

*Université Internationale de Casablanca*

*Génie Electrique*

***Electromagnétisme  
des milieux***

*A, ABOULOIFA*

# *Chapitre 2: Vecteurs et Champs*

**2.1** *Introduction*

**2.2** *Différentielle*

**2.3** *Produits scalaire et vectoriel*

**2.4** *Gradient*

**2.5** *Flux et Divergence*

**2.6** *Circulation et Rotationnel*

**2.7** *Théorème de Stokes / champ conservatif*

**2.8** *Laplacien*

**2.9** *Quelques identités*

**2.10** *Coordonnées curvilignes*

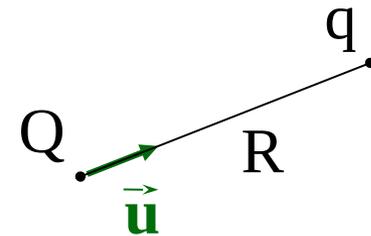
# Chapitre 2: Vecteurs et Champs

## 2.1 Introduction

Dans ce cours nous allons étudier des phénomènes électriques et magnétiques en termes de *champs* créés par les charges électriques statiques et/ou en mouvement (courants).

Par exemple, considérons une charge électrique  $Q$  située à l'origine et calculons la force qu'elle exerce sur une autre charge  $q$  à la position  $\mathbf{R}$ . La loi de Coulomb donne cette force  $\mathbf{F}$  en fonction de  $q$ ,  $Q$ , la distance  $R$  séparant les deux charges et une constante  $\epsilon_0$ :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \vec{\mathbf{u}} \quad \vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{R}$$



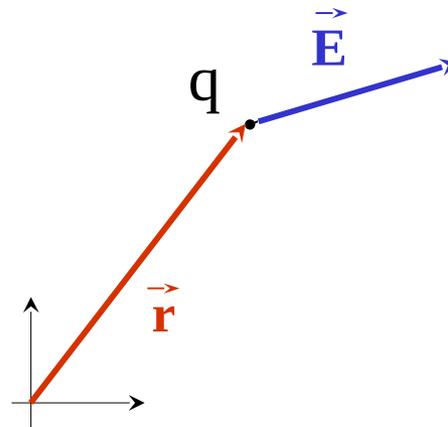
# Chapitre 2: Vecteurs et Champs

## 2.1 Introduction

Nous pouvons également mettre cette force sous la forme  $\vec{F} = q \vec{E}$  où  $\vec{E}$  est appelé **champ électrique**. Ce champ matérialise l'effet de la charge  $Q$ , ou de toute distribution de charges  $\{Q_i\}$  sur la charge *test*  $q$  à la position de cette dernière charge. **Si on change la position de la charge test** - les autres charges  $Q_i$  restant fixes (ou alors le calcul étant fait au même instant) - **le module et l'orientation du champ  $\vec{E}$  vont changer**, ce que l'on peut prendre en considération dans une notation du type  $\vec{E}(\vec{r})$ .

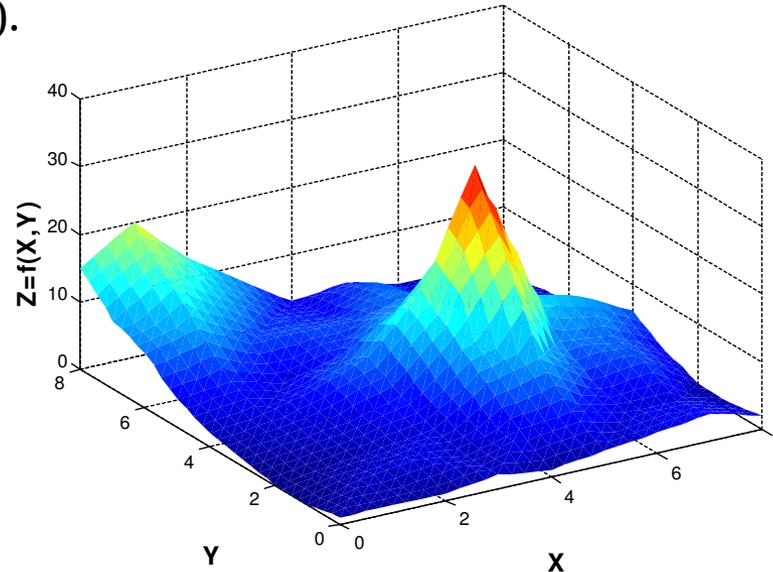
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \vec{u}$$

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r})$$



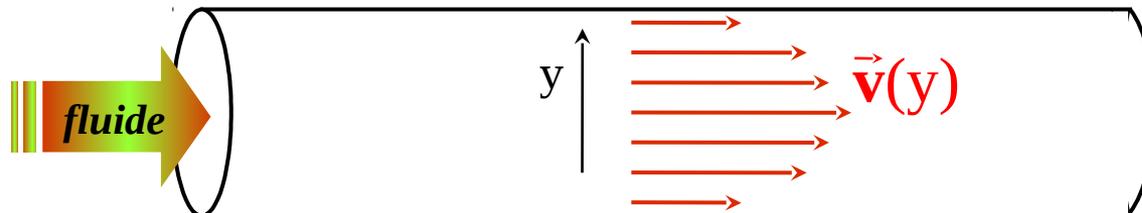
Plus généralement, un **champ** est une fonction (être mathématique) qui représente une quantité physique en tous les points de l'espace. Si la quantité en question peut être complètement déterminée par un seul nombre (qui peut être complexe), on parle de **champ scalaire** (température, densité, potentiel électrostatique, etc.).

exemple:



Si au contraire il faut connaître en tout point une orientation et un module (nombre) on parle alors de **champ vectoriel** (vitesse dans un écoulement, force de gravitation, champ électrique ou magnétique, etc.).

exemple:



## 2.2 Différentielle

Lorsqu'une fonction scalaire  $f$  dépend de plusieurs variables ( $x, y, z, \dots$ ) l'accroissement de la fonction  $f$  lorsqu'on accroît les variables  $x, y, z, \dots$  de quantités  $dx, dy, dz, \dots$  autour du point de coordonnées  $x, y, z, \dots$  est donné par:

