Université Internationale de Casablanca

3ème année GE

Systèmes échantillonnés

PLAN

1- Introduction

2- Systèmes à temps discret / systèmes échantillonnés

3- Outil d'analyse des systèmes échantillonnés :
Transformée en Z

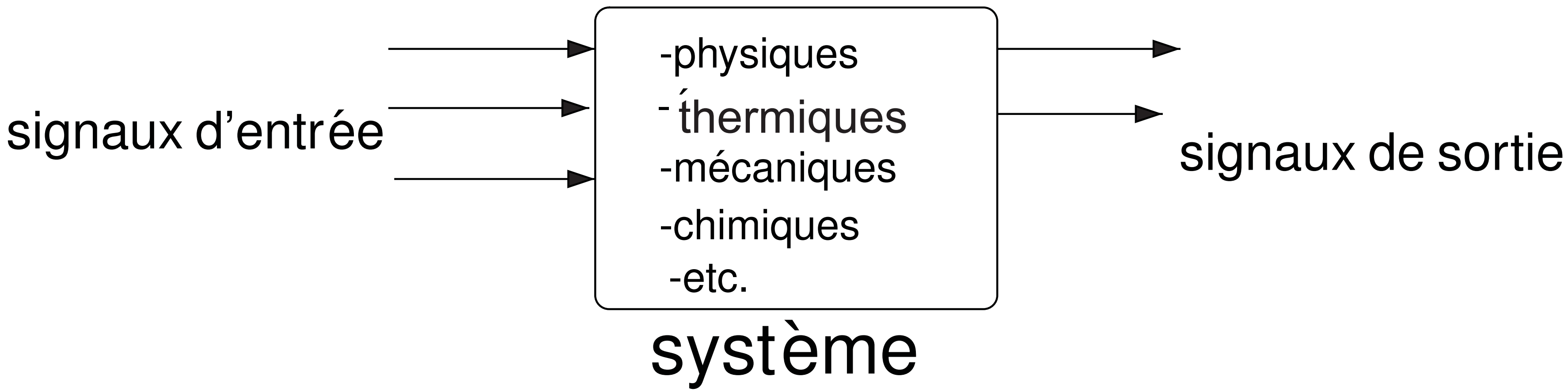
4- Stabilité / Précision - Régulation numérique

5- PID numérique

6- Régulateur RST

Saâd LISSANE ELHAQ **lissan1@yahoo.com**

Introduction



Exemple : Moteur, entrée (tension) et sortie (Vitesse)

Automatique

Objectif : Faire suivre aux signaux de sortie des consignes ou sorties désirées

Synonymes

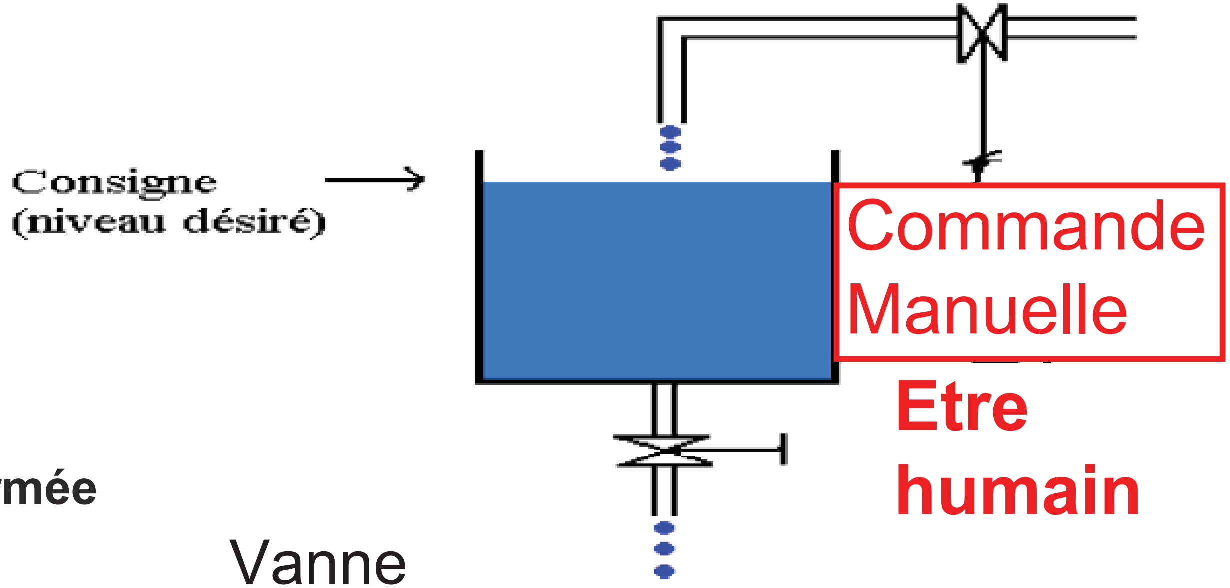
Contrôle / commande de systèmes

Asservissement / régulation de systèmes

Introduction

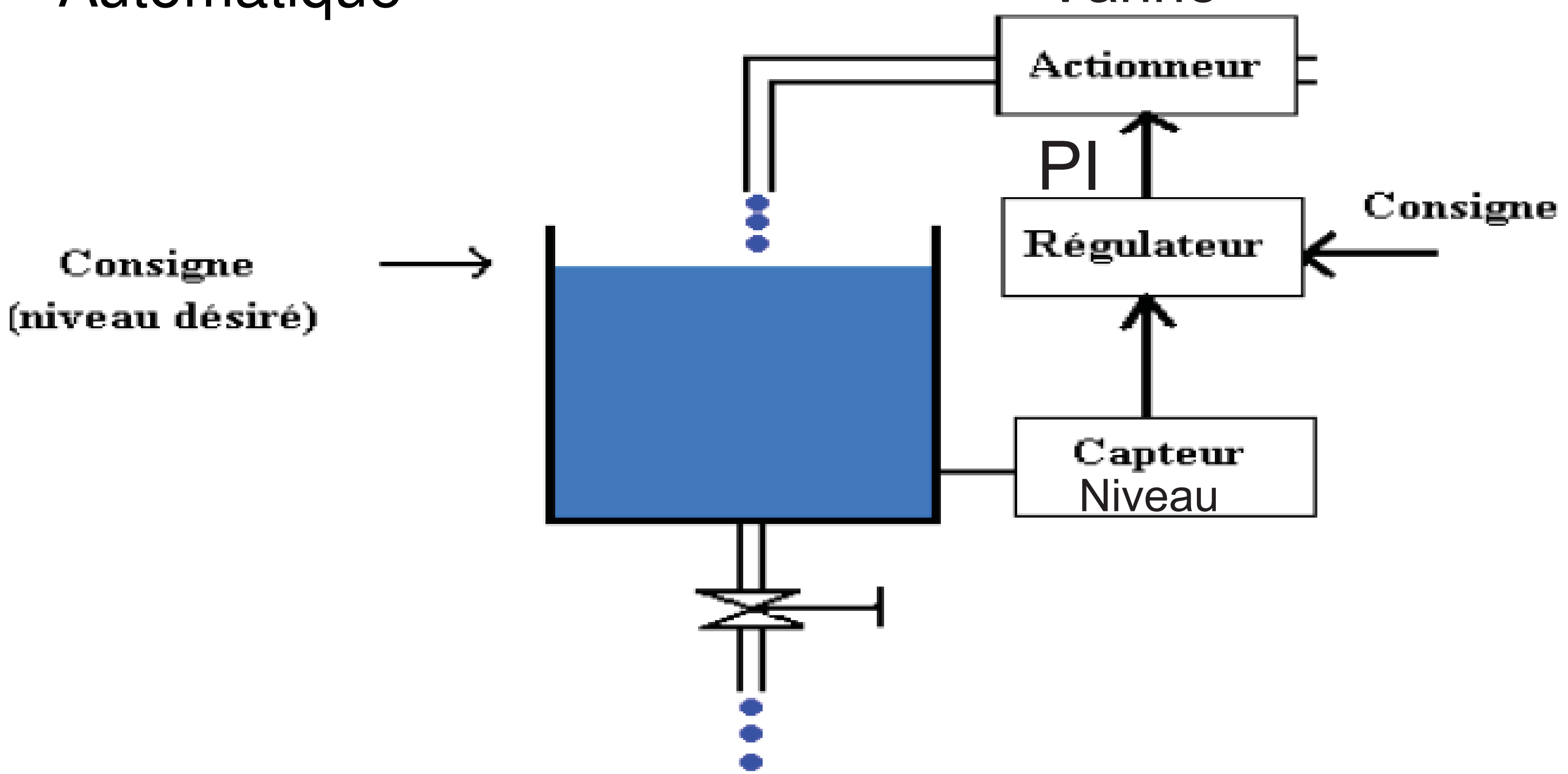
Notions de boucles

Régulation de niveau en Boucle ouverte (être humain)



Régulation de niveau en Boucle fermée

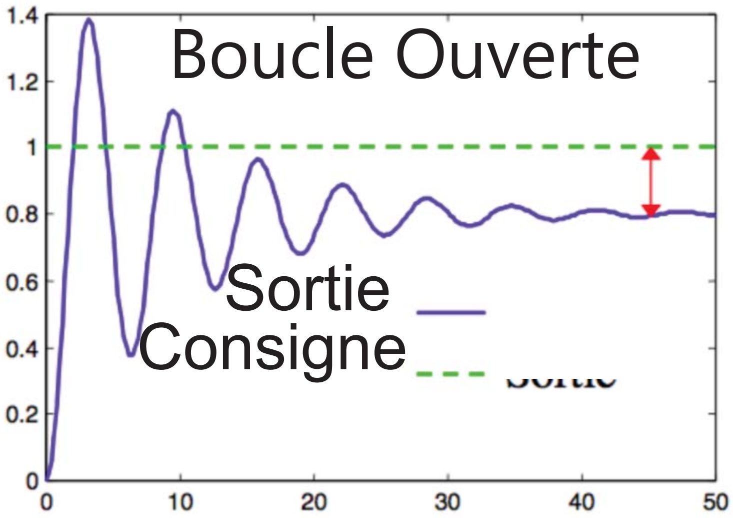
Automatique



Introduction

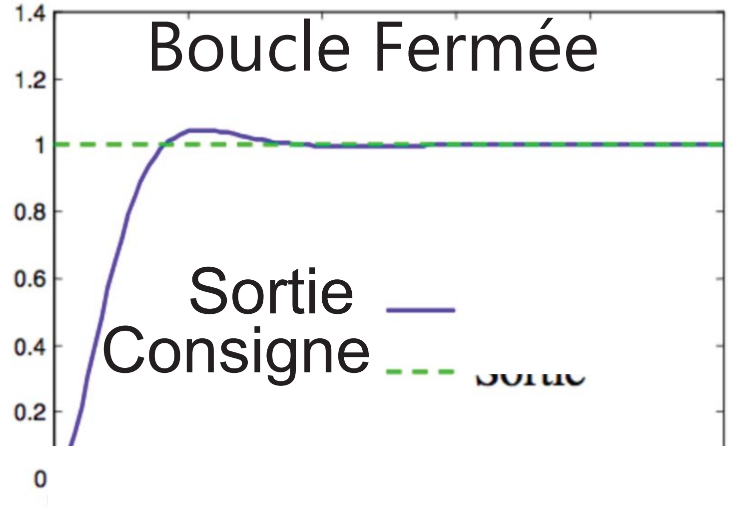
Objectifs d’une commande en boucle fermée

Système à commander



- Réponse oscillatoire
- Réponse mal amortie
- Ecart avec l'entrée en régime établi

Comportement désiré



- Réponse oscillatoire
- Réponse bien amortie
- Erreur statique nulle

Pour corriger le comportement du système : un correcteur

Introduction

Exemples d'application

Automobile : régulateurs de vitesse, suspension active / adaptative

Aéronautique : commande des avions, régulation de position et vitesse (satellites)

