Cours Automatique linéaire

Chapitre 1

Représentation des systèmes dynamiques continus LTI

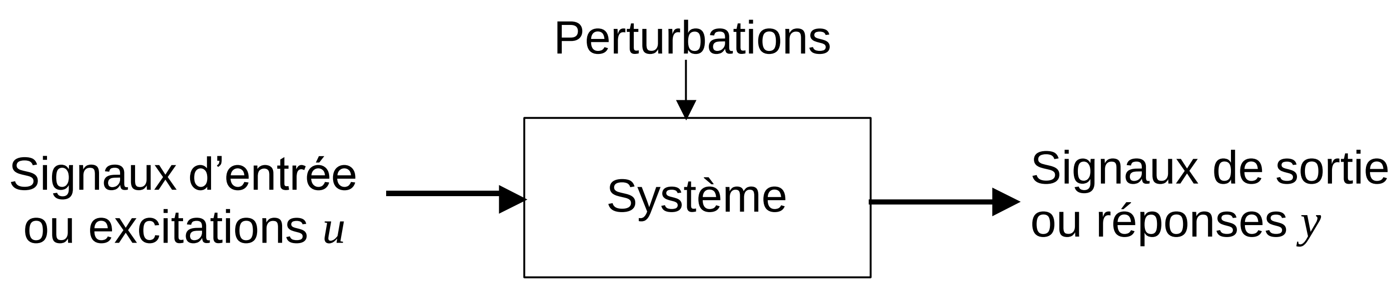
GE 2

Introduction

Qu'est-ce qu'un système?

Système : ensemble d'objets interagissant entre eux pour réaliser une fonction. Il est connecté au monde extérieur à travers :

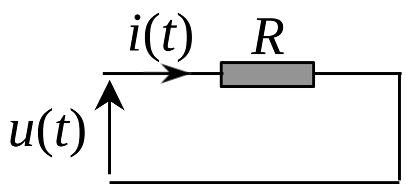
- ses entrées
  - signaux d'excitation : actions envoyées au système
  - perturbations qui sont en général imprévisibles
- ses sorties : réponses du système aux signaux d'entrée



Classification des systèmes

- **Système statique**

  La réponse du système à une excitation est instantanée

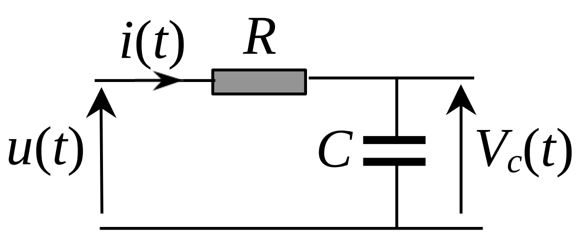


<u>Equation</u>

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

- **Système dynamique**

  La réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées



<u>Equation</u>

$$RC\, y^{\cdot}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $y(t) = V_c(t)$

- **Systèmes monovariable et multivariable**
  - Monovariable : système à une entrée et une sortie
  - Multivariable : nombre d'entrées + nombre de sorties > 2

Classification des systèmes

Systèmes continu et discret

- Continu : l'information circule à tout instant de façon continue

$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

- Discret : l'information circule à des instants discrets

$$RC y(k+1) + \left(1 - RC\right) y(k) = u(k)$$

Systèmes linéaires et non linéaires

- Le système est linéaire s'il satisfait au principe de superposition

  Si $y_i(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_i(t)$ alors la réponse du système à $u(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t)$ est $y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$

- Le système est non-linéaire dans le cas contraire

Rappels sur la transformée de Laplace

Définition de la Transformée de Laplace (TL)