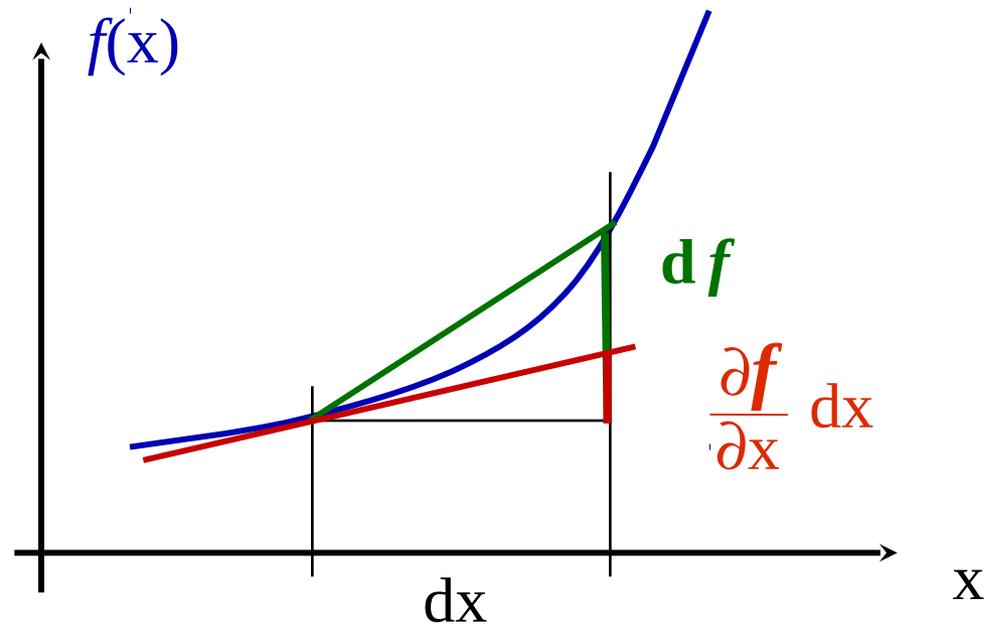
$$df(x, y, z) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y, z} \cdot dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z, x} \cdot dy + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{x, y} \cdot dz$$

*ou par simplification  
d'écriture:*

$$df \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

où la quantité  $\partial f / \partial x$  est la dérivée partielle de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ , c'est à dire qu'on calcule la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  comme s'il s'agissait d'une fonction à une seule variable  $x$  et où  $y, z, \dots$  seraient des *paramètres*. Il s'agit d'un développement au premier ordre et l'égalité stricte n'est vraie qu'à la limite lorsque  $dx$  et  $dy$  tendent vers zéro.

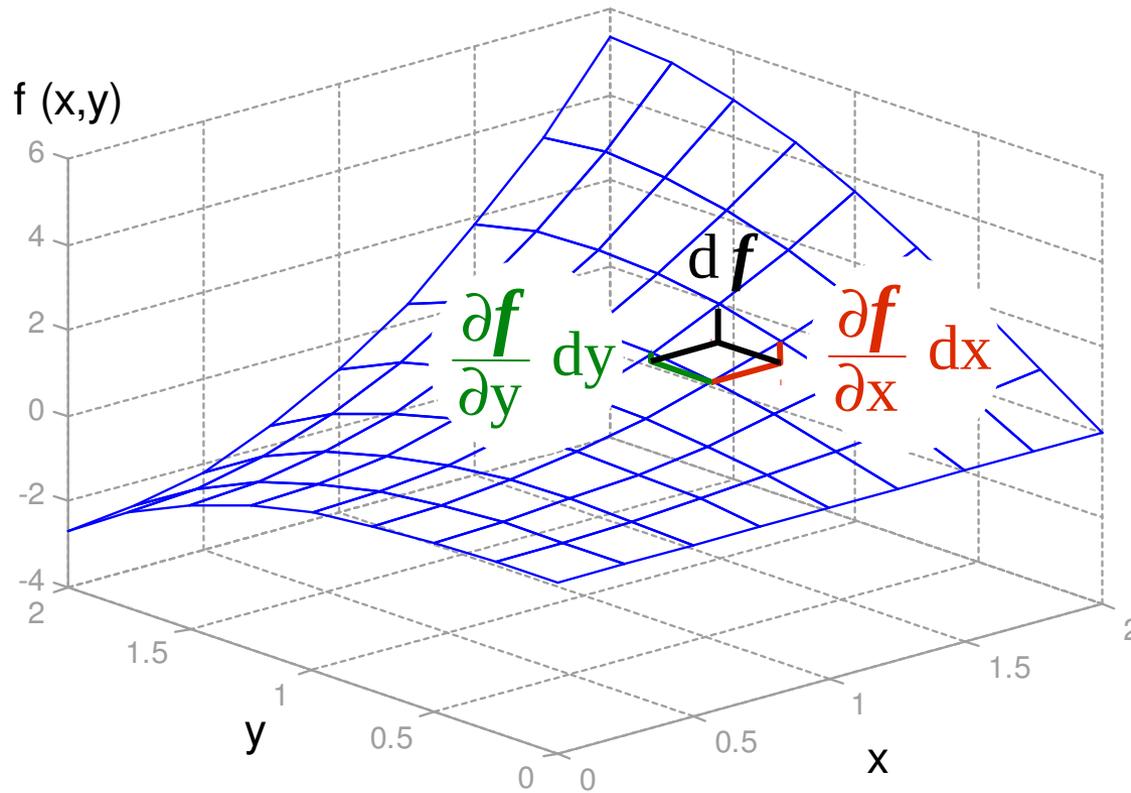
Exemple 1D :



$df$  et  $(\partial f / \partial x)dx$  se confondent lorsque  $dx$  tend vers zéro

Exemple 2D :

$$f(x,y) = x^2y - y^3/3$$



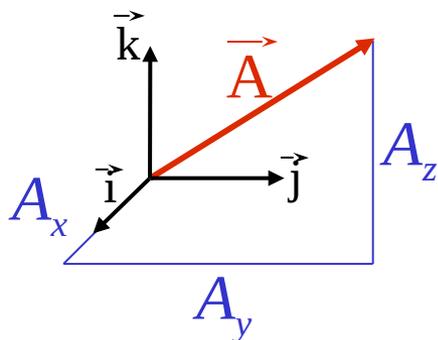
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot 2x$$

$$df = 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$$

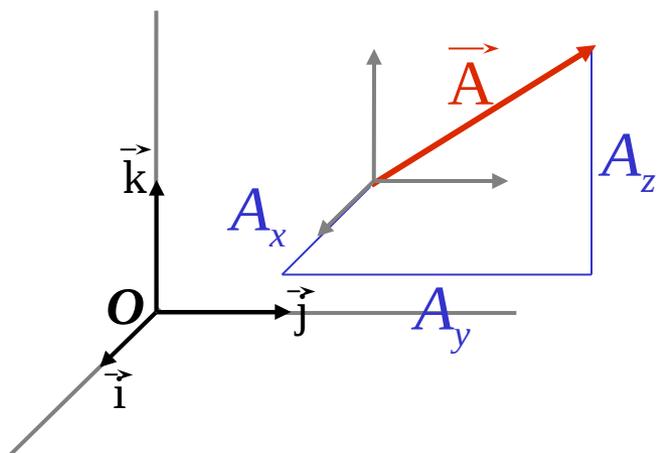
## 2.3 Produits scalaire et vectoriel

**Vecteur:** un vecteur est caractérisé par ses  $n$  composantes (projections) le long de  $n$  axes définissant les  $n$  directions d'un espace à  $n$  dimensions. Nous nous limiterons à l'espace physique à 3 dimensions et utiliserons en général un **système d'axes orthonormé**. Un vecteur possède donc une **orientation** (direction + sens) et une **longueur** (module ou norme), **mais n'a pas a priori d'origine**.