Transports : systèmes automatiques (métros, portes, etc.),

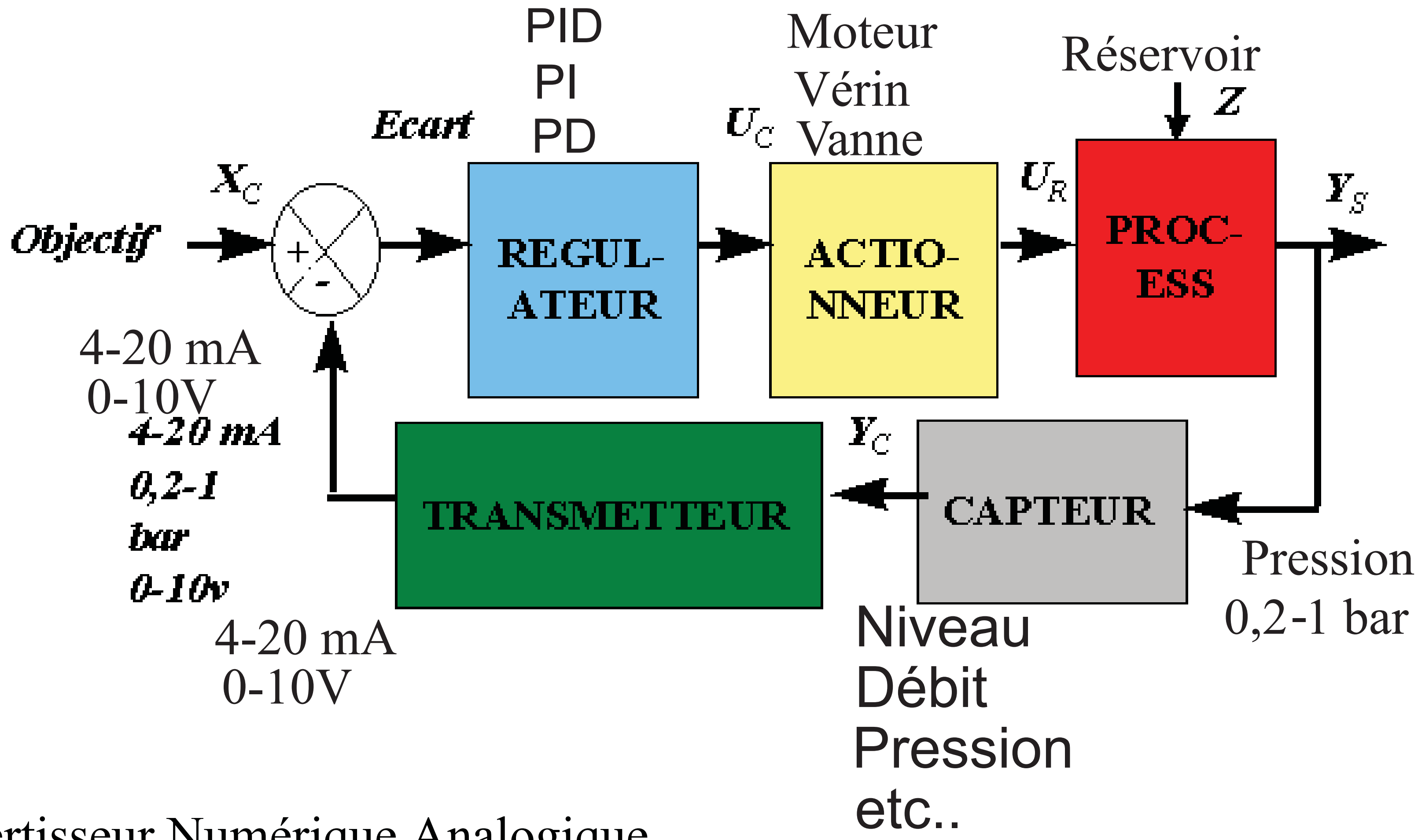
véhicules intelligents (assistance freinage, trajectoire, manœuvre), conduite autonome,

Robotique : robots industriels,

Mécatronique : drones

Introduction

Composants de la régulation industrielle



CNA: convertisseur Numérique Analogique

CAN : convertisseur Analogique Numérique

Introduction

Régulation de la Température

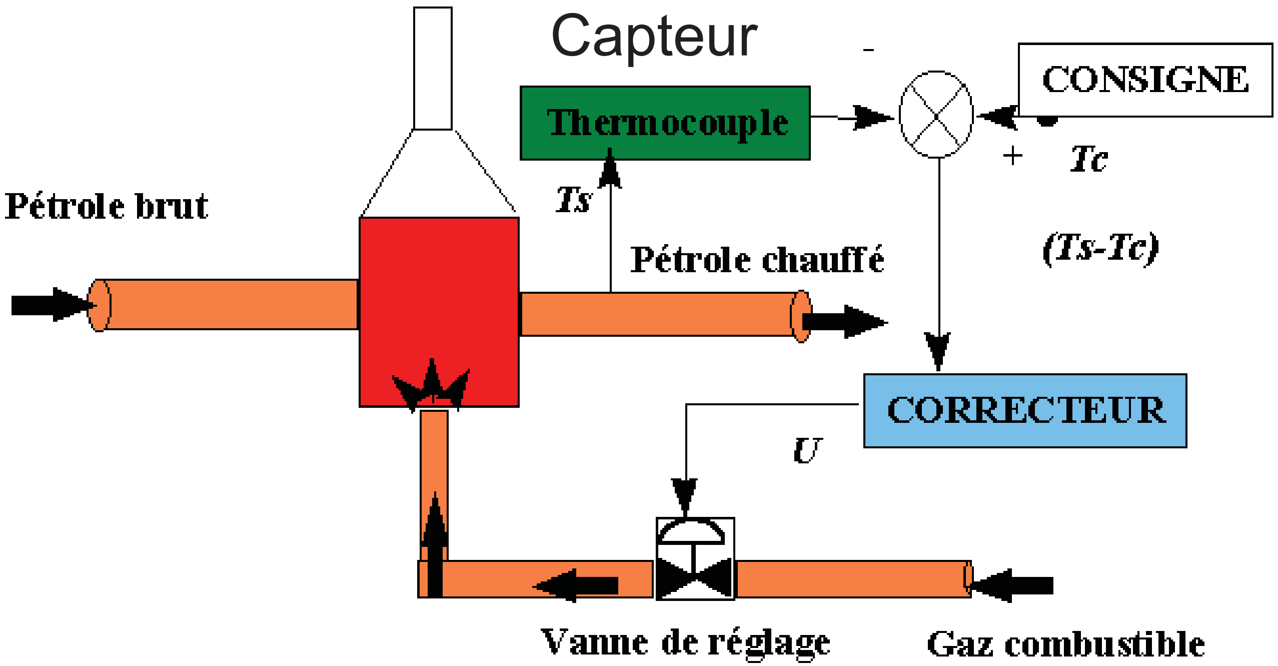
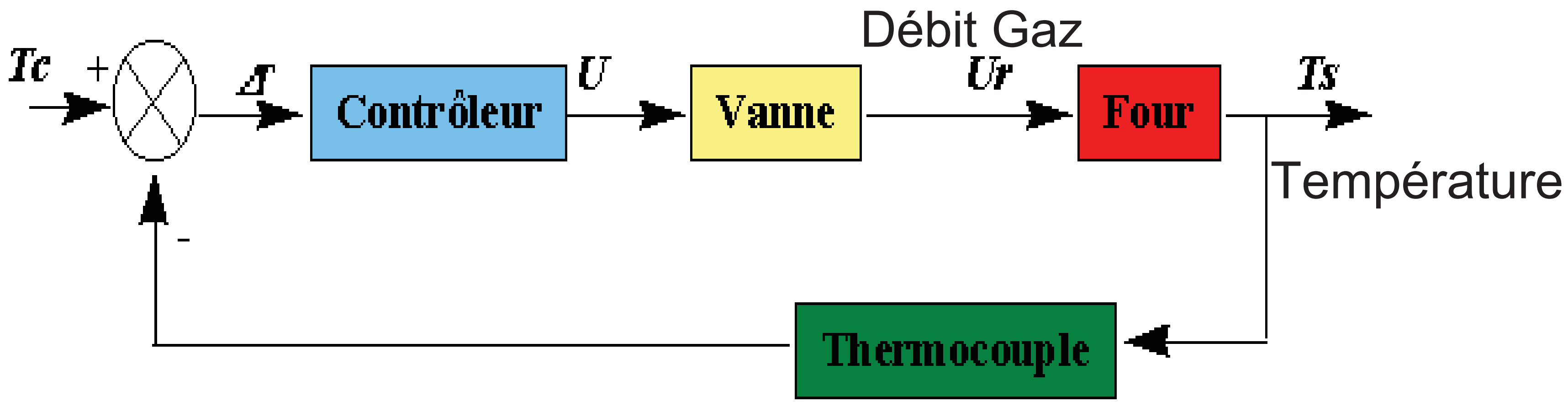
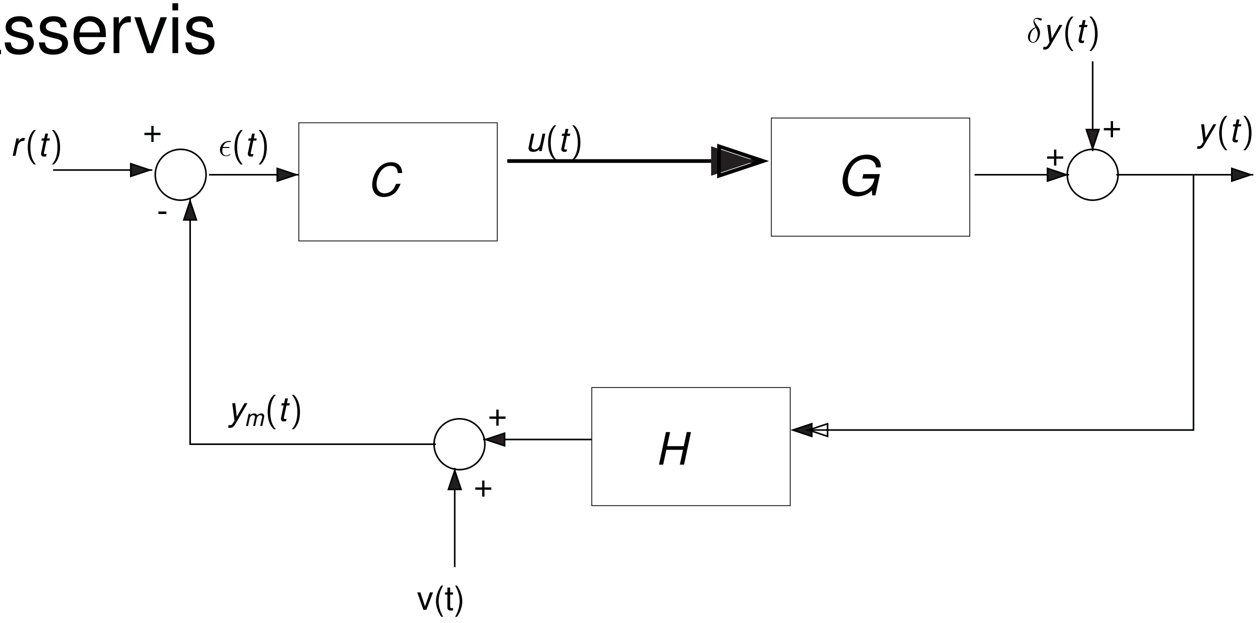


Schéma Fonctionnel



Systèmes asservis



Dénominations

signaux : r ?, y ?, y_m ?, ϵ ?, u ?, δy ?, v ?

blocs (sous-systèmes) : C ?, G ?, H ?

chaînes : directe ?, de retour ?, boucle ouverte ?, boucle fermée ?

signaux : r : consigne, u : commande, y : sortie, y_m : signal de mesure ou sortie mesurée, ϵ : signal d'écart ou d'erreur, δy : perturbation de sortie, v : perturbation de mesure,

blocs : C : correcteur, G : processus, H : capteur

chaînes : directe : CG, de retour : H, boucle ouverte : CGH, boucle fermée : $\frac{CG(s)}{1+CGH(s)}$

