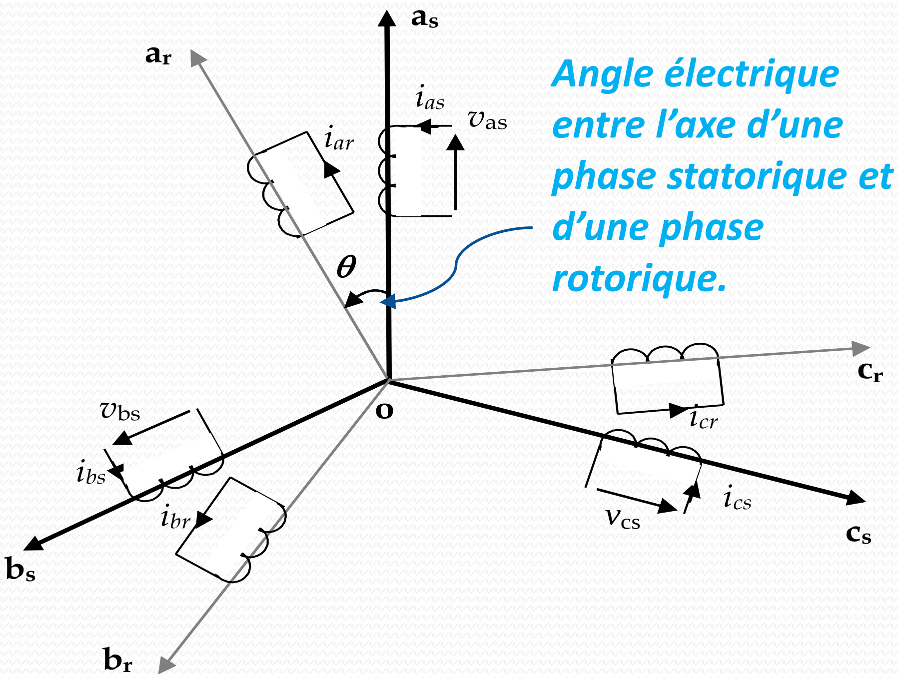
Entrainement à vitesse variable de la machine asynchrone

Modélisation de la machine asynchrone

Modélisation de la machine asynchrone

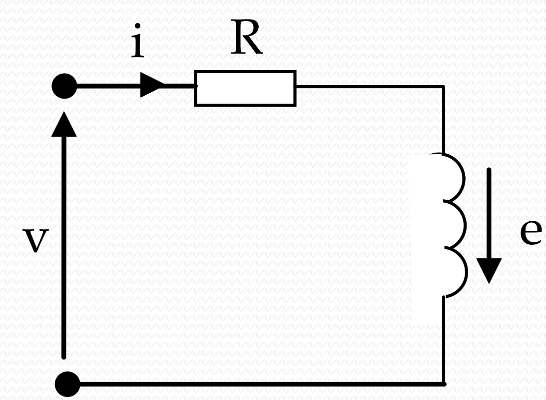
Equations de la machine asynchrone en régime quelconque :



Angle électrique entre l'axe d'une phase statorique et d'une phase rotorique.

Représentation des six enroulements de la machine asynchrone (s : stator, r : rotor).

Chacun de ces six enroulements statoriques ou rotoriques, de résistance R, traversé par un flux est le siège d'une f.e.m. induite : e=-dψ/dt.



Modèle d'un enroulement avec f.é.m.

d'où l'équation électrique :

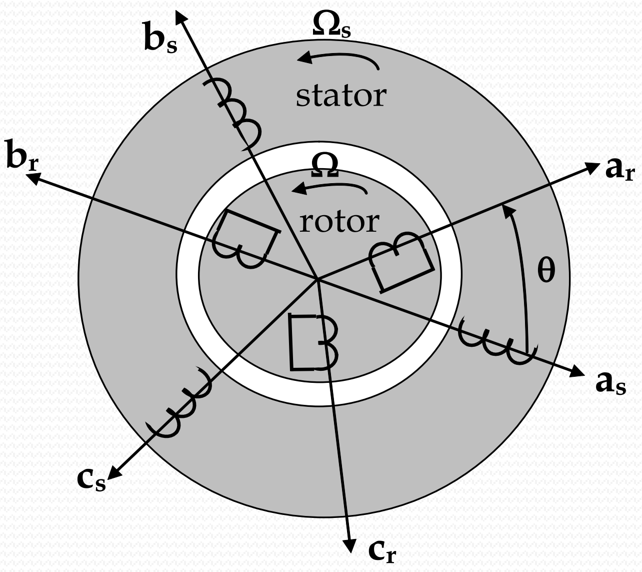
$$v = Ri + \frac{d\psi}{dt}$$

Modélisation de la machine asynchrone

Les équations de la tension correspondant à la phase ***a*** s'écrivent :