$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

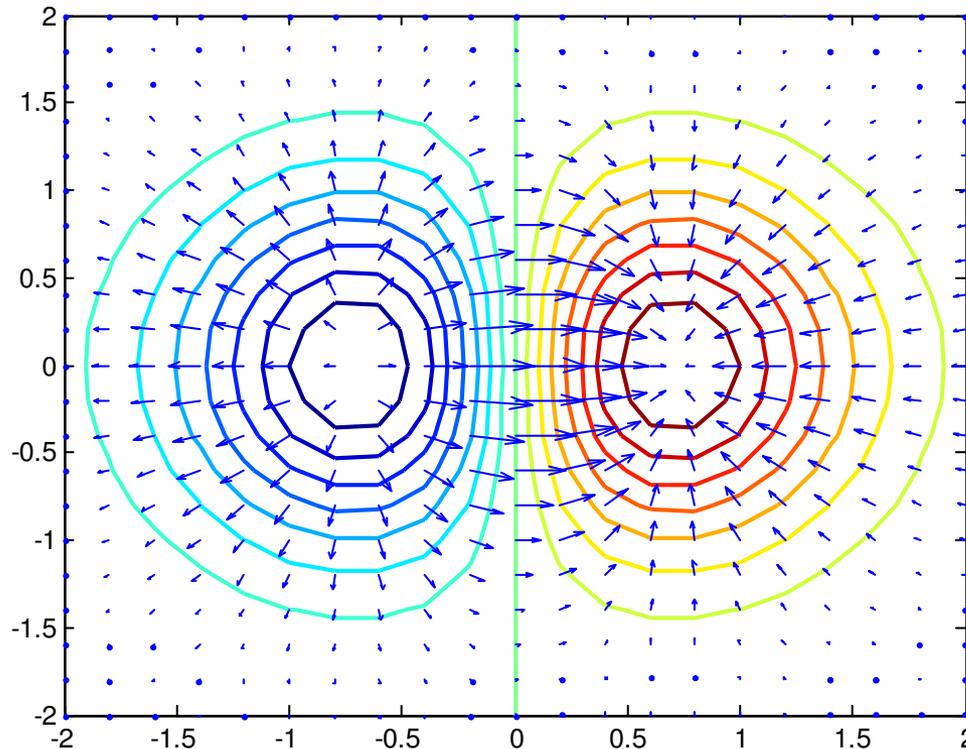
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$



$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

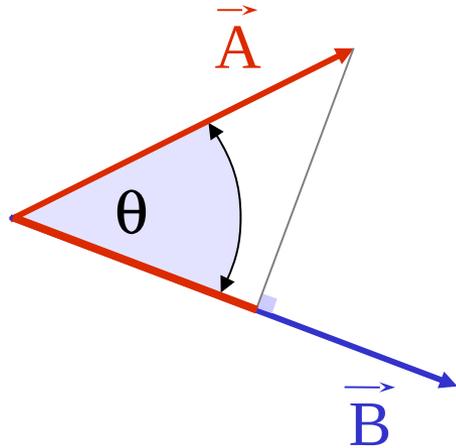
Si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  repère orthonormé !

**Champ de Vecteurs:** un champ de vecteur est l'association d'un vecteur à chaque point de l'espace: *en tout point de l'espace on définit le champ par un vecteur  $\Leftrightarrow$  direction & module*



**Le champ de vecteur ci-dessus (flèches bleues) correspond au champ électrique créé par deux charges électriques ponctuelles. Les lignes de couleurs correspondent à des iso-contours équipotentiels**

## Produit Scalaire:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos(\theta)$$

$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B}$  projection de  $\vec{A}$  sur direction de  $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

$$\vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

repère             
orthonormé:

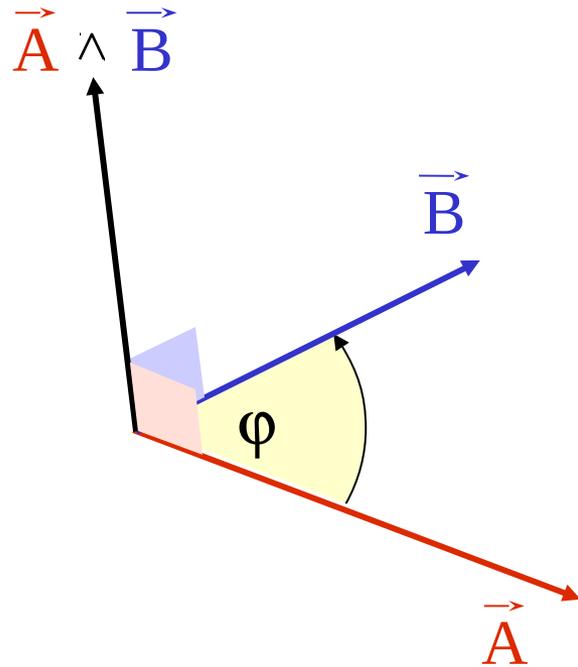
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

exemple: travail  $dW$  d'une force  $\vec{F}$  le long d'un déplacement  $d\vec{r}$  :  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

## Produit Vectoriel:



$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{B} = 0$$

$$C = AB \sin(\varphi)$$

$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  trièdre direct !!!

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

$$\vec{A} \wedge (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

repère orthonormé:  $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

permutations circulaires

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

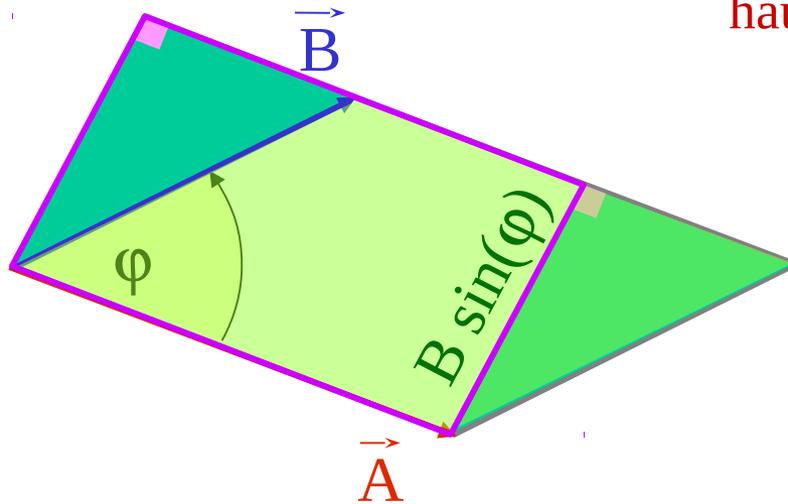
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