Introduction

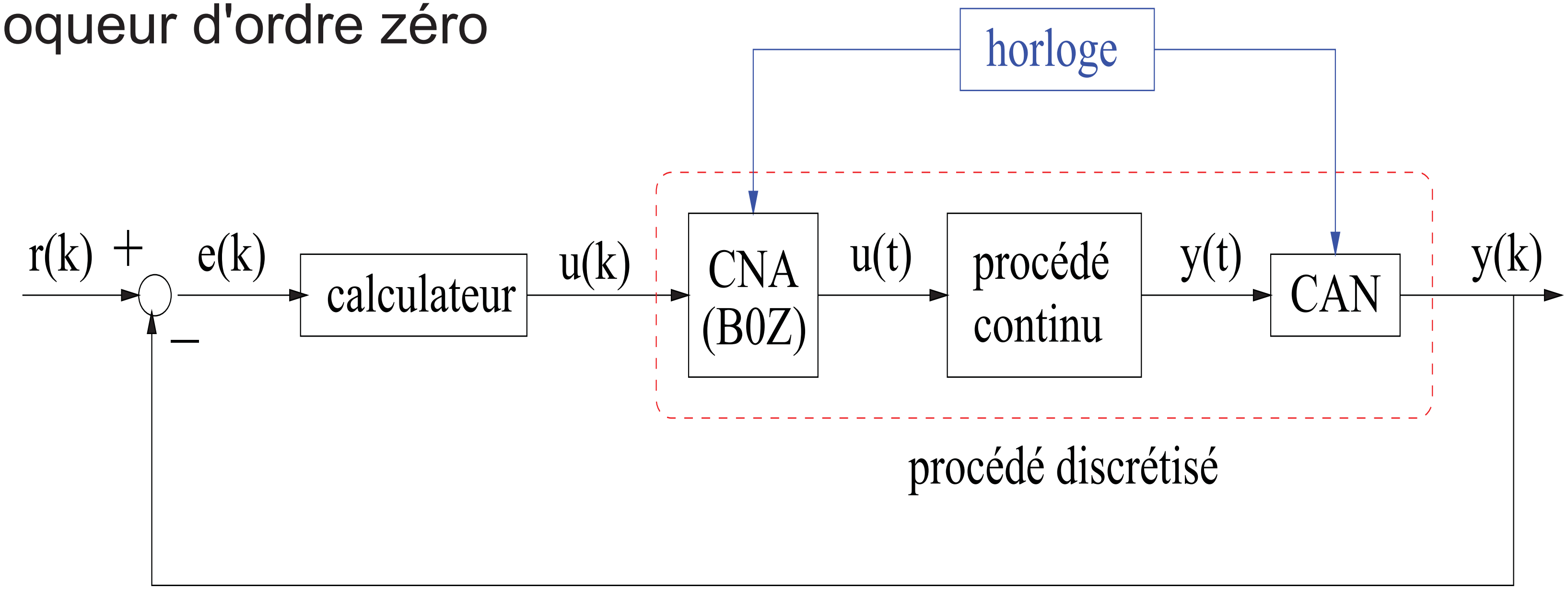
Correcteurs classiques

s paramètre de Laplace

P	augmentation de la bande passante mais diminution des marges de stabilité	$C(s) = K_p$
PI	Annulation de l'erreur statique, rejet de perturbations, réglage de la bande passante mais diminution des marges de stabilité	$C(s) = K_p + \frac{K_i}{T_i s} = \frac{K(s+z)}{s}$
PD réel	réglage de la bande passante et des marges de stabilité, pas de réglage de la précision	$C(s) = K_p + \frac{K_d\, \tau_d\, s}{1+a\, \tau_d s} = \frac{K(s+z)}{s+p}$ $(a \ll 1$ et $z \ll p)$
PID réel	réglage de la bande passante, des marges de stabilité, et réglage de la précision	$C(s) = K_p + \frac{K_i}{T_i s} + \frac{K_d\, \tau_d\, s}{1+a\, \tau_d\, s} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p)}$ $(a \ll 1,\ z_1 \leq z_2 \ll p)$

Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

BOZ : Bloqueur d'ordre zéro



CNA : convertisseur Numérique Analogique

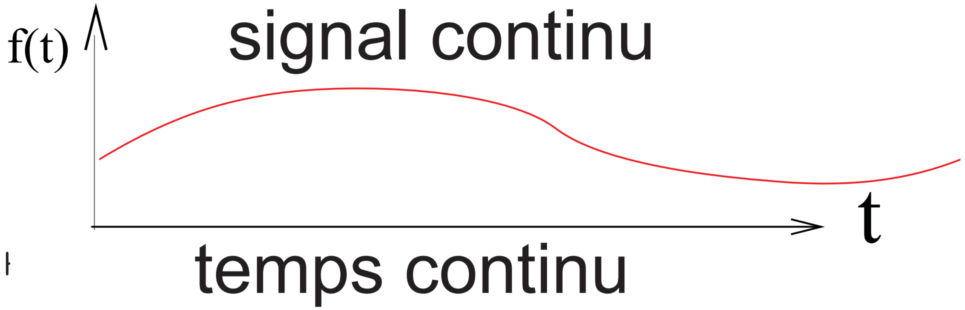
CAN : convertisseur Analogique Numérique

BOZ : bloqueur d'ordre 0

Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

Signal Analogique

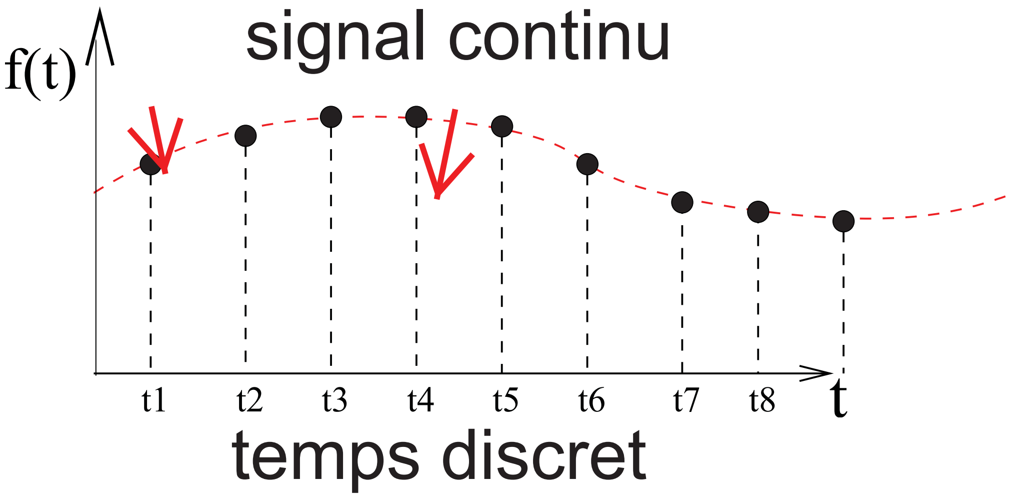
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & \mathrm{f(t)} \end{cases}$$



Signal échantillonné

Signal continu observé à des instants discrets $\mathbb{I} = \{t_k, k \in \mathbb{N}\}$, on obtient un signal discret. Dans ce cas, on parle de l'échantillonnage d'un signal continu.

Exemple : temps discret $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$, t_k = (1,2, 3, ..) en seconde par exemple

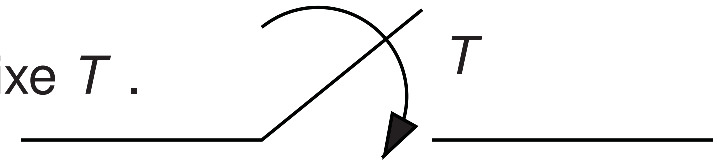


Signal discret

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{R} \\ i & \rightarrow & \mathrm{f}(t_k) = \mathrm{f}_k \end{cases}$$

Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

Prélèvement d'une valeur du signal continu à période fixe T .



La réponse impulsionnelle

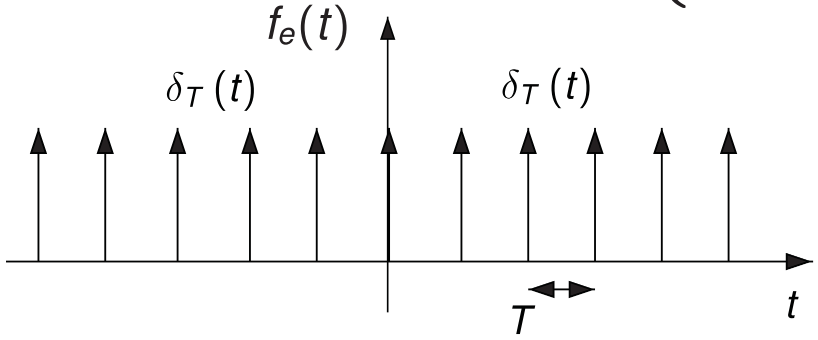
Soit l'impulsion unité défini par : $\delta(k) = \delta_k = \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Impulsion de Dirac à l'instant k_0 $\delta(k - k_0) = \delta_{k-k_0} = \begin{cases} 1 & si\ k = k_0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Représentation mathématique :

$$f_e(t) = f(t)\delta_T\ (t)$$

$$\delta_T\ (t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT\ )$$

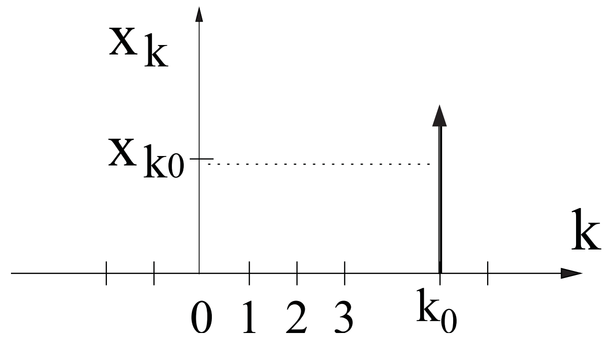


Ainsi, l'échantillonnage de $x(t) = x_{k_0}\delta(t - t_{k_0})$

$x_k = x_{k_0}\delta(k - k_0)$ et $x(t_k) = x(kT) = x(k) = x_k$

T période d'échantillonnage $t_{k+1} - t_k = T$

$t_k = kT$

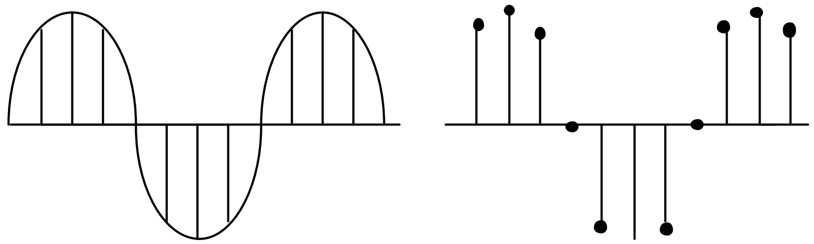


instants d'échantillonnage

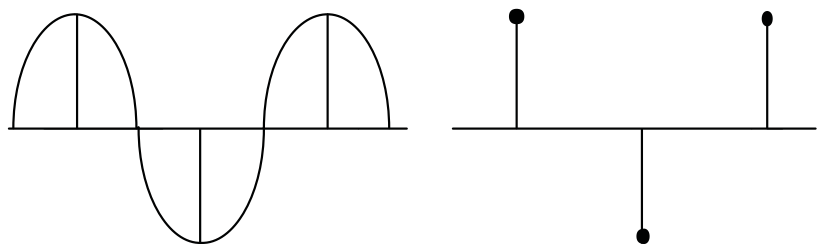
Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

Choix de la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1 / T$

$f_e = 8\ f_0$

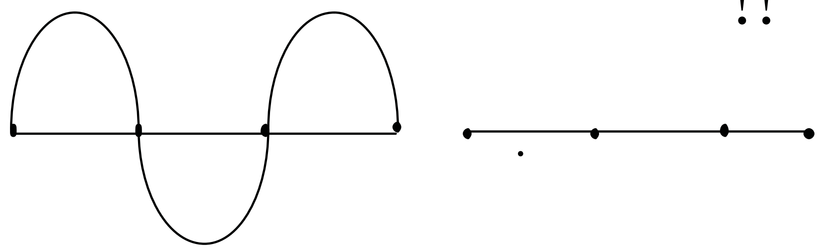


$f_e = 2\ f_0$



$f_e = 2\ f_0$

!!