au stator : $$V_{as} = \frac{d\Psi_{as}}{dt} + R_s i_{as}$$

au rotor : $$V_{ar} = \frac{d\Psi_{ar}}{dt} + R_r i_{ar}$$



La répartition sinusoïdale du flux au niveau des enroulements entraîne une répartition sinusoïdale des inductances, entre elles, avec la position du rotor

$$\Psi_{as} = l_s i_{as} + M_s \cos(\frac{2\pi}{3}) i_{bs} + M_s \cos(\frac{4\pi}{3}) i_{cs} +$$
$$M_{sr} \cos(\theta) i_{ar} + M_{sr} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) i_{br} + M_{sr} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) i_{cr}$$

$$\Psi_{ar} = l_r i_{ar} + M_r \cos(\frac{2\pi}{3}) i_{br} + M_r \cos(\frac{4\pi}{3}) i_{cr} +$$
$$M_{sr} \cos(-\theta) i_{as} + M_{sr} \cos(-\theta + \frac{2\pi}{3}) i_{bs} + M_{sr} \cos(-\theta + \frac{4\pi}{3}) i_{cs}$$

Modélisation de la machine asynchrone

Pour l'ensemble des enroulements de la machine, les équations électriques instantanées de la machine s'écrivent, en notation matricielle :

Au stator :

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$[v_s]_{abc} = [R_s][i_s]_{abc} + \frac{d}{dt}[\psi_s]_{abc}$$

Au rotor :

$$\begin{bmatrix} v_{ar} \\ v_{br} \\ v_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{ar} \\ \psi_{br} \\ \psi_{cr} \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$[v_r]_{abc} = [0] = [R_r][i_r]_{abc} + \frac{d}{dt}[\Psi_r]_{abc}$$

Modélisation de la machine asynchrone

L'interaction (**couplage**) entre le stator et le rotor se traduit par les relations entre les flux et les courants qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [\Psi_s]_{abc} \\ [\Psi_r]_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_s]_{abc} \\ [i_r]_{abc} \end{bmatrix}$$

avec :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s \\ M_s & l_s & M_s \\ M_s & M_s & l_s \end{bmatrix} \qquad [L_r] = \begin{bmatrix} l_r & M_r & M_r \\ M_r & l_r & M_r \\ M_r & M_r & l_r \end{bmatrix}$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^T = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$[L_s]$, $[L_r]$ *et* $[M_{sr}]$ *représentent respectivement les matrices des inductances statoriques, rotoriques et des inductances mutuelles stator/rotor*

Modélisation de la machine asynchrone

D'où :

$$[v_s]_{abc} = [R_s][i_s]_{abc} + \frac{d}{dt}\{[L_s][i_s]_{abc} + [M_{sr}][i_r]_{abc}\}$$

$$[v_r]_{abc} = [0] = [R_r][i_r]_{abc} + \frac{d}{dt}\{[M_{sr}]^T[i_s]_{abc} + [L_r][i_r]_{abc}\}$$

Ces équations présentent **deux inconvénients majeurs** :

- Un nombre important de **variables couplées** entre elles (Equations des flux);
- La **dépendance** des matrices $[M_{sr}]$ et $[M_{rs}]$ de l'angle électrique θ et donc **du temps**.

Pour pallier à ce problème, on recherche **des transformations** linéaires des variables triphasées de la machine permettant de **passer du repère triphasé** de la machine réelle **à un repère biphasé fixe** par rapport **au stator** ou **au rotor**.