**Produit Vectoriel:**

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = \underbrace{A B \sin(\varphi)}$$

hauteur du triangle



parallélogramme

$AB\sin(\varphi) =$  surface du rectangle

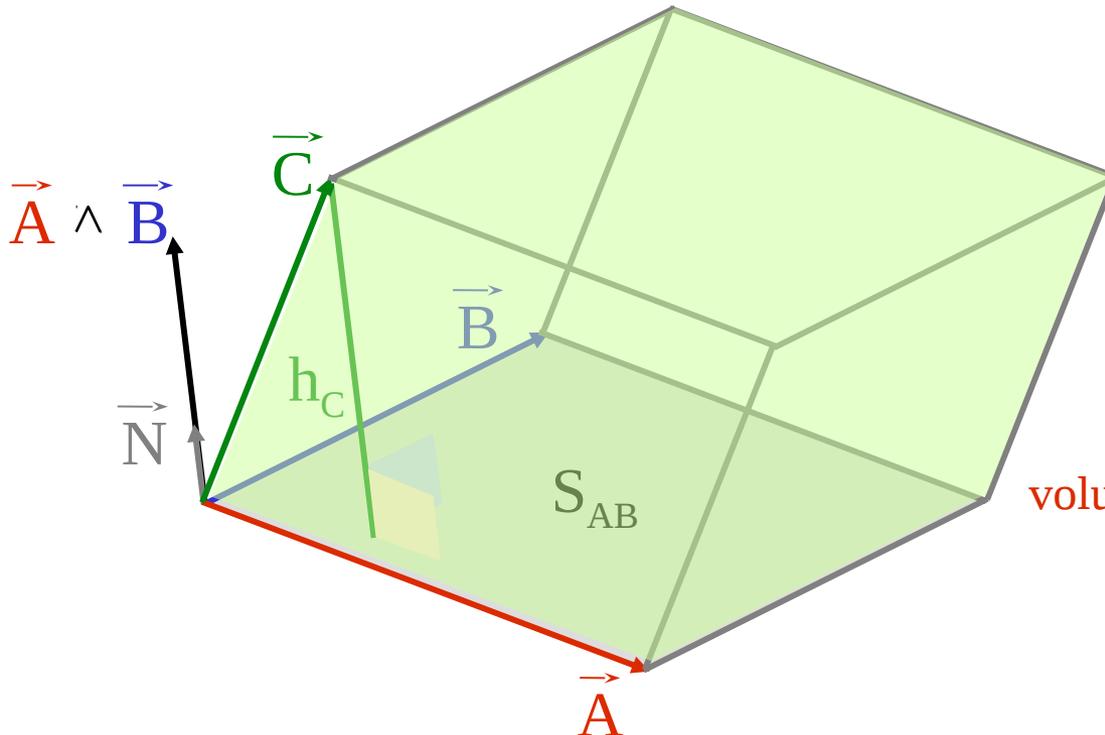
$AB\sin(\varphi) =$  surface du parallélogramme construit sur  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$

**Invariance:** Les produits scalaire et vectoriel sont invariants, ils ne dépendent pas d'un système de coordonnées particulier mais uniquement des longueurs des vecteurs et angle entre vecteurs (angle orienté pour le produit vectoriel qui n'est pas commutatif).

**Produit Mixte:**  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$

interprétation géométrique :

surface parallélogramme  $S_{AB}$



$\vec{C} \cdot \vec{N} S_{AB}$   
hauteur prisme

$h_C S_{AB} = V_{ABC}$   
volume parallélépipède A,B,C

*astuce de calcul du produit vectoriel dans un repère orthonormé:*

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - B_y A_z \\ A_z B_x - B_z A_x \\ A_x B_y - B_x A_y \end{pmatrix}$$

permutation circulaire

Symétrie: **y,z** pour **A** et **z,y** pour **B**

## 2.4 Gradient

Considérons une *fonction scalaire* dépendant des trois variables d'espace  $f(x,y,z)$ . La *différentielle*  $df$  définit l'accroissement de la fonction au point  $x,y,z$ .

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

On peut écrire cette différentielle comme le produit scalaire des vecteurs  $\vec{A}$  et  $d\vec{r}$ :

$$\vec{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

Le vecteurs  $\vec{A}$  est appelé gradient de la fonction  $f$  et on le note :  $\vec{\nabla} f$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) = f(\vec{r}) + \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

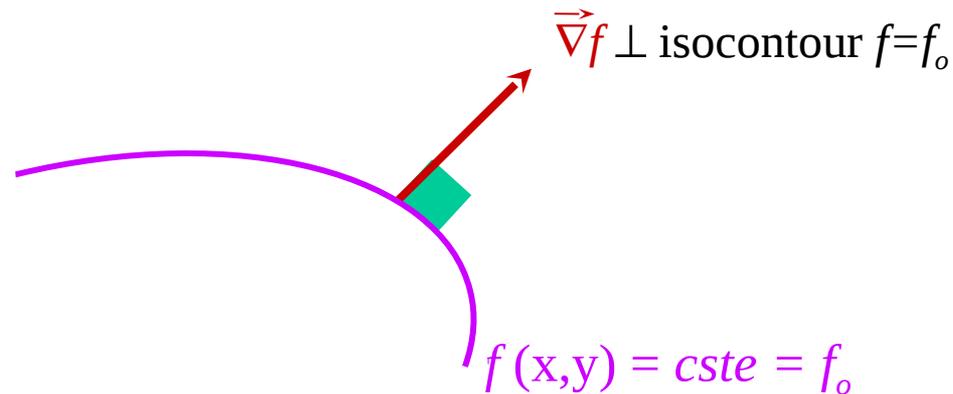
*développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre pour une fonction à plusieurs variables*

D'après la définition du produit scalaire,  $df$  peut s'écrire:

$$df = |\vec{\nabla} f| |d\vec{r}| \cos(\theta)$$

L'accroissement  $df$  est donc maximum quand  $d\vec{r}$  a la même direction que le gradient. **Le gradient de la fonction  $f$  est donc un vecteur dont l'amplitude et la direction sont celles de la variation maximum de  $f$  en fonction des coordonnées d'espace.**

**Corollaire:** si  $d\vec{r}$  est perpendiculaire au gradient alors  $\cos(\theta)=0$  et donc  $df=0$ , c'est à dire que **le gradient est perpendiculaire aux lieux où la fonction  $f$  est constante (isocontours, isosurfaces).**



**Notion d'opérateur:** L'opération sur la fonction scalaire  $f$  qui donne les coordonnées du vecteur gradient revient à **faire agir l'opérateur  $\nabla$**  (« nabra ») sur la fonction de la manière suivante:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