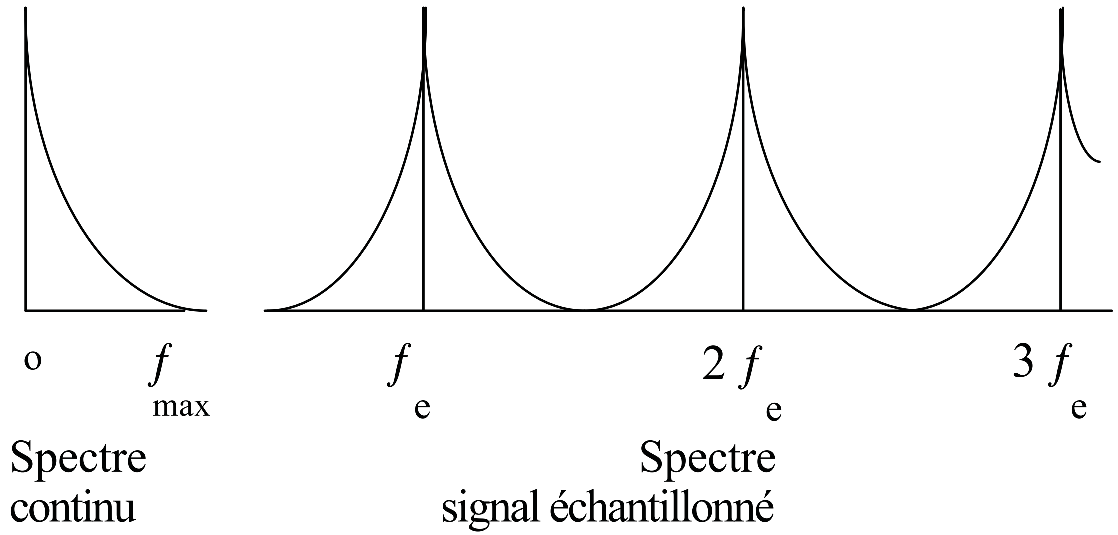
f_{max} : fréquence maximum à transmettre

$$\boxed{f_e > 2\, f_{max}}$$

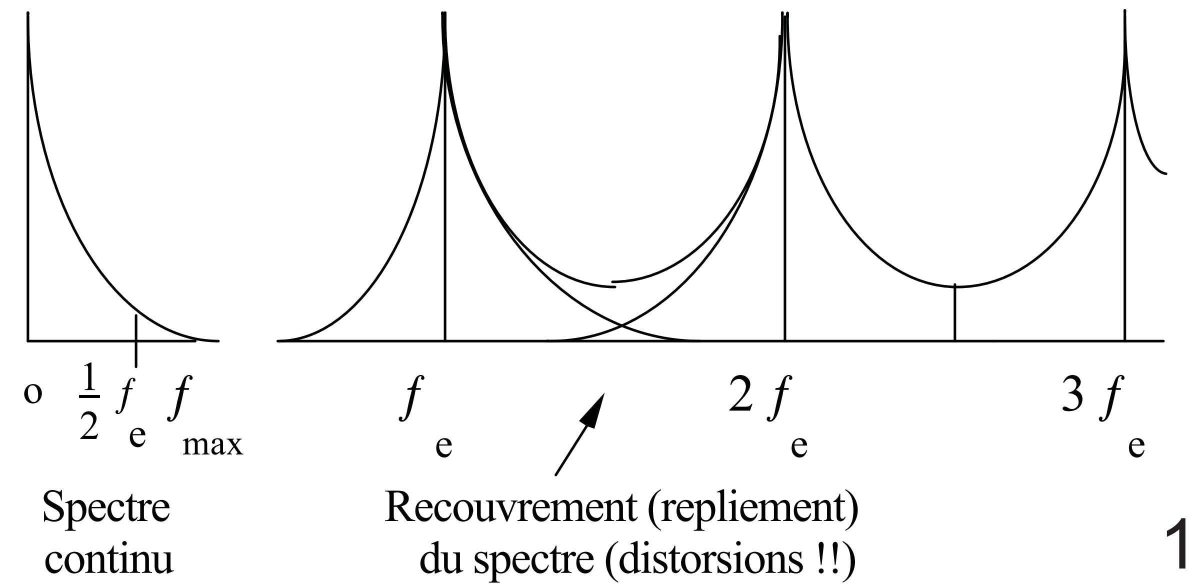
Théorème de Shannon

Spectre du signal échantillonné

Cas 1 : $f_{max} < \frac{1}{2} f_e$



Cas 2 : $f_{max} > \frac{1}{2} f_e$



Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

Choix de la fréquence d'échantillonnage pour l'Automatique

1er ordre : $H(s) = \dfrac{1}{1 + sT_0}$

T : période d'échantillonnage

$$\boxed{\frac{T_0}{4} < T < T_0}$$

2e ordre et plus :

Système apériodique :

$$\boxed{\frac{T_{\mathrm{M}}}{24} < T < \frac{T_{\mathrm{M}}}{8}}$$

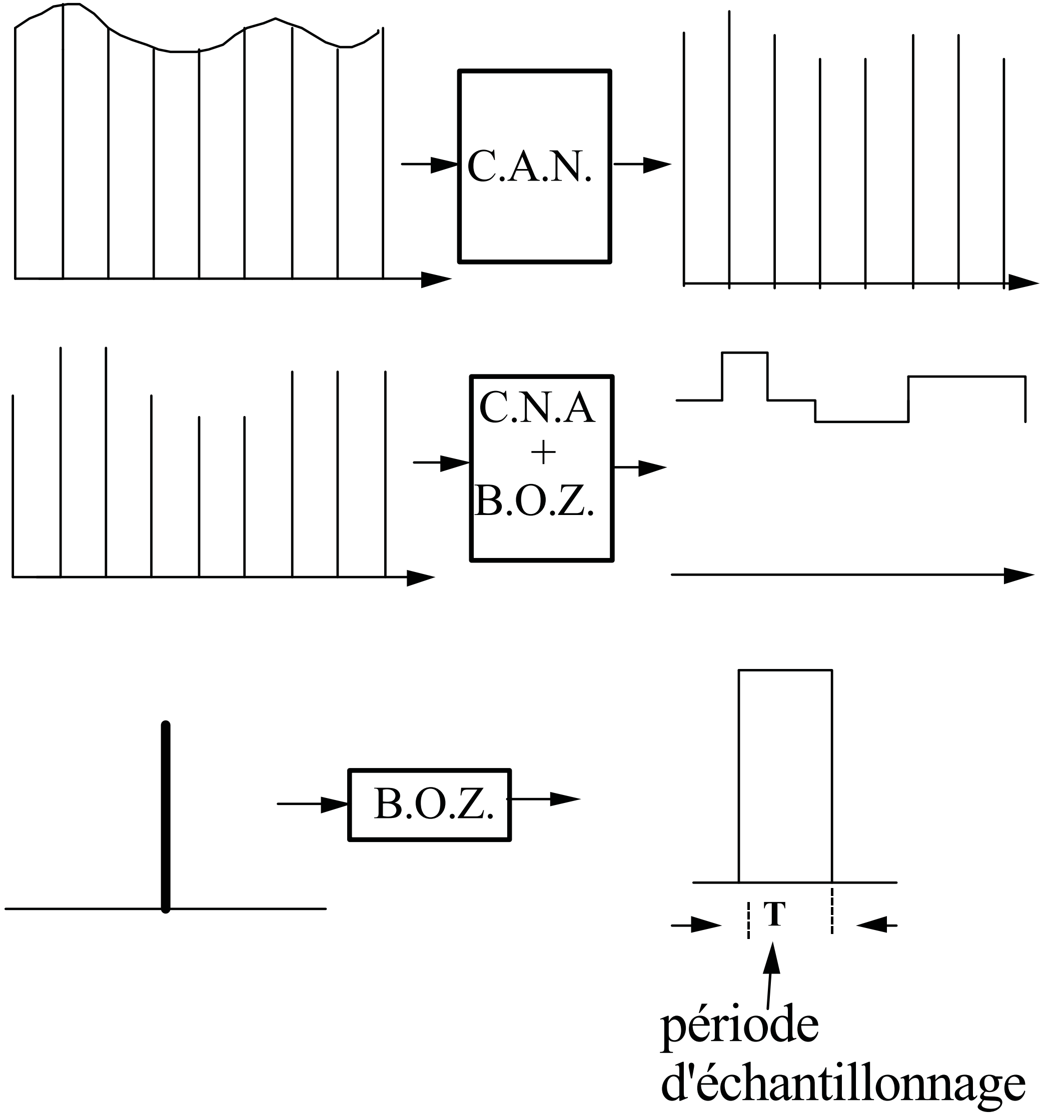
T_M : temps de montée (95% de la valeur max)

Choix de la période d'échantillonnage pour la régulation numérique (valeurs indicatives)

Type de variable (ou procédé)	Période d'échantillonnage(s)
Débit	1 - 3
Niveau	5 - 10
Pression	1 - 5
Température	10 – 180
Distillation	10 - 180
Asservissements	0.001- 0.05
Réacteurs catalytiques	10 - 45
Séchage	20 - 45

Systèmes à temps discret ou systèmes échantillonnés

Echantillonnage

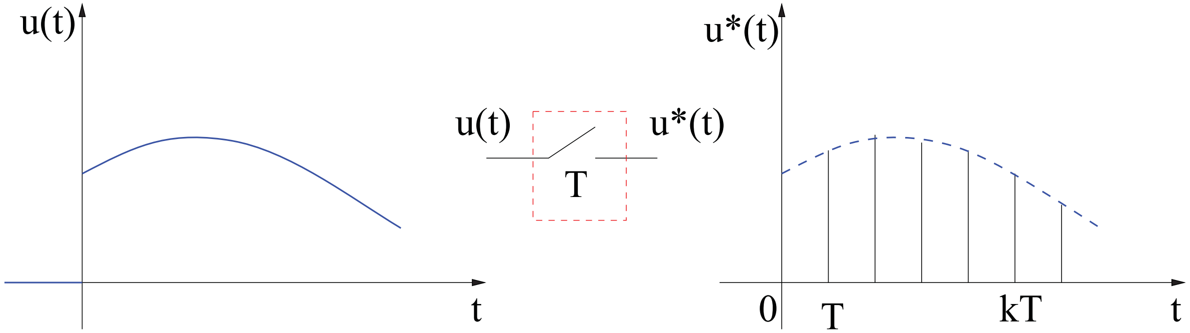


C.A.N.:
Convertisseur
analogique-numérique
C.N.A.:
Convertisseur
numérique-analogique
B.O.Z.:
Bloqueur d'ordre zéro

$f_e = 1/T$: fréquence d'échantillonnage

Transformée en Z

Description d'un signal échantillonnée : **Domaine temporel**



Transformée de Laplace de u(t) : U(p) = $\int_0^{\infty} e^{-pt} u(t)dt$

$$u^*(t) = u(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT)\delta(t-kT)$$

Sa transformée de Laplace s'écrit : $U^*(p) = \mathcal{L}[u^*(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT)e^{-kTp}$

Transformée en Z :

En posant $z = e^{Tp}$ la Transformée en z : $\mathcal{Z}(u_k) = U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT)z^{-k}$

Notations u(kT)= u(k) = u_k

La suite u_k correspond au signal $u(t)$ echantillonnée a la période T

z variable complexe

Propriétés de la transformée en z

Linéarité $\mathcal{Z}\{\alpha f(k) + \beta g(k)\} = \alpha F(z) + \beta G(z)$

Retard Pour des CI nulles : $\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z)\ \forall n \in N$

De plus $\mathcal{Z}\{e^{-nT\mathrm{p}}\ F(\mathrm{p})\} = z^{-n}F(z)$

Théorème de la valeur initiale :

Valeur initiale d'un signal continu : $f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$

Valeur initiale d'un signal à temps discret : $f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \mathrm{f}_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$

Théorème de la valeur finale :

Valeur finale d'un signal à temps continu : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$

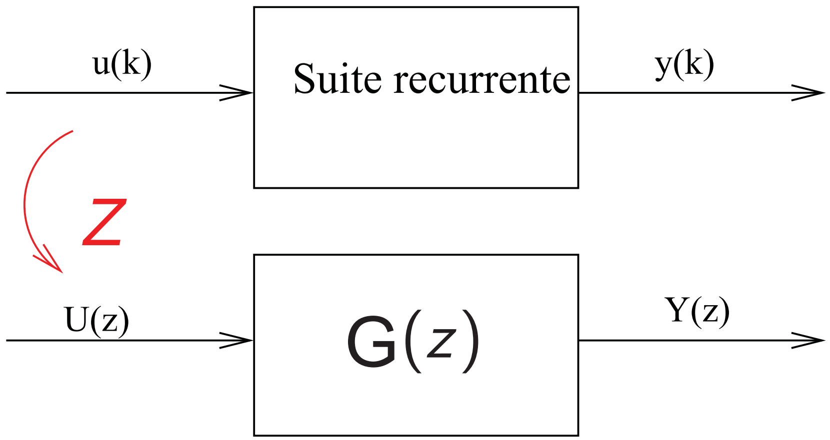
Valeur finale d'un signal à temps discret : $\lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z)$

fonction de Transfert en Z

Modéliser : établir un modèle mathématique reliant les entrées et les sorties d'un système.