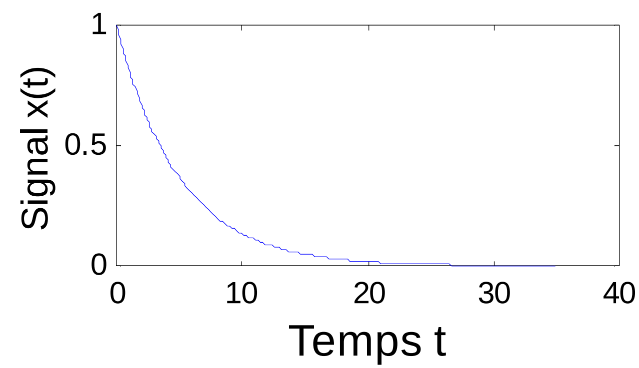
- $x(t)$: signal réel tel que $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- Transformée de Laplace de $x(t)$: $X(s) = \mathcal{L}\big(x(t)\big) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$
- $X(s)$: fonction de la variable complexe $s = \sigma + j\omega, \quad \sigma \geq 0$

Exemple

Soit le signal $x(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$ et $a > 0$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$



Transformée de Laplace inverse

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{ts}ds$$

Rappels sur la TL

Propriétés de la TL

$x(t)$ et $y(t)$: signaux réels tels que $x(t)=0,\ y(t)=0 \quad \forall t<0$

- **Linéarité**

$$\mathcal{L}\big(\alpha\, x(t)+\beta\, y(t)\big)=\alpha X(s)+\beta Y(s) \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathrm{R}^*$$

- **Dérivation**

$$\mathcal{L}\big(\dot{x}(t)\big)=sX(s)-x(0^+) \qquad x\left(0^+\right) \text{: condition initiale}$$

$$\mathcal{L}\big(x^{(k)}(t)\big)=s^k X(s)-s^{k-1}x(0^+)-s^{k-2}x^{(1)}(0^+)-\cdots-x^{(k-1)}(0^+)$$

$x\left(0^+\right), x^{(1)}\left(0^+\right), \cdots, x^{(k-1)}\left(0^+\right)$: conditions initiales

Cas particulier : conditions initiales nulles $\mathcal{L}\big(x^{(k)}(t)\big)=s^k X(s)$

- **Intégration**

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau \ \Rightarrow\ \mathcal{L}\big(y(t)\big)=\frac{X(s)}{s}+\frac{y(0^+)}{s}$$

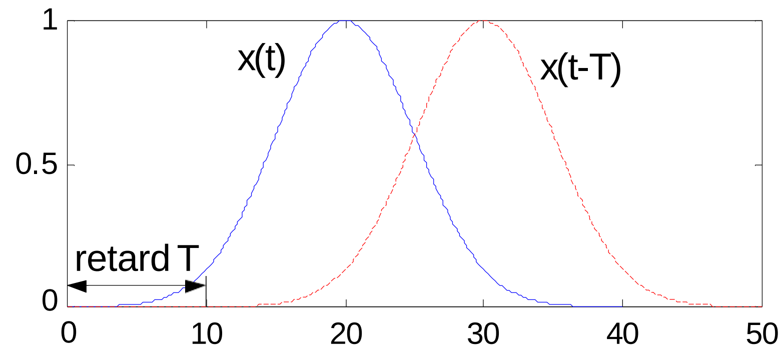
Condition initiale nulle : $\mathcal{L}\big(y(t)\big)=\dfrac{X(s)}{s}$

Rappels sur la TL

Rappels sur la TL

- **Retard temporel**

$$\mathcal{L}\left(x(t-T)\right) = e^{-sT}\, X(s)$$



- **Théorème de la valeur initiale**

$$x\left(0^{+}\right) = \lim_{t\to 0^{+}} x(t) = \lim_{s\to +\infty} sX(s)$$

- **Théorème de la valeur finale**

$$x_{\infty} = \lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

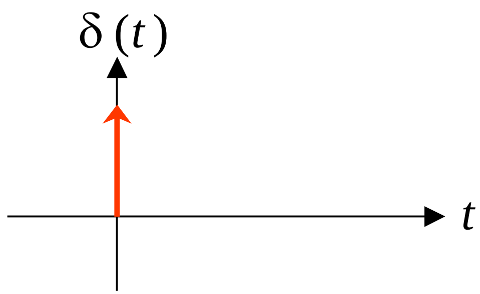
- **Produit de convolution**

$z(t)$: convolution des signaux réels $x(t)$ et $y(t)$

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{0}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \quad \Rightarrow \quad Z(s) = X(s).Y(s)$$