*appliquer la dérivation partielle par rapport à « x » à la fonction  $f$*

$$\left[ \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] f(x,y,z)$$

*et prendre le résultat comme composante suivant x*

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

## 2.5 Flux et Divergence

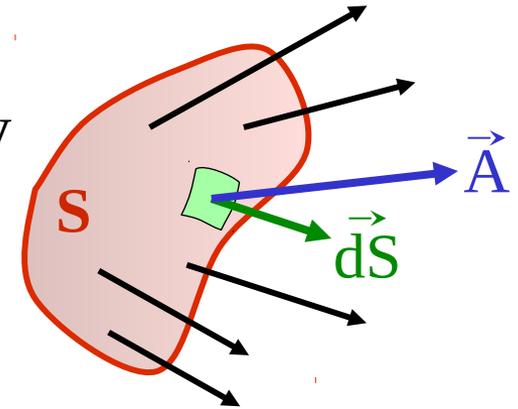
**Flux:** Le flux  $\Phi$  d'un champ de vecteur  $\vec{A}$  à travers la surface  $S$  est donné par l'intégrale sur toute la surface  $S$  du produit scalaire de  $\vec{A}$  avec le vecteur  $d\vec{S}$  représentant un élément de surface infinitésimal:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{x,y} A(x,y) dx dy$$

*intégrale double !!!*

*$d\vec{S}$  est un vecteur orienté !!!*

*vers l'extérieur pour une surface fermée*



*exemple:* **débit massique de fluide dans une canalisation.**

$S$  surface axiale de la canalisation [ $L^2$ ].

$\rho$  masse volumique du fluide [ $ML^{-3}$ ], supposée homogène (constante).

$\vec{v}$  vitesse du fluide en un point [ $LT^{-1}$ ], prise constante sur toute la surface  $S$ .

$$\int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho v S = Q \quad [MT^{-1}] \text{ débit massique à travers la canalisation}$$

**Divergence:** La divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  est définie par le produit scalaire de l'opérateur « nabra » avec ce vecteur. Le résultat est un scalaire.

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (A_x \vec{i}) = \vec{i} \frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{i} \cdot \vec{i} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

**Interprétation:** Soit un volume infinitésimal cubique de volume  $d^3r = dx dy dz$  au point de coordonnées  $x, y, z$  où l'on considère le vecteur  $\vec{A}$ .

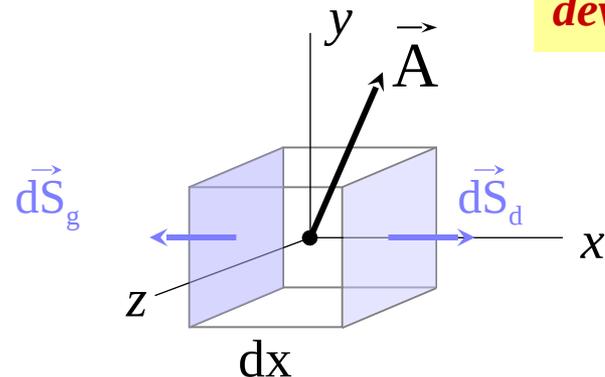
*développement 1<sup>er</sup> ordre de  $A_x$  :*

• en  $x - dx/2$

$$\cdot \quad d\Phi_{xg} = - \left( A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

$$d\Phi_{xg} = \vec{A}(x-dx/2, y, z) \cdot d\vec{S}_g = A_x(x-dx/2, y, z) \vec{i} \cdot (-dx dy) \vec{i}$$

• en  $x + dx/2$   $d\Phi_{xd} = \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$



soit au total pour la direction x :  $d\Phi_x = d\Phi_{xg} + d\Phi_{xd} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} d^3r$

généralisation par symétrie aux directions x,y et z :

$$\left. \begin{aligned} d\Phi_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} d^3r \\ d\Phi_y &= \frac{\partial A_y}{\partial y} d^3r \\ d\Phi_z &= \frac{\partial A_z}{\partial z} d^3r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d\Phi_A &= d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d^3r \\ d\Phi_A &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r \end{aligned}$$

*à la manière d'un produit scalaire !!!*

théorème de Green :

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r$$

*intégrale double !!!*

*intégrale triple !!!*

*V<sub>S</sub> volume délimité par la surface S !!!*

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r \xrightarrow{V_S \rightarrow 0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} V_S$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{V_S \rightarrow 0} \frac{1}{V_S} \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

*La divergence est le flux sortant par unité de volume, quand le volume tend vers 0 !!!*

## 2.6 Circulation et Rotationnel

**Circulation:** La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  le long d'un chemin  $\vec{L}$  est définie par l'intégrale du **produit scalaire** du vecteur  $\vec{A}$  avec un élément infinitésimal du chemin  $d\vec{L}$ . Le résultat est un scalaire.

$$\int_{\vec{L}} \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

*exemple:* travail d'une force de rappel le long d'un déplacement **rectiligne**.

$$dW = -k \vec{r} \cdot d\vec{r} \qquad W = \int_{r_1}^{r_2} -k \vec{r} \cdot d\vec{r} = -k \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r_1}^{r_2}$$

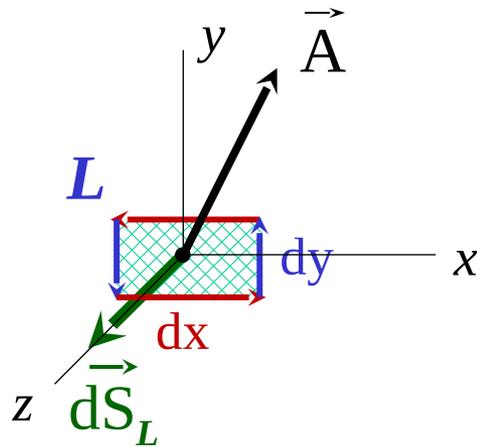
## 2.6 Circulation et Rotationnel

**Rotationnel:** Le rotationnel d'un vecteur  $\vec{A}$  est le résultat de l'application de l'opérateur « nabla » sur ce vecteur, à la manière d'un **produit vectoriel**. Le résultat est un vecteur, que l'on peut calculer avec la règle de composition du produit vectoriel en repère orthonormé.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & A_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & \wedge & A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

## 2.7 Théorème de Stokes / Champ conservatif

**Théorème de Stokes:** La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  le long d'un contour fermé  $L$  est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface  $S_L$  qui s'appuie sur ce contour (l'orientation de la surface par rapport au sens de circulation est donnée par la règle du tire-bouchon - ou trièdre direct).