Un système linéaire à temps discret peut être décrit par un ensemble d'équations récurrentes, définit comme suit à l'ordre n ($m \leqslant n$, les sorties dépendent uniquement des évemements passés) :

- Opérateur retard : z, transformée en z : $\begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{Z}[y_k] \\ U(z) = \mathcal{Z}[u_l] \end{array}$



$$\begin{array}{lcl} y_k & \rightarrow & Y(z) \\ y_{k-i} & \rightarrow & z^{-i} Y(z) \\ u_l & \rightarrow & U(z) \\ u_{l-j} & \rightarrow & z^{-j} U(z) \end{array}$$

$$Y(z) = \mathrm{G}(z) U(z)$$

$$\mathrm{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0}$$

Transformée en Z

Analogique	Numérique
Transformée de Laplace	Transformée en z
$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$	$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j u[k-j]$
$G(\mathrm{p}) = \mathcal{L}(g(t)) = \frac{Y(\mathrm{p})}{U(\mathrm{p})} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j \mathrm{p}^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{p}^i}$	$G(z) = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}$

Modèle Continu $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T} y(t) + \frac{G}{T} u(t)$ $H(s) = \frac{G}{1 + pT}$

Modèle Echantillonné

k = temps discret normalisé (t/T) $y(\mathrm{k}) = -a_1 y(\mathrm{k}-1) + b_1 u(\mathrm{k}-1)$ $H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$

Transformée en Z

Opérateur retard (z^{-1})

$$z^{-1} y(k) = y(k-1) \; ; \quad z^{-d} y(k) = y(k-d)$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad \longrightarrow \quad (1 + a_1 z^{-1}) y(k) = b_1 z^{-1} u(k)$$

Opérateur de transfert

$$(1 + a_1 z^{-1}) y(k) = b_1 z^{-1} u(k)$$

$$\Big\downarrow \; \text{Division formelle par: } (1 + a_1 q^{-1})$$

$$y(k) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} u(k) = \quad (z^{-1}) u(k)$$

$G(z^{-1})$: opérateur de transfert

Transformée en Z

Lien entre la fonction de transfert et l'équation récurrente

Fonction de transfert en z :

$$\mathrm{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0}$$

Fonction de transfert en z^{-1} :

$$\mathrm{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{m-n} + \cdots + b_0 z^{-n}}{a_n + \cdots + a_0 z^{-n}}$$

équation récurrente

$$a_n y_{(k)} + a_{n-1} y_{(k-1)} + \cdots + a_0 y_{(k-n)} = b_m u_{(k+m-n)} + \cdots + b_0 u_{(k-n)}$$

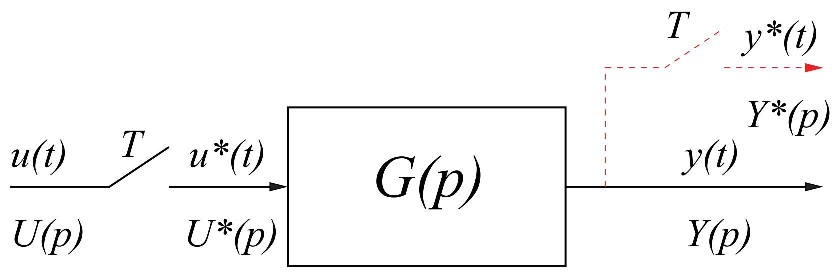
Transformée en z :

$$a_n Y(z) + a_{n-1}\mathcal{Z}(y_{(k-1)}) + \cdots + a_0 \mathcal{Z}(y_{(k-n)}) = b_m \mathcal{Z}(u_{(k+m-n)}) + \cdots + b_0 \mathcal{Z}(u_{(k-n)})$$

et donc

$$(a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}) Y(z) = (b_m z^{m-n} + \cdots + b_0 z^{-n}) U(z)$$

Représentation d'un système échantillonné



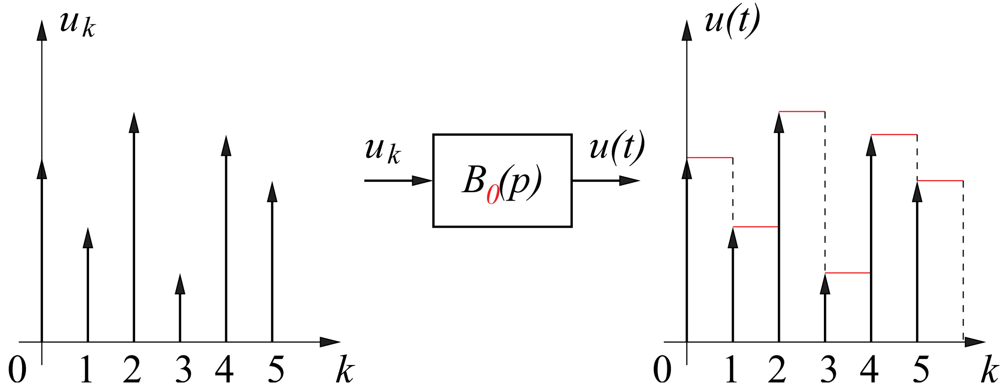
La sortie :

$$Y(p) = G(p)U^*(p) = G(p)\sum_{k=0}^{+\infty} u_{(kT)}e^{-(kT)p} = G(p)\sum_{k=0}^{+\infty} u_{(kT)}z^{-k}$$

Problème pour manipuler cette expression avec à la fois des p et des z

Transformée en Z

Conv. Numérique Analogique (C.N.A) - Bloqueur d'ordre 0



Le but : conserver l'information du signal pendant une période.
La fonction de transfert $B_0(p)$ du bloqueur d'ordre 0 représente la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.
Soit $\Gamma(t)$, un échelon de position unitaire :

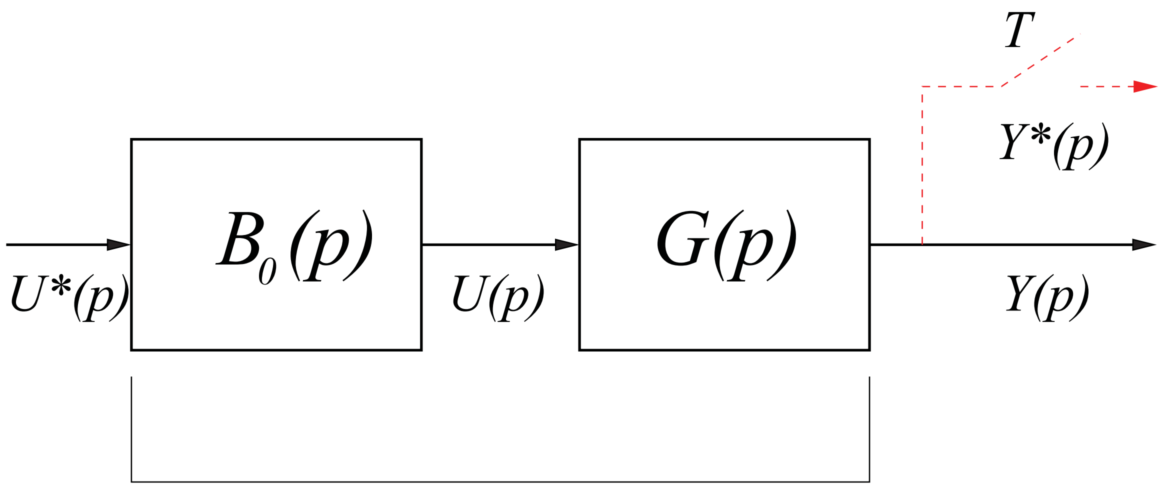
$$B_0(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T), \quad (B_0^*(t) = \delta(t) - \delta(t - T))$$

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

Représentation en z : $B_0(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$

Transformée en Z

Fonction de transfert : bloqueur+processus



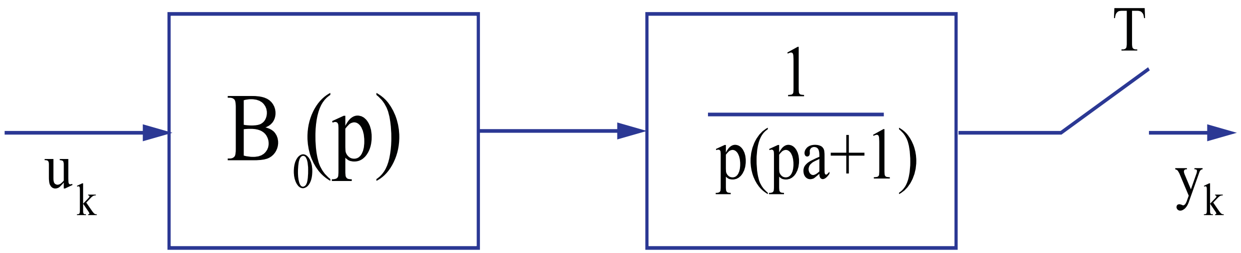
$Z\,[B_0(p)G(p)]=G(z)$

$$G(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p}G(p)\right]$$

$$\boxed{G(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right] = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]}$$

Transformée en Z

Exemple



$$G(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_c(p)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

décomposition en éléments simples

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

Utilisation d'un tableau de transformées élémentaires

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[-\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T})}\right]$$

$$G(z) = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)},\ K = e^{-T} - 1 + T,\ a = e^{-T},\ b = 1 - \frac{T(1-e^{-T})}{e^{-T}-1+T}$$

Transformée en Z

équation récurrente

L'équation récurrente (représentant un système discret) peut être utilisée pour calculer point par point la réponse d'un système.

Example

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_k$$

Conditions initiales : $y_k = 0, \ \forall k \leqslant 0, \ u_k = 0, \ \forall k \neq 0$ et $u_0 = 1$

Application de l'algorithme :

$$\begin{aligned}
y_{(1)} &= \quad 3y_{(0)} - 2y_{(-1)} + u(-1) &= 0 \\
y_{(2)} &= \quad 3y_{(1)} - 2y_{(0)} + u(0) &= 1 \\
y_{(3)} &= \quad 3y_{(2)} - 2y_{(1)} + u(1) &= 3 \\
y_{(4)} &= \quad 3y_{(3)} - 2y_{(2)} + u(2) &= 7
\end{aligned}$$

Déterminer le fonction de transfert G(z) et G(z-1)

Transformée en Z

Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$ Avec : $\xi < 1,$

Cette fonction de transfert possède deux pôles complexes conjugués:

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{(1-\xi^2)}\right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{(1-\xi^2)}\right]$$

Soit : $$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = K\omega_n^2 \cdot \frac{1}{(p-p_1)} \cdot \frac{1}{(p-p_2)}$$

La fonction de transfert en z *équivalente à G(p):*

$$G(z) = K\omega_n^2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_1}\right) \frac{1-\mathrm{e}^{p_1 T_e}}{z-\mathrm{e}^{p_1 T_e}}\right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{p_2}\right) \frac{1-\mathrm{e}^{p_2 T_e}}{z-\mathrm{e}^{p_2 T_e}}\right]$$

Comme : $$p_1 p_2 = \omega_n^2$$

Transformée en Z

on obtient : $$G(z) = \frac{K\left(1 - e^{p_1 T_e}\right)\left(1 - e^{p_2 T_e}\right)}{\left(z - e^{p_1 T_e}\right)\left(z - e^{p_2 T_e}\right)}$$

remplaçons pour finir p_1 et p_2 par leurs expressions.