Equation mécanique :

Le modèle complet de la machine s'obtient en tenant compte de l'équation mécanique, qui s'écrit :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = T_{em} - T_L - f_v * \Omega$$

Où :

Ω : vitesse mécanique
J : moment d'inertie
T_{em} : couple électromagnétique
T_L : couple de charge
f_v : frottement visqueux

Modélisation de la machine asynchrone

En notation matricielle, les équations des tensions, du couple et l'équation mécanique de la machine s'écrivent :

$$[V]_{abc} = [R][i]_{abc} + [L]\frac{d}{dt}[i]_{abc} + \frac{d}{d\theta}[L]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)[i]_{abc}$$

$$T_{em} = \frac{1}{2} n_p [i]_{abc}^T \frac{d\theta}{dt}[L][i]_{abc}$$

$$J\frac{d\Omega}{dt} = T_{em} - T_L - f_v * \Omega$$

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} = n_p\Omega$$

L'ensemble de ces équations représente un ***système non linéaire avec des coefficients qui dépendent de la position du rotor et donc du temps****. A fin de simplifier l'ordre de ce modèle et d'éliminer la dépendance avec le temps on fait appel à des transformations de variables dans l'espace.*

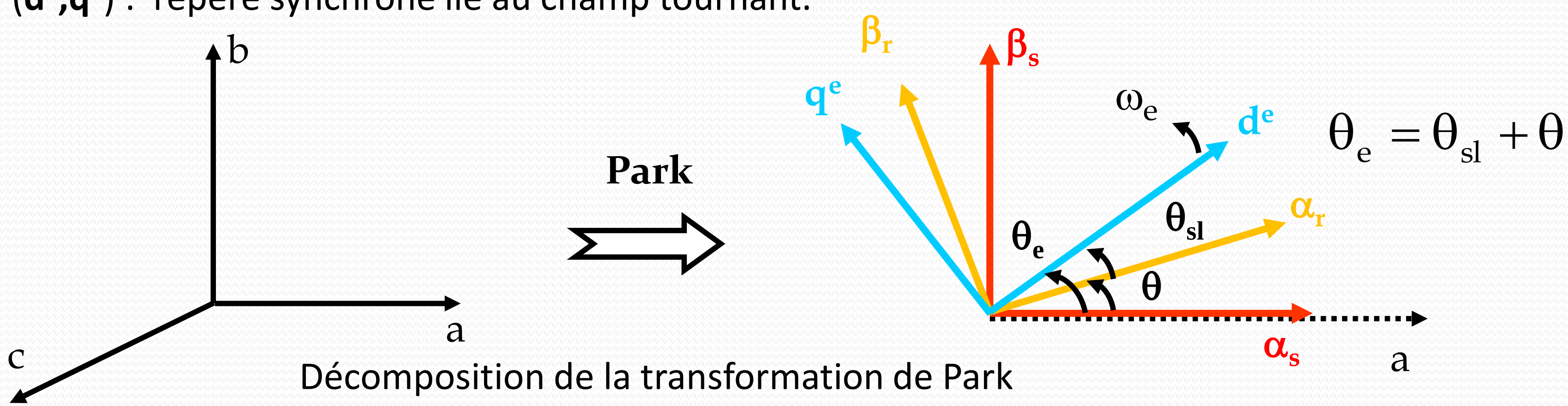
Transformation de Park :

La transformation de Park est une transformation qui permet de transformer un système triphasé équilibré (a, b, c) en un système biphasé équivalent (d,q) quelconque. Elle transforme les grandeurs électriques (courant, tension, flux, …) avec la matrice orthogonale et normalisée suivante :

$$[P(\alpha)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin\alpha & -\sin(\alpha - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Les grandeurs triphasées sont ainsi ramenées en grandeurs biphasées dans divers repères en quadrature. En particulier, on distingue :

- (α_s,β_s) : repère stationnaire lié au stator
- (α_r,β_r) : repère stationnaire lié au rotor,
- (d^e,q^e) : repère synchrone lié au champ tournant.



Décomposition de la transformation de Park

Transformation de Park :

Le passage au **repère stationnaire lié au stator** (a_s,b_s), donne les relations entre les vecteurs de n'importe quelle grandeur **x** (flux, courant, tension,….) par la transformation de Park correspondant à **α=o** ou **transformation de Concordia**, soit :

$$[x]_{\alpha\beta} = [C][x]_{abc} \qquad [C] = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Alors que, le passage au **repère synchrone lié au champ tournant** (d^e,q^e) se déduit par projection à l'aide de l'angle θ_e :

$$[x]_{dq^e} = [P(\theta_e)][x]_{\alpha\beta} \qquad [P(\theta_e)] = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Modèle de Park

1. Cas du repère synchrone lié au champ tournant (d^e,q^e) :

Pour des raisons de stabilité, dans certaines conditions de fonctionnement, le repère synchrone lié au champ tournant qui donne des valeurs continues des tensions et des courants, est plutôt utilisé. Il vise à améliorer les performances dynamiques de la machine.