- **illustration:** contour infinitésimal dans le plan  $xy$   
décomposer  $d\vec{L}$  suivant «  $x$  » et «  $y$  »

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{L} = \underbrace{\oint A_x dx}_{\text{le long de } dx} + \oint A_y dy$$

- le long de  $dx$ : dev<sup>lpt</sup> 1<sup>er</sup> ordre, en  $y-dy/2$  et  $y+dy/2$

$$\left( A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \approx - \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy$$

- soit pour le circuit entier:  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{L} \approx \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot d\vec{S}$

- contour infinitésimal ayant une composante dans le plan

$$\oint_{xy} \vec{A} \cdot d\vec{L}_{xy} \approx \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot d\vec{S}_{xy}$$

- contour infinitésimal ayant une composante dans le plan

$$\oint_{yz} \vec{A} \cdot d\vec{L}_{yz} \approx \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} \cdot d\vec{S}_{yz}$$

- contour infinitésimal ayant une composante dans le plan

$$\oint_{zx} \vec{A} \cdot d\vec{L}_{zx} \approx \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} \cdot d\vec{S}_{zx}$$

composantes du rotationnel

- contour infinitésimal quelconque

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{L} \approx (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

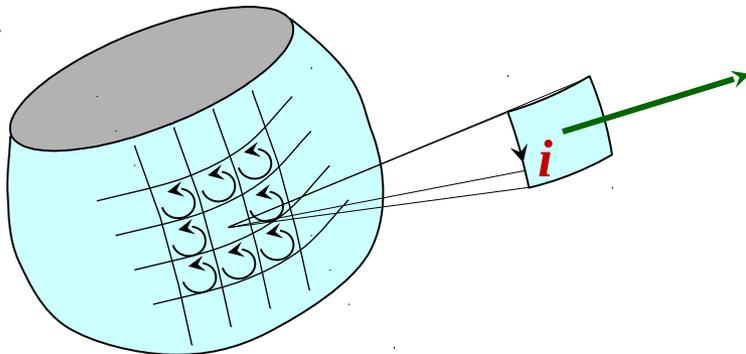
- **contour quelconque**

A partir de la circulation le long d'un contour fermé infinitésimal on peut donner une nouvelle interprétation du rotationnel: la composante normale à une surface  $S$  du rotationnel d'un vecteur  $\mathbf{A}$  est la limite lorsque  $S$  tend vers zéro du quotient de la circulation du vecteur le long d'un contour fermé s'appuyant sur cette surface par l'aire de cette même surface .

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{N}_S = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\mathcal{L}_S} \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

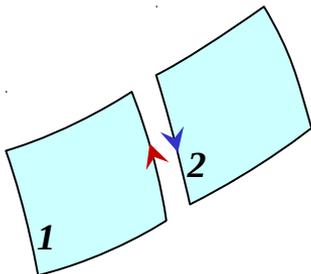
- **théorème de Stokes** (cas où  $S$  n'est pas infinitésimale)

→ décomposition de la surface en éléments infinitésimaux:



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{L}_i = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}_i$$

→ éléments infinitésimaux adjacents :



- $dS = dS_1 + dS_2$
- la somme des contributions des deux éléments de surface le long d'une arête commune est nulle (sens inverses).
- passage de la somme à l'intégrale.

$$\oint_{L_S} \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

***Théorème de Stokes***

Le flux du rotationnel d'un vecteur à travers une surface est égal à la circulation de ce vecteur le long d'un contour fermé sur lequel s'appuie cette surface.

**Champ conservatif:** On dit qu'un champ de vecteurs est conservatif si sa circulation le long d'une courbe fermée est nulle.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{L} = 0$$

Le rotationnel d'un champ de vecteurs conservatif est nul en tout point.

Pour un contour donné il y a une infinité de surfaces s'appuyant sur ce contour et donc la seule façon d'annuler l'intégrale de surface est que le rotationnel soit nul en tout point .

$$\underbrace{\oint_{L_s} \vec{A} \cdot d\vec{L}}_0 = \int_S \underbrace{(\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}}_0$$

*si*

## 2.8 Laplacien

En électromagnétisme, ainsi qu'en mécanique des fluides et bien d'autres domaines, la **divergence du gradient** d'une fonction revêt une grande importance. On nomme cette quantité le **laplacien** et on la note  $\nabla^2$  (ou  $\Delta$ ).

- pour une fonction scalaire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- pour une fonction vectorielle

*En coordonnées cartésiennes c'est un vecteur dont chaque composante est le laplacien de la composante du champ de vecteur selon la direction considérée (x, y ou z)*

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{i} + \nabla^2 A_y \vec{j} + \nabla^2 A_z \vec{k}$$

*En coordonnées quelconques on peut utiliser l'identité suivante:*

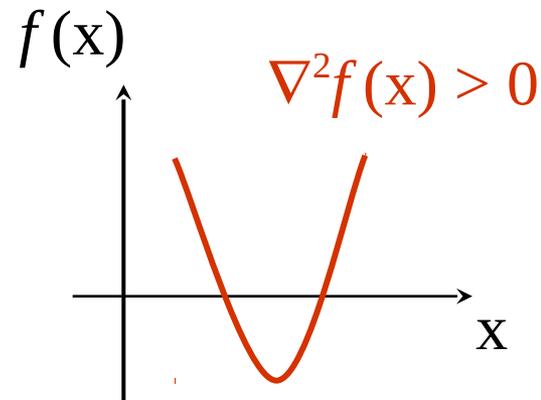
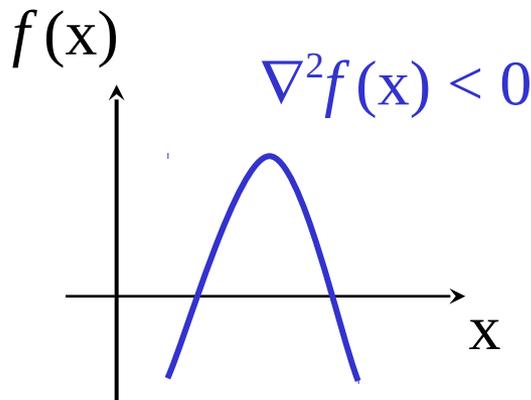
$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

## 2.8 Laplacien

- pour une fonction ne dépendant que d'une seule variable, le **Laplacien** s'apparente à la dérivée seconde, c'est à dire à la **courbure de la fonction**.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- proche d'un **maximum** le Laplacien est **négatif**, tandis qu'au voisinage d'un **minimum** il est **positif**.



## 2.9 Quelques identités (utiles...)

Dans ce paragraphe, ainsi que dans la suite du cours, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté entre quantités « scalaires » et « vectorielles », les **scalaires** seront représentés en caractères simples et les **vecteurs en caractères gras et sans flèche**.