On obtient : $$G(z) = \frac{K\left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2\,e^{-\xi\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\xi^2}\right)}{z^2 - 2z\,e^{-\xi\omega_n T_e}\cos\omega_n T_e\sqrt{1-\xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Temps de réponse à ±5%

$$T_{r5\%} \simeq \frac{3}{\xi\omega_0}$$

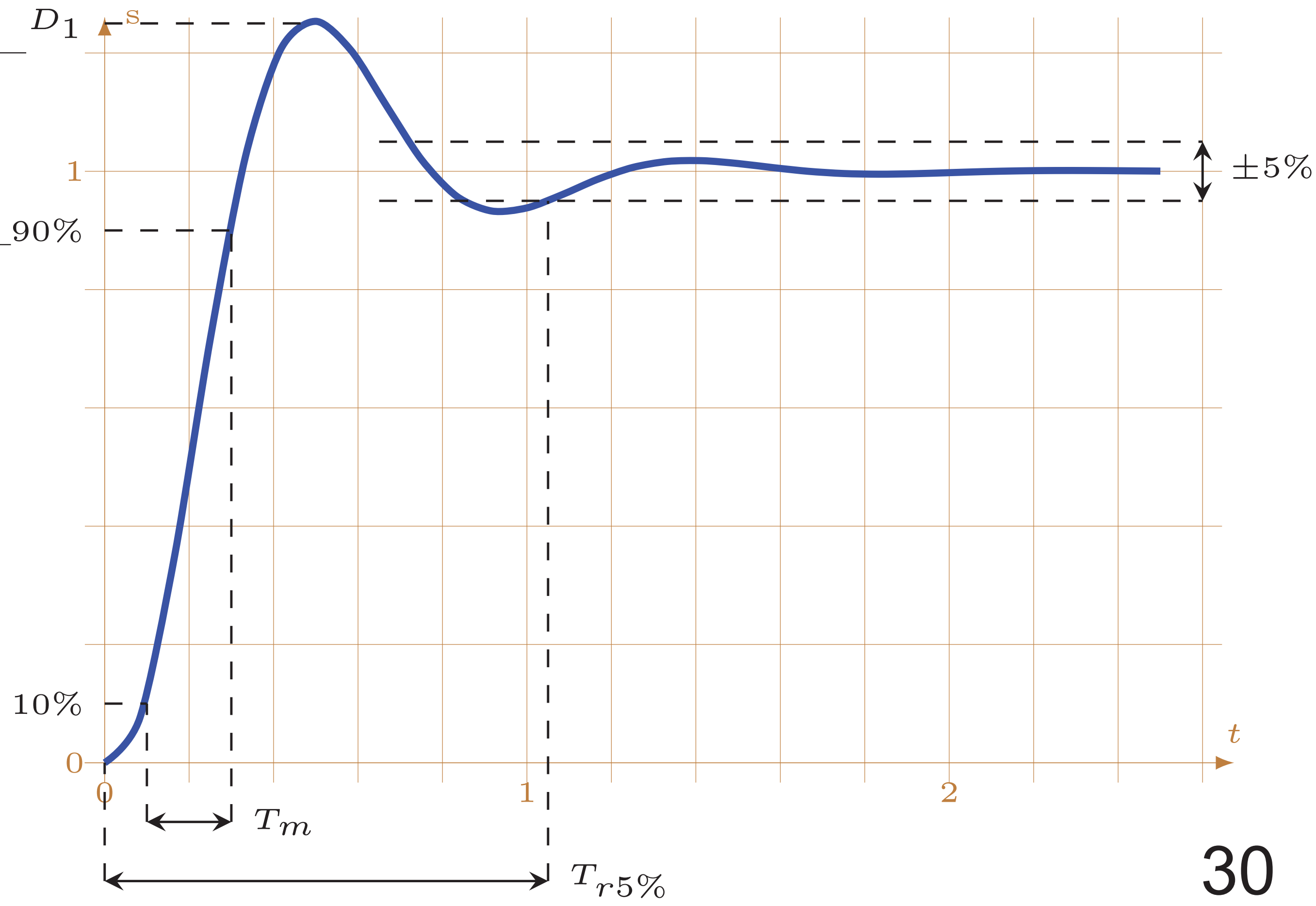
Temps de montée

(10 à 90% de la valeur finale)

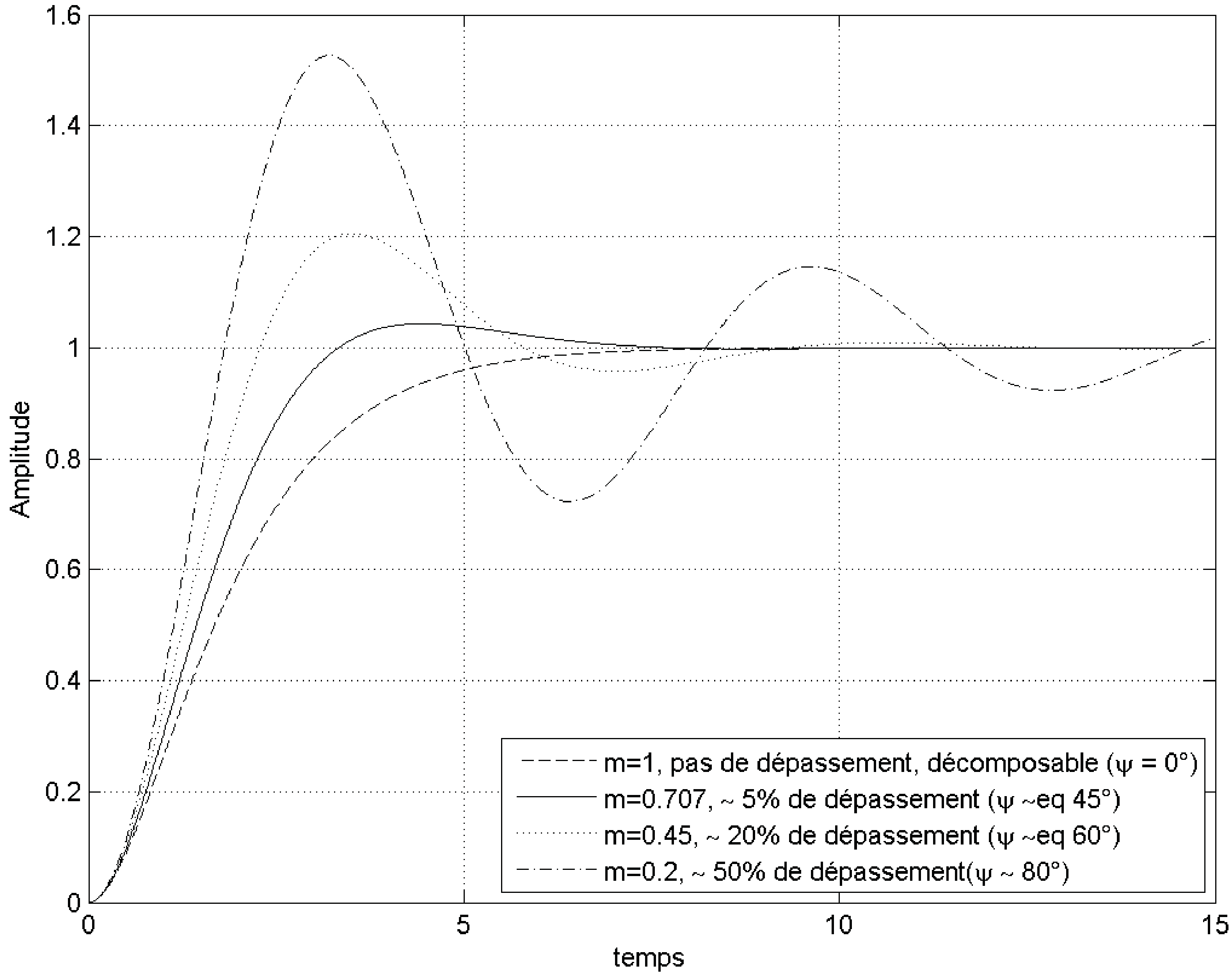
$$T_m = \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

Premier dépassement

$$D_1 = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Transformée en Z

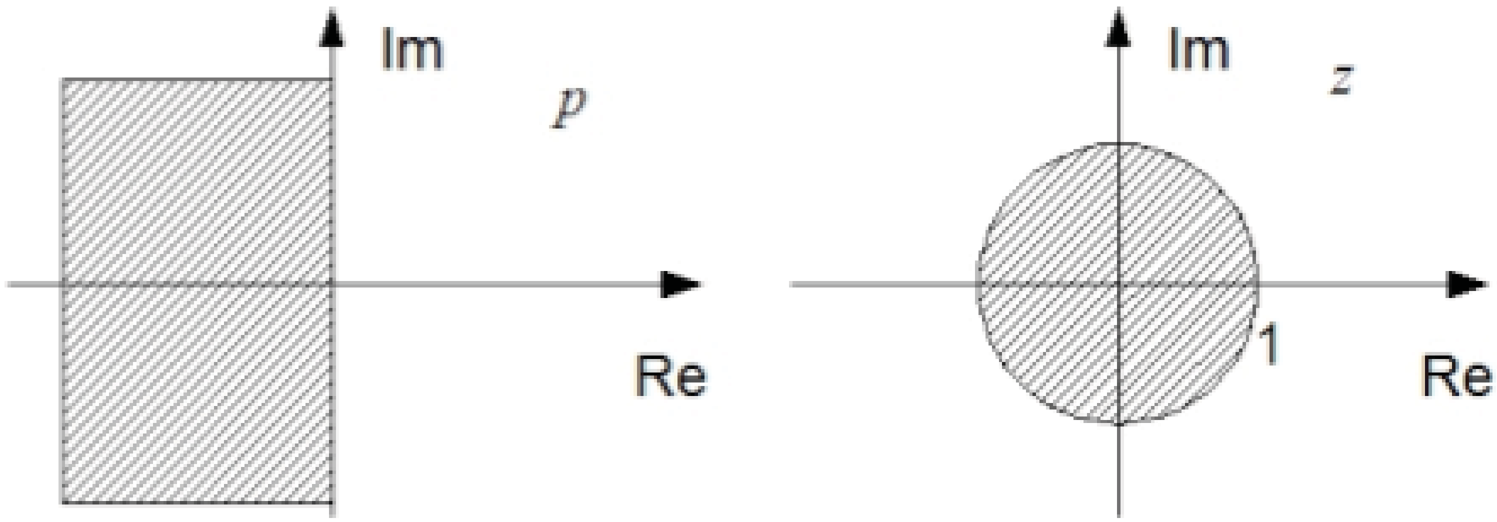


Stabilité

Un système est dit stable si, écarté de sa position de repos, celui-ci revient à cette position lorsque la cause qui l'en a écartée cesse.

