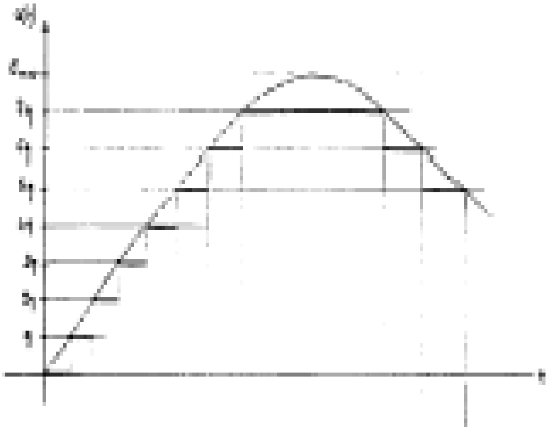
Quantification

Quantification linéaire par défaut

Le signal variant de 0 à E, on code les 2^n niveaux de tension $q = \dfrac{E}{2^n}$

On obtient une codification du signal d'entrée telle que : ***[nq ;(n+1)q]*** $\rightarrow$ ***nq***

L'erreur de quantification évolue alors entre 0 et q. *0<ε<q*



Si l'on suppose que le signal est de répartition continue, avec un écart type supérieur à quelques quantum, on peut admettre que l'évolution du bruit de quantification est en dent de scie. On peut ainsi calculer sa puissance en terme de moyenne quadratique (elle correspond à la puissance du signal dans une résistance de 1Ω) :

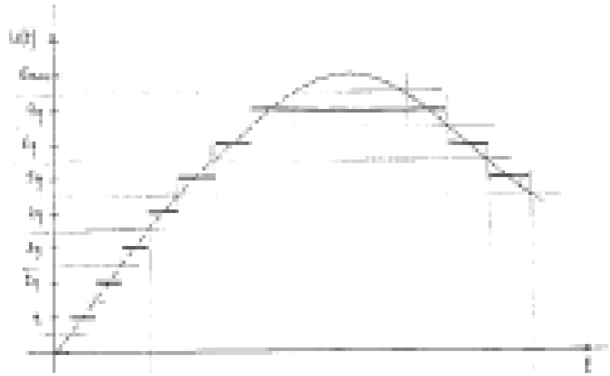
Le bruit de quantification ε(t), est un bruit blanc dont la puissance moyenne dépend du pas de quantification q :

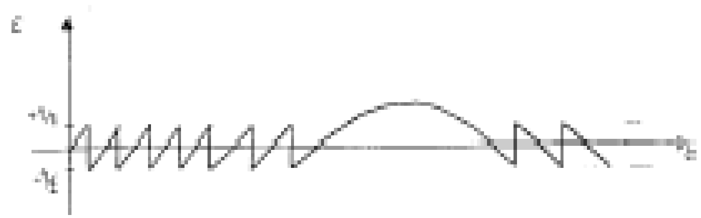
$$P_\varepsilon = \varepsilon^2(t) = \frac{1}{q}\int a^2 \ da = \frac{1}{q}\left[q^3/3\right] = \frac{q^2}{3} \qquad P_\varepsilon = \left\langle \varepsilon^2(t) \right\rangle = \frac{q^2}{3}$$

Quantification

Quantification linéaire centrée

Dans la pratique, on préfère effectuer une quantification centrée. Dans ce cas, le bruit de quantification évolue entre ± q/2 : ***-q/2<ε<q/2***





Le signal d'entrée est donc codé tel que : ***[n-1/2)q ;(n+1/2)q] $\rightarrow$ nq***

La puissance du bruit de quantification que l'on obtient est :

$$P_\varepsilon = \varepsilon^2(t) = \frac{1}{q/2}\int a^2 \; da = \frac{2}{q}\left[q/2\right]^3 = \frac{q^2}{12} \qquad P_\varepsilon = \left\langle \varepsilon^2(t) \right\rangle = \frac{q^2}{12}$$

On constate que le bruit apporté par cette conversion est d'autant plus faible, que le pas de quantification est faible, ce qui est normal, puisqu'il y aura un écart entre le signal réel et le signal converti d'autant plus faible .

On définit le rapport signal sur bruit (exprimé en puissance), qui va chiffrer la qualité de la conversion.

$$\frac{S}{B} = \frac{valeurmoyenne\, s^2(t)}{q^2/12}$$