Les équations de la machine asynchrone permettent, en utilisant les différentes transformations citées dans le paragraphe précédent, d'établir le modèle de Park décrit par les équations suivantes :

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt}\psi_{ds} - \omega_e \psi_{qs}$$

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt}\psi_{qs} + \omega_e \psi_{ds}$$

$$0 = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt}\psi_{dr} - (\omega_e - \omega_r)\psi_{qr}$$

$$0 = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt}\psi_{qr} + (\omega_e - \omega_r)\psi_{dr}$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_r}(\psi_{dr} i_{qs} - \psi_{qr} i_{ds})$$

Modèle de Park

2. Cas du repère stationnaire lié au stator (α,β) :

Pour l'étude du régime dynamique des entraînements à vitesse variable de la machine asynchrone, le repère stationnaire lié au stator ($\alpha\beta o$) est parfois préférable. En fait, les calculs sont moins complexes et des termes deviennent nuls (w_e=0). Dans ce cas, le modèle de Park se simplifie et il est décrit par les équations suivantes :

$$v_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + \frac{d}{dt}\psi_{\alpha s}$$

$$v_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + \frac{d}{dt}\psi_{\beta s}$$

$$0 = R_r i_{\alpha r} + \frac{d}{dt}\psi_{\alpha r} + \omega_r \psi_{\beta r}$$

$$0 = R_r i_{\beta r} + \frac{d}{dt}\psi_{\beta r} - \omega_r \psi_{\alpha r}$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_r}(\psi_{\alpha r} i_{\beta s} - \psi_{\beta r} i_{\alpha s})$$

Expressions du couple

Le couple électromagnétique est une grandeur qui joue un rôle primordial dans la commande de la machine. Son expression est développée à partir de l'expression de la puissance instantanée qui s'écrit dans **le repère dq** :

$$p_e(t) = v_{ds} i_{ds} + v_{qs} i_{qs} + v_{dr} i_{dr} + v_{qr} i_{qr}$$

A partir du système d'équations du modèle de Park (repère lié au champ tournant), cette expression devient :

$$p_e(t) = \underbrace{R_s(i_{ds}^2 + i_{qs}^2) + R_r(i_{dr}^2 + i_{qr}^2)}_{(i)} + \underbrace{i_{ds}\frac{d\psi_{ds}}{dt} + i_{qs}\frac{d\psi_{qr}}{dt} + i_{dr}\frac{d\psi_{dr}}{dt} + i_{qr}\frac{d\psi_{qr}}{dt}}_{(j)} +$$

$$\underbrace{\omega_e(\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}) + \omega_{sl}(\psi_{dr} i_{qr} - \psi_{qr} i_{dr})}_{(k)}$$

et qui peut-être décomposé en 3 termes :

(i) puissance dissipée par effet joule au stator et au rotor,

(j) variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée,

(k) puissance mécanique P_m qui produit le couple électromagnétique.

Expressions du couple

En tenant compte des équations des flux :

$$\psi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \qquad \psi_{dr} = M i_{ds} + L_r i_{dr}$$
$$\psi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \qquad \psi_{qr} = M i_{qs} + L_r i_{qr}$$

on peut donc écrire que : $P_m = [\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}](\omega_e - \omega_{sl})$

Or : $\omega_e - \omega_{sl} = \omega$

D'où : $$P_m = \omega[\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds}]$$

Par ailleurs, la puissance mécanique est aussi égale à $T_{em}\Omega$ et $\omega = n_p\Omega$. D'où, l'expression scalaire du couple :

$$\boxed{T_{em} = n_p(\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds})}$$

Expressions du couple

Il en résulte d'autres expressions, toutes égales, en procédant d'un choix d'élimination de certaines variables des équations des flux, on trouve ainsi :

$$T_{em} = n_p M(i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr})$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_s}(\psi_{qs} i_{dr} - \psi_{ds} i_{qr})$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_r}(\psi_{dr} i_{qs} - \psi_{qr} i_{ds})$$