*Les identités ci-dessous seront souvent utilisées dans ce cours et concernent essentiellement les règles de distributivité des produits scalaires et vectoriels avec l'opérateur Nabla.*

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla \wedge (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \wedge \mathbf{A} + f (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

*scalaire !!!*

*opérateur !!!*

## 2.10 Coordonnées curvilignes

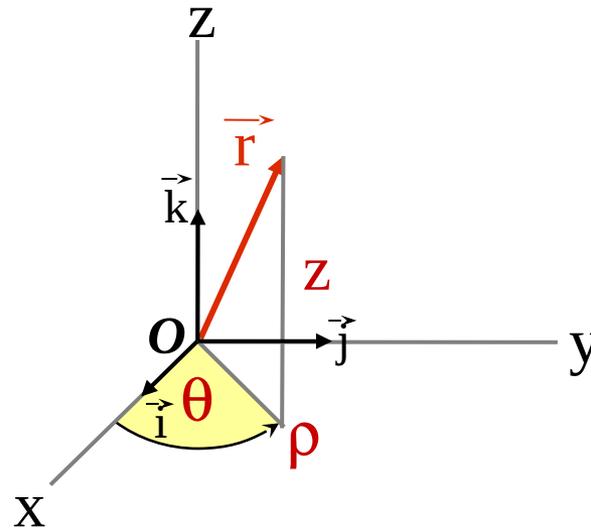
Traiter les problèmes en coordonnées cartésiennes est sans doute le plus facile du point de vue conceptuel, mais parfois n'est pas le moyen le plus adapté. La **symétrie** d'un système doit toujours être prise en considération car elle permet de simplifier les calculs ou d'avoir des moyens de vérification a-posteriori.

Ceci conduit à préférer, suivant les cas, d'autres systèmes de coordonnées qui sont adaptés à la symétrie: **coordonnées polaires, cylindriques** ou **sphériques**.

Les expressions des calculs différentiels, vectoriels et d'application des opérateurs permettant de calculer le gradient, la divergence, le rotationnel ou le laplacien dans les systèmes cartésien, polaire, cylindrique et sphérique seront abordés en TD.

## Coordonnées cylindriques: symétrie axiale (// axe Oz)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ cartésien}$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \text{ cylindrique}$$

$$x = \rho \cos(\theta)$$

$$y = \rho \sin(\theta)$$

$$z = z$$

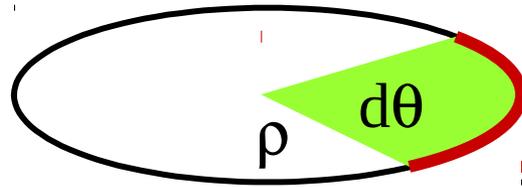
$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

**Est utilisé quand une quantité est invariante par rotation autour d'un axe:**  
**Cette quantité ne dépend que de la distance  $\rho$  à l'axe et de la cote  $z$  suivant l'axe**

*Pour passer en coordonnées polaires, faire  $z=0$ .*

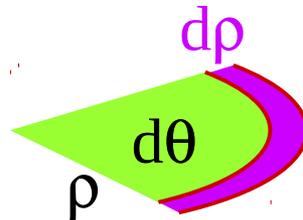
**Coordonnées cylindriques: symétrie axiale (// axe Oz)**

élément de longueur d'arc



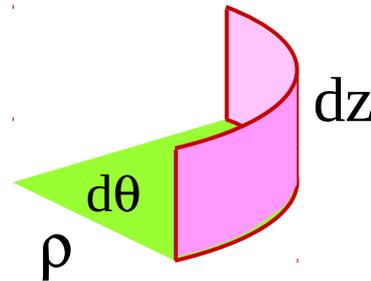
$$dl = dr = \rho d\theta$$

élément d'aire de secteur



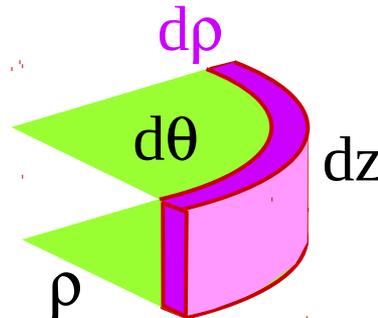
$$dA = d^2r = \rho d\theta d\rho$$

élément de surface cylindrique



$$dS = d^2r = \rho d\theta dz$$

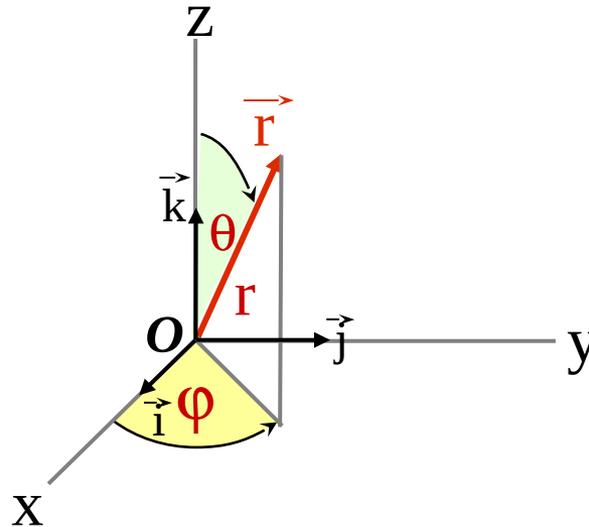
élément de volume cylindrique



$$dV = d^3r = \rho d\theta d\rho dz$$

## Coordonnées sphériques: symétrie radiale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ cartésien}$$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ sphérique}$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

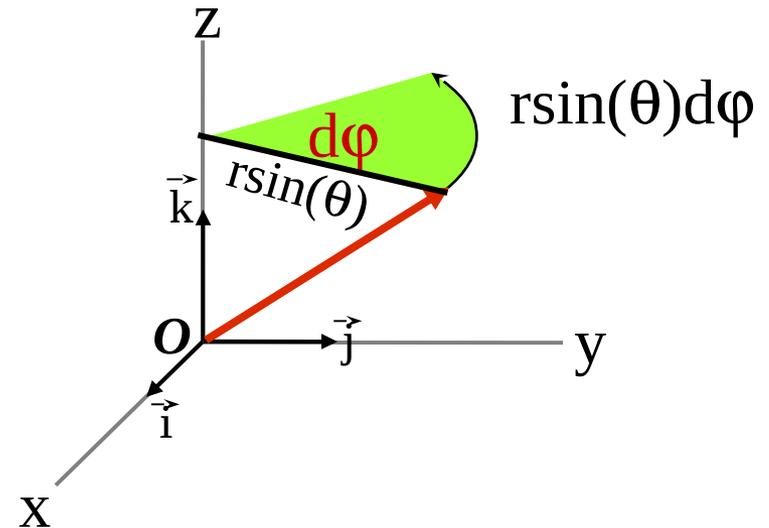
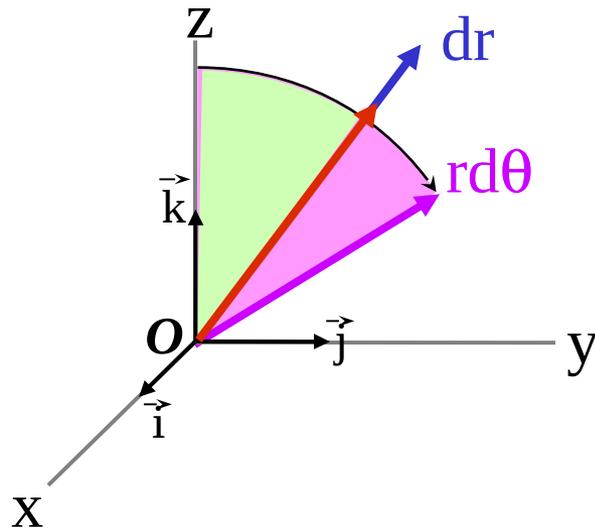
**Utilisé quand une quantité est invariante  
par rotation autour d'un point:**