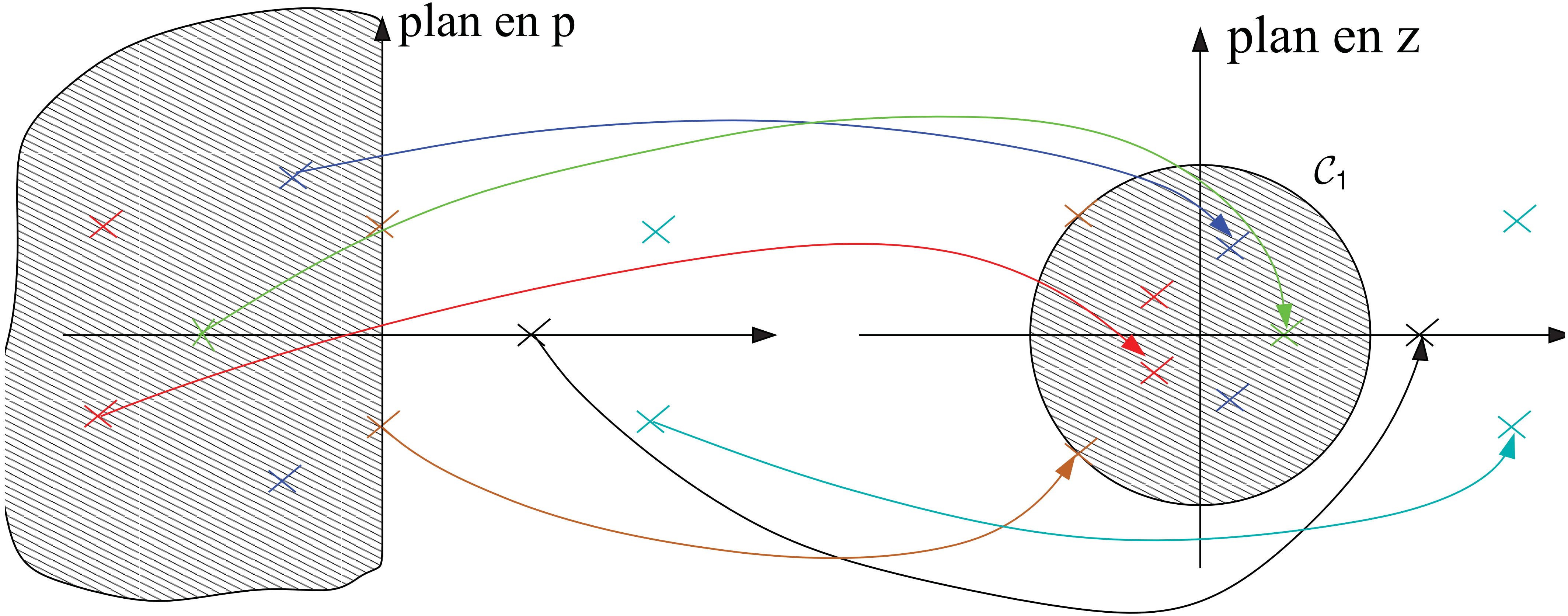
Condition de stabilité

Un système en stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unitaire (de module inférieur à un)



Stabilité

Correspondances



Stabilité

Le critère de jury

Le critère de Jury permet de vérifier si les racines d'un polynômes appartiennent au cercle unité:
Soit le polynôme suivant :

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

Les conditions pour que le système soit BIBO stable aux ordres 2,3 et 4 (hypothèse $a_n > 0$) sont les suivantes :

Stabilité

Le critère de Jury aux ordres 2,3 et 4

$$\mathbf{n=2}: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 & > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 & > 0 \\ a_2 - a_0 & > 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n=3}: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 & > 0 \\ a_3 - |a_0| & > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 & > 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n=4}: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 & > 0 \\ a_4^2 - a_0^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| & > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 - a_2 + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) & > 0 \end{cases}$$

Précision statique ou erreur statique

Definitions

La précision d'un système bouclée est définie à partir de l'erreur $\epsilon(k)$ entre la grandeur de consigne $Y_{ref}(z)$ et la grandeur de sortie $Y(z)$

$$\lim_{k \to +\infty} \epsilon(k), \text{ c'est à dire l'erreur en régime permanent.}$$

théorème de la valeur finale : $f(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, \mathrm{F}(z),$

Le signal d'erreur est : $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = \lim_{k \to +\infty} y_r(k) - y(k).$

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, \epsilon(z),$$

L'expression de l'erreur en Z s'écrit : $\epsilon(z) = Y_{ref}(z) - Y(z)$

Example

Soit un processus de régulation de température représenté par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{a}{s+a}$$

où $\theta(t)$ est la température de la cuve et $u(t)$ le débit d'air chaud circulant dans les serpentins.
Nous désirons asservir la température à une température de référence $\theta_r(t) = \theta_0$ en utilisant un calculateur.

1) Déterminer l'erreur statique pour un régulateur proportionnel
2) Déterminer l'erreur statique pour un régulateur intégral

Précision statique ou erreur statique

Exemples - Correction proportionnelle

Le correcteur analogique proportionnelle est choisie : $u(t) = k\epsilon(t)$.
Calculons $\widehat{B_o(p)G(p)}(z) = \frac{z-1}{z}\mathbb{Z}\left(\mathbb{L}^{-1}\left(\frac{G(p)}{p}\right)\right) = \frac{z-1}{z}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}})$.
L'erreur en régime permanent s'écrit :

$$\epsilon(z) = \frac{\theta_{ref}(z)}{1 + k\frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})}}$$

Or $\theta_{ref}(t) = \theta_0, \theta_{ref}(z) = \theta_0\frac{z}{z-1}$ et donc :

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\epsilon(z) = \frac{\theta_0}{1+k}$$

Précision statique ou erreur statique

Exemples - Correction intégrale

Le correcteur numérique a comme fonction de transfert $K(z) = \frac{TK_i}{z-1}$. On vérifie facilement que $\lim_{z \to 1}(z-1)\epsilon(z) = 0$. L'erreur de position est nulle.

On considère maintenant que $\theta_r(t) = \theta_0 t$

, c'est-à-dire $\theta_r(z) = \frac{T\theta_0 z}{(z-1)^2}$.On obtient l'expression de l'erreur:

$$\epsilon(z) = \frac{zT\theta_0}{(z-1)^2(1 + \frac{k_i T(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})})}$$

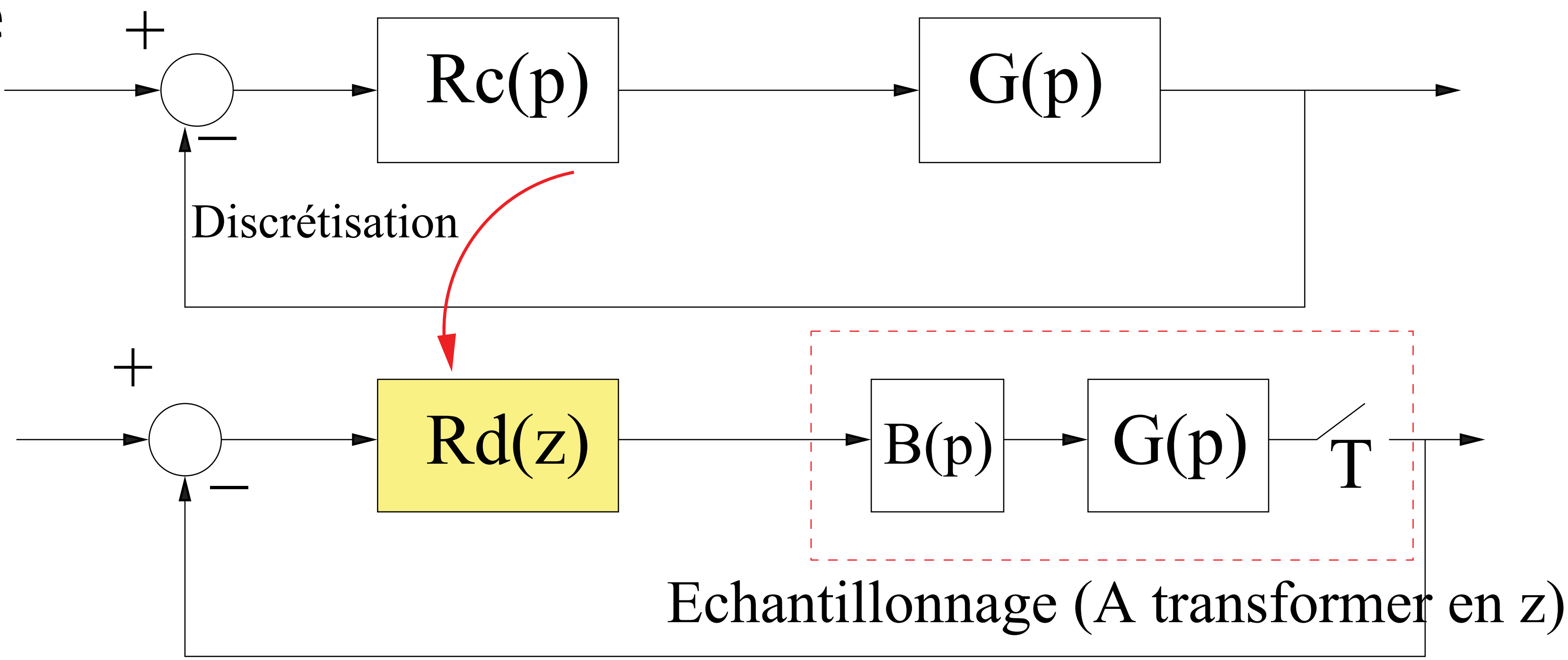
et donc

$$\lim_{z \to 1}(z-1)\epsilon(z) = \frac{T\theta_0}{K_i T}$$

L'erreur de vitesse est inversement proportionnelle au gain de l'intégrateur.

Régulation numérique

Principe



Soit un correcteur continu $R_c(p)$.

On cherche à déterminer un correcteur numérique $R_d(z)$ par approximation de celle d'un correcteur analogique $R_c(p)$.

Objectif : $R_d(z)$ doit se comporter en première approximation de façon semblable à $R_c(p)$.

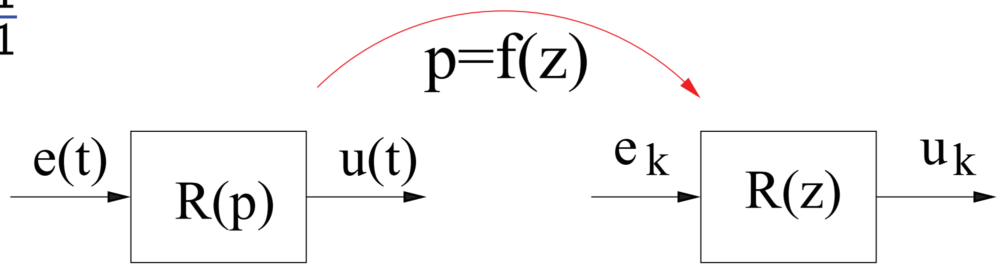
$$G(z) = \mathbb{Z}[B_0(p)G(p)]$$

$R_c(p) \longrightarrow R_d(z)$: Discrétisation mathématique.

Régulation numérique

Approximation de la variable "p" par l'opérateur "z"

- approximation de Tustin : $p = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$
- Discrétisation avant : $p = \frac{z-1}{T}$
  Approximation de la dérivée d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage



- Discrétisation arrière : $p = \frac{z-1}{zT}$

	Dérivation	*Intégration*
Méthode d'Euler arrière (Discrétisation arrière)	$p \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{Tz}{z-1}$
Méthode d'Euler avant (Discrétisation avant)	$p \rightarrow \frac{z-1}{T}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T}{z-1}$
Méthode de Tustin (Transformation bilinéaire)	$p \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$

Régulation numérique

Correction par transposition

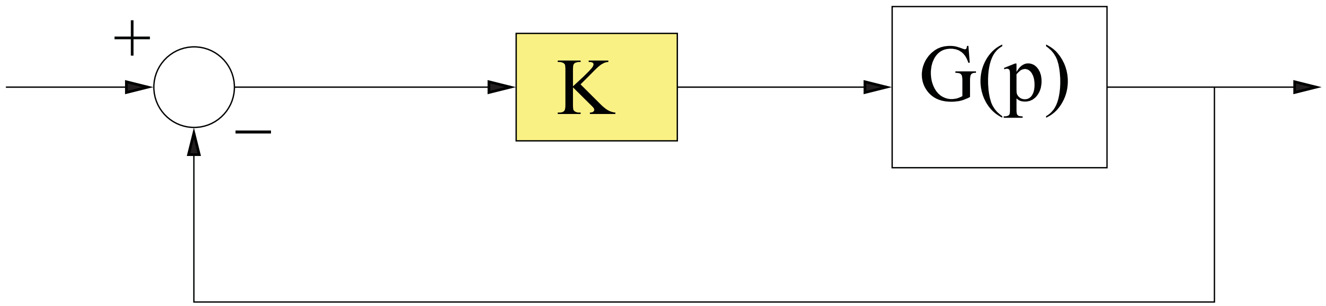
Avec la transformation d'Euler $\left(s \longrightarrow \frac{z-1}{zT}\right)$ **s : variable de Laplace**

	Correcteur continu	Correcteur numérique
P	K_p	K_p
PI idéal	$K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$	$K_p(1 + \frac{1}{T_i}\frac{Tz}{z-1})$
PD réel	$K_p(1 + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s})$	$K_p(1 + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT}{T_d})z - 1})$
PID réel	$K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s})$	$K_p(1 + \frac{1}{T_i}\frac{T\,z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{(1 + \frac{NT}{T_d})z - 1})$