On remarque que **le couple étant une grandeur quadratique** et **ne dépend pas du repère** dans lequel il est exprimé. Ainsi, dans le repère lié au stator, les expressions du couple s'écrivent :

$$T_{em} = n_p(\psi_{\alpha s} i_{\beta s} - \psi_{\beta s} i_{\alpha s})$$

$$T_{em} = n_p M(i_{\beta s} i_{\alpha r} - i_{\alpha s} i_{\beta r})$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_s}(\psi_{\beta s} i_{\alpha r} - \psi_{\alpha s} i_{\beta r})$$

$$T_{em} = n_p \frac{M}{L_r}(\psi_{\alpha r} i_{\beta s} - \psi_{\beta r} i_{\alpha s})$$

Modèle sous forme de représentation d'état

Le modèle de la machine asynchrone étant non-linéaire, il doit-être linéarisé pour différents points de fonctionnement pour réaliser un contrôle linéaire. Les techniques modernes de commande des entraînements réglés nécessitent souvent un modèle sous forme d'état de la machine et par suite un modèle linéaire aux différents points de fonctionnement. Cette représentation d'état est fonction du repère de fonctionnement choisi (αβ ou dq) et des variables d'état caractérisant la machine.

1. Modèle d'état exprimé dans le repère fixe lié au stator (α,β)

Pour une commande non linéaire, le choix d'un repère stationnaire (α,β) évite l'utilisation d'une transformation dans un repère dont la position est mal connue alors que le choix d'un repère tournant exige la position exacte de ce dernier.

D'autre part, le choix des variables d'état dépend de la loi de commande à réaliser et de la nature d'alimentation du convertisseur alimentant la machine. Généralement, un modèle d'état complet est réalisé à partir des variables électriques (courants et/ou flux) et de la vitesse Ω.

Modélisation de la machine asynchrone

Modèle sous forme de représentation d'état

1. Modèle d'état exprimé dans le repère fixe lié au stator (α,β)

On peut, écrire le modèle de la machine asynchrone sous forme d'état en associant le vecteur d'état $x = [i_{\alpha s}, i_{\beta s}, \psi_{\alpha r}, \psi_{\beta r}]^T$ qui contient les courants statoriques et les flux rotoriques ainsi que le vecteur des variables de commande (entrée) $u = [v_{\alpha s} \quad v_{\alpha s}]^T$ et les paramètres de mesures (sortie) $y = [i_{\alpha s} \quad i_{\beta s}]^T$ du système correspondant respectivement aux tensions et courants statoriques. D'où le modèle d'état suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}) & 0 & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{MT_r} & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M}\omega \\ 0 & -(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}) & -\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M}\omega_r & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{MT_r} \\ \frac{M}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & -\omega \\ 0 & \frac{M}{T_r} & \omega & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix}$$

$$T_r = \frac{L_r}{R_r} \qquad T_s = \frac{L_s}{R_s}$$

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r} \qquad \omega_{sl} = \omega_e - \omega$$

Modèle sous forme de représentation d'état

1. Modèle d'état exprimé dans le repère fixe lié au stator (α,β)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{\sigma T_s}+\frac{1-\sigma}{\sigma T_r}) & 0 & \frac{1-\sigma}{\sigma M T_r} & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M}\omega_r \\ 0 & -(\frac{1}{\sigma T_s}+\frac{1-\sigma}{\sigma T_r}) & -(\frac{1-\sigma}{\sigma})\frac{1}{M}\omega_r & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M T_r} \\ \frac{M}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_r \\ 0 & \frac{M}{T_r} & -\omega_r & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha s} \\ v_{\beta s} \end{bmatrix}$$

$i_{\alpha s}, i_{\beta s}, \psi_{\alpha r}, \psi_{\beta r}, v_{\alpha s}, v_{\beta s}$: composantes du **courant**, du **flux** et de la **tension**.

Modèle sous forme de représentation d'état

2. Modèle d'état exprimé dans le repère lié au champ tournant (d-q)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \psi_{dr} \\ \psi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\sigma T_s}+\frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right) & \omega_e & \frac{1-\sigma}{\sigma M T_r} & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M}\omega_r \\ -\omega_e & -\left(\frac{1}{\sigma T_s}+\frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right) & -\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)\frac{1}{M}\omega_r & \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{M T_r} \\ \frac{M}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_{sl} \\ 0 & \frac{M}{T_r} & -\omega_{sl} & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \psi_{dr} \\ \psi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix}$$

$i_{ds}, i_{qs}, \psi_{dr}, \psi_{qr}, v_{ds}, v_{qs}$: composantes du **courant**, du **flux** et de la **tension**.

FIN