**Cette quantité ne dépend que de la distance  $r$   
au point**

*Pour passer en coordonnées polaires, faire  $\theta = \pi/2$ .*

## Coordonnées sphériques: symétrie radiale

éléments de longueur



éléments de surface:

$$rdrd\theta, r\sin(\theta)d\phi dr, r\sin(\theta)d\phi rd\theta$$

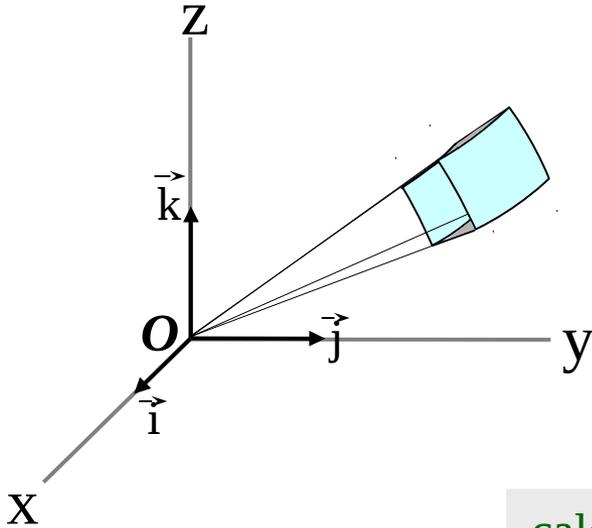
calcul de la surface d'une sphère de rayon R:

$$S = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = R^2 \left[ -\cos(\theta) \right]_{\theta=0}^{\pi} \left[ \phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} = 4\pi R^2$$

## Coordonnées sphériques: symétrie radiale

élément de volume:

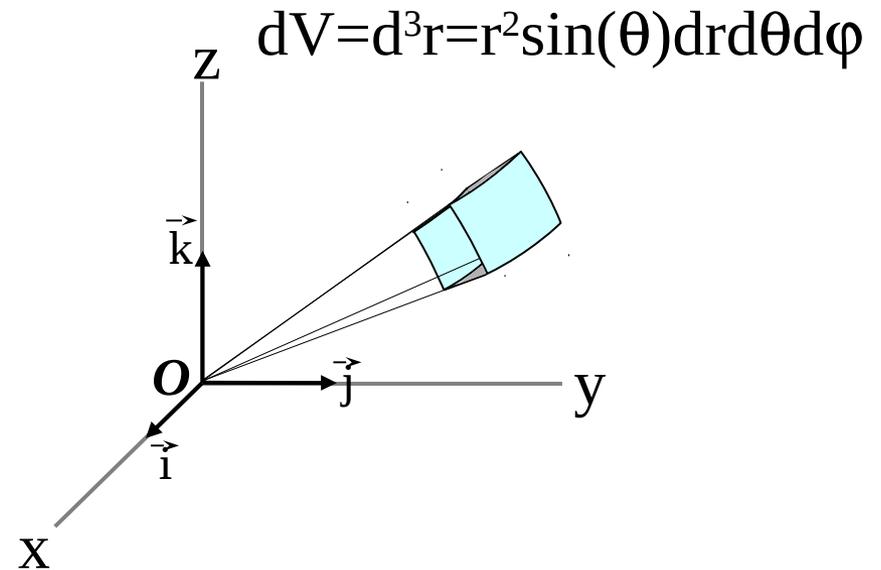
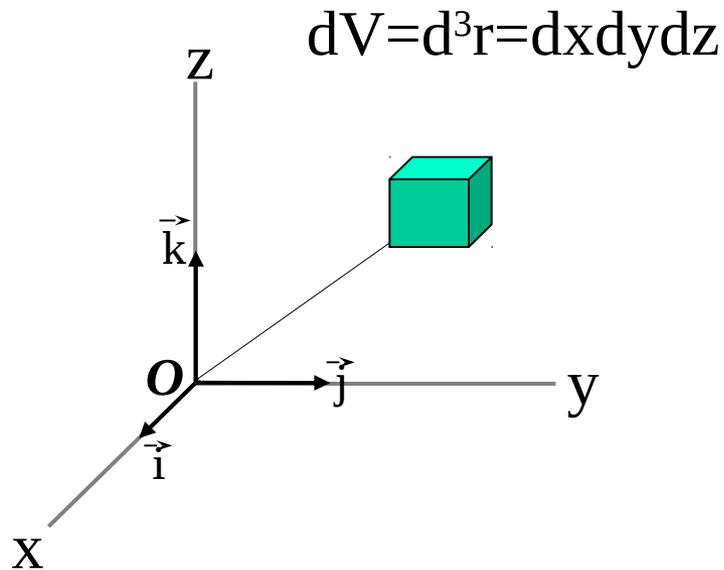
$$r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$$



calcul du volume d'une sphère de rayon R:

$$S = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi = 4/3 \pi R^3$$

## Densité:



Imaginons qu'il y ait  $dN(\mathbf{r})$  particules dans le volume infinitésimal  $d^3r$  au point  $\mathbf{r}$ .

On définit la densité  $n(\mathbf{r})$  en tout point  $\mathbf{r}$  par:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{dN(\mathbf{r})}{d^3r}$$

***Pour compléments ou exemples, voir par exemple les sites suivants:***

**Les définitions et des exemples algébriques (par des suisses francophones ...)**

**[http://www.eiaj.ch/v2/support\\_de\\_cours/electricite/Cours\\_GEL/Branches\\_scientifiques/Mathematiques/Gradient%20rotationnel%20et%20divergence.pdf#search=%22rotationnel%22](http://www.eiaj.ch/v2/support_de_cours/electricite/Cours_GEL/Branches_scientifiques/Mathematiques/Gradient%20rotationnel%20et%20divergence.pdf#search=%22rotationnel%22)**

**Les définitions et des explications par des canadiens francophones (peut être une autre façon de voir ...)**

**<http://www.cegepat.qc.ca/tphysique/sebas/page%20accueil/Opera.htm>**

**Une démonstration du champ de vecteur électrique où on peut construire et voir ...**

**<http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/physic/simulations/champe/lignechamp.html>**