T : période d'échantillonnage

Régulation numérique

Commande proportionnelle en z



Exemple $G(p) = \frac{1}{p+1}$

$$G_{BF}(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} = \frac{K}{p + (1 + K)}$$

Discrétisation avant du correcteur :

$$R_c(p) = K \Longrightarrow R_d(z) = R_c\left(\frac{z-1}{T}\right) = K$$

Ce correcteur doit être stabilisant pour :

$$G(z) = \mathbb{Z}[B_0(p)G(p)] = \frac{z-1}{z}\mathbb{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

Régulation numérique

Commande proportionnelle en z

- Décomposition en éléments simples + transformée en z :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathbb{Z}[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}] = \frac{z-1}{z}[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

- Fonction de transfert du système asservi :

$$G_{BF}(z) = \frac{KG(z)}{1+KG(z)} = \frac{K(1-e^{-T})}{z+K(1-e^{-T})-e^{-T}}$$

- L'asservissement $G_{BF}(z)$ est stable si :

$$|z| < 1 \Longleftrightarrow |K(1-e^{-T}) - e^{-T}| < 1$$

- 2 cas possibles :

$$\begin{cases} K(1-e^{-T}) - e^{-T} < 1 \\ \rightarrow K < \frac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}} \rightarrow \infty \\ \Longrightarrow \text{Impossible} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -K(1-e^{-T}) + e^{-T} > 1 \\ -K(1-e^{-T}) > 1 - e^{-T} \\ \Longrightarrow K > -1 \end{cases}$$

Commande PID

Soit $u(t) = K_p[\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_i}\int_0^t \epsilon(\tau)d\tau + \tau_d \frac{d\epsilon(t)}{dt}]$

- PID en discret $$u_k = K_p[\epsilon_k + \frac{T}{\tau_i}\sum_{j=0}^{k}\epsilon_j + \frac{\tau_d}{T}(\epsilon_k - \epsilon_{k-1})]$$

- En pratique : $PID(p) = \frac{U(p)}{\epsilon(p)} = K_p(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1+\frac{\tau_d}{N}p})$

τ_d est approché par la fonction de transfert $\frac{\tau_d p}{1+\frac{\tau_d}{N}p}$ car un dérivé pur ne peut être implanté, il conduirait à une amplification trop importante des bruits de mesure. N correspond au gain en haute fréquence de la partie dérivée ($3 < N < 20$).

Régulation numérique

Approximation du PID

Approximation arrière (physiquement la plus proche) :

$$U(z) = K_p\left(1 + \frac{T}{\tau_i}\frac{z}{z-1} + \frac{\tau_d(z-1)}{zT + \frac{\tau_d}{N}(z-1)}\right)\epsilon(z)$$

En posant $U(z) = K_p[P(z) + I(z) + D(z)]$, il vient :

- $P(z) = \epsilon(z) \Longrightarrow p_k = \epsilon_k$
- $I(z) = \frac{T}{\tau_i}\frac{z}{z-1}\epsilon(z) \Longrightarrow I(z)(z-1) = \frac{T}{\tau_i}z\epsilon(z)$

  \- $i_{k+1} - i_k = \frac{T}{\tau_i}\epsilon_{k+1} \Longrightarrow i_k = i_{k-1} + \frac{T}{\tau_i}\epsilon_k$
- $D(z) = \frac{N\tau_d(z-1)}{NzT+\tau_d(z-1)}\epsilon(z)$

  \- $(NT + \tau_d)d_{k+1} - \tau_d d_k = N\tau_d(\epsilon_{k+1} - \epsilon_k)$

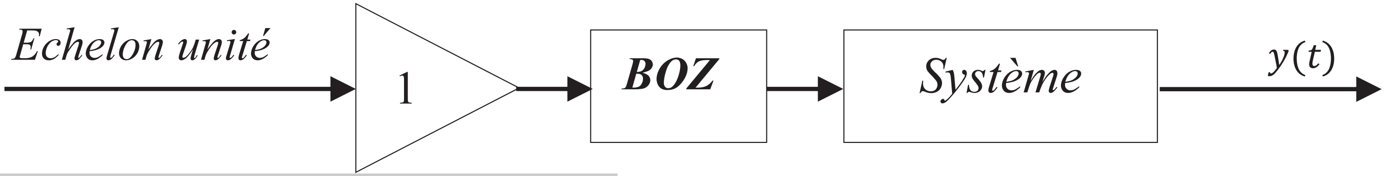
  \- $d_k = \frac{N\tau_d}{NT+\tau_d}d_{k-1} + \frac{\tau_d}{NT+\tau_d}(\epsilon_k - \epsilon_{k-1})$

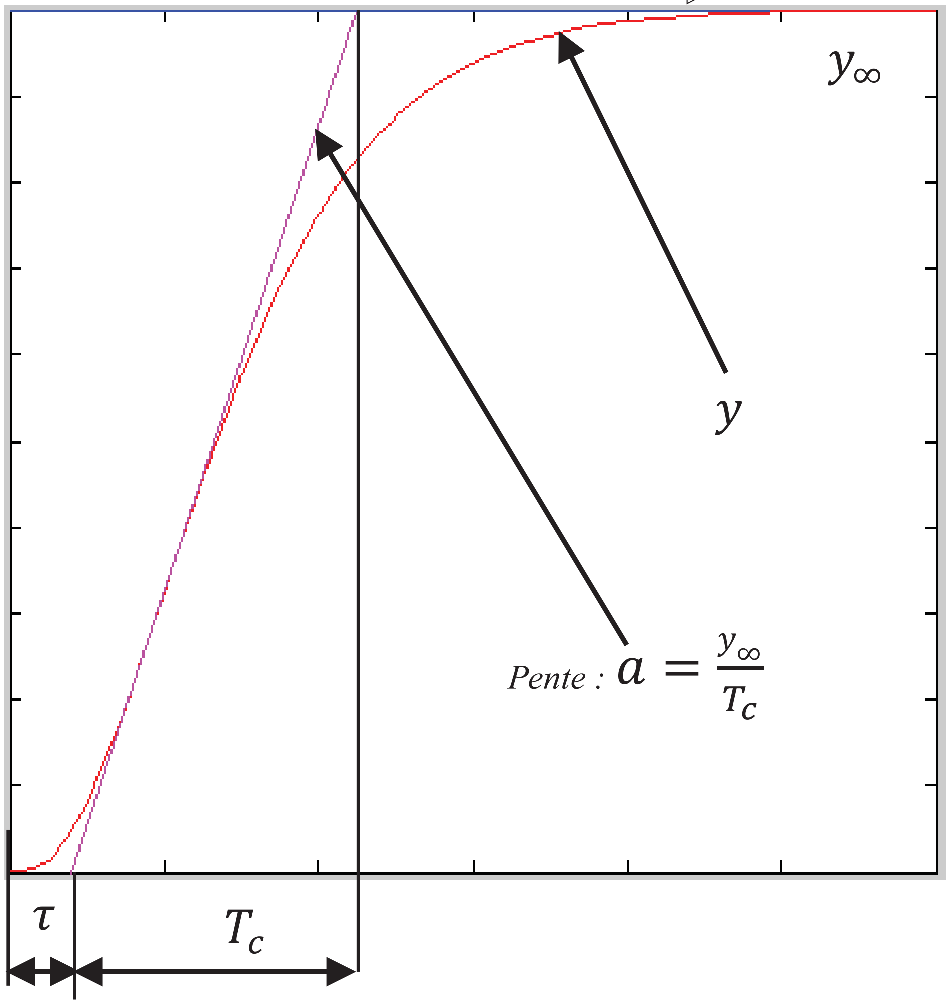
Régulation numérique

Réglage de Takahashi pour des contrôleurs PID numériques

La méthode de **Takahashi** est la généralisation au cas discret de la méthode de **Ziegler-Nichols** utilisée pour le domaine continu.

Essai en boucle ouverte (BO) : Méthode de la réponse indicielle





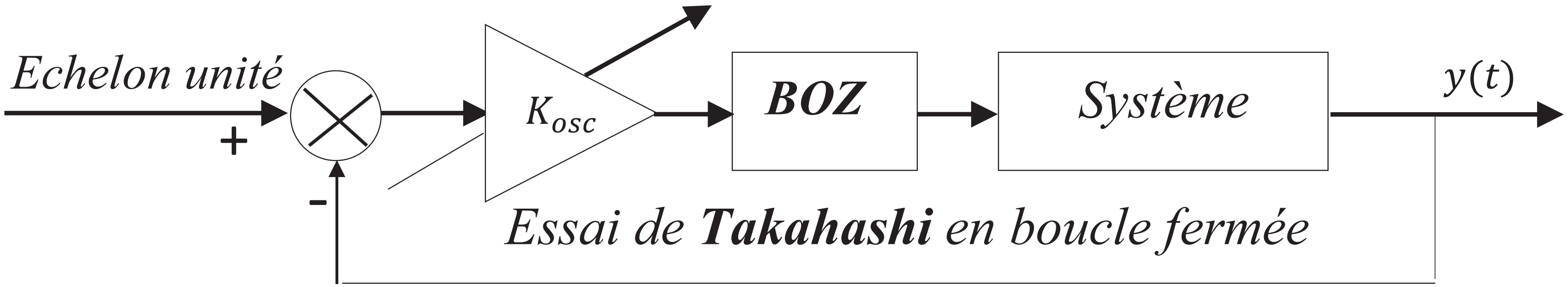
Type du corre	*Paramètres du correcteur*
Correcteur P	$K_p = \dfrac{1}{a(\tau + T)}$
Correcteur PI	$K_p = \dfrac{0.9}{a(\tau + 0.5T)} - 0.5K_iT$ $K_i = \dfrac{0.27}{a(\tau + 0.5T)^2}$
Correcteur PID	$K_p = \dfrac{1.2}{a(\tau + 0.5T)} - 0.5K_iT$ $K_i = \dfrac{0.6}{a(\tau + 0.5T)^2}$ $K_d = \dfrac{0.5}{a}$

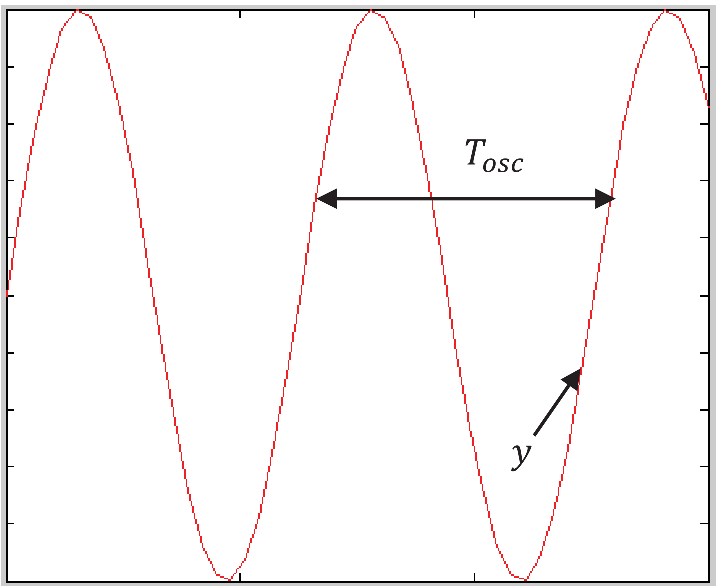
Paramètres des correcteurs P/PI/PID numériques

Régulation numérique

Essai en boucle fermée (BF) : Phénomène de pompage

Le principe de cette méthode consiste à augmenter progressivement le gain 'K_{osc}' d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à l'obtention d'une oscillation entretenue. 'T_{osc}' est la période de l'oscillation entretenue.





Type du correcteur	*Paramètres du correcteur*
Correcteur P	$K_p = 0.5K_{osc}$
Correcteur PI	$K_p = 0.45K_{osc} - 0.5K_iT$ $K_i = 0.54K_{osc}/T_{osc}$
Correcteur PID	$K_p = 0.6K_{osc} - 0.5K_iT$ $K_i = 1.2K_{osc}/T_{osc}$ $K_d = (3/40)K_{osc}T_{osc}$

Paramètres de correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de Takahashi en boule fermée