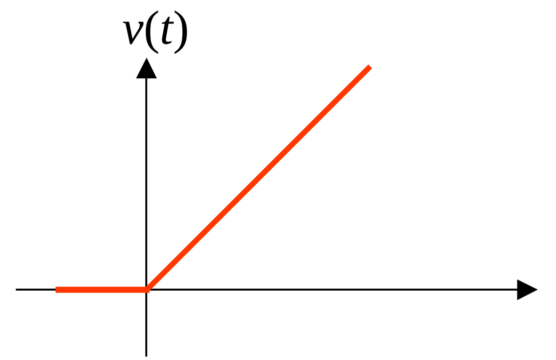
TL de quelques signaux usuels

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$



$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

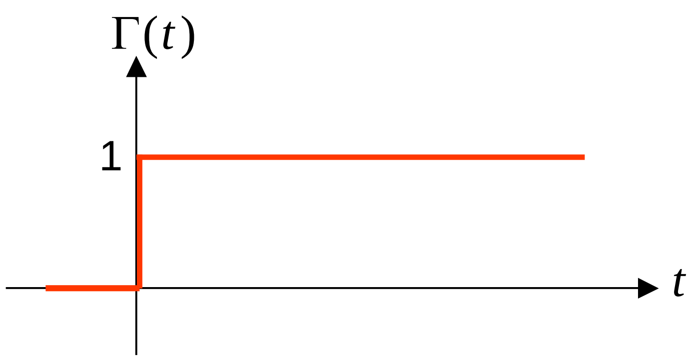
- Rampe ou échelon de vitesse



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

$$\mathcal{L}(v(t)) = \frac{1}{s^2}$$

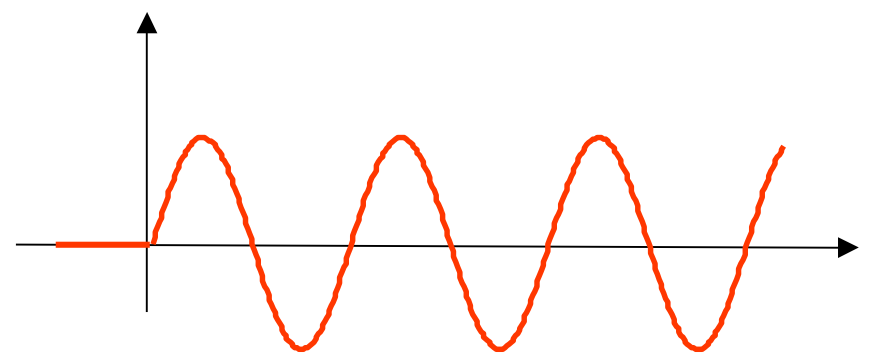
- Echelon unité $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$

- Signal sinusoïdal



$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Réponse temporelle d'un système LTI

Un système linéaire est assimilable à un filtre linéaire $\mathcal{F}$

- Réponse du système à une impulsion de Dirac $\delta(t)$

$h(t) = \mathcal{F}\big(\delta(t)\big)$ $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système

- Réponse à une entrée quelconque $u(t)$, $u(t) = 0 \ \forall t < 0$
  - Rappel : $u(t) = u(t) * \delta(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
  - $y(t) = \mathcal{F}\big(u(t)\big) = \mathcal{F}\left(\int_0^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right)$

Système linéaire $\Rightarrow$ $y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)\mathcal{F}\big(\delta(t-\tau)\big)d\tau$

Système invariant $\Rightarrow$ $h(t-\tau) = \mathcal{F}\big(\delta(t-\tau)\big)$

$$\boxed{y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = u(t) * h(t)}$$

$y(t) = \mathcal{F}\big(u(t)\big)$ produit de convolution de $u(t)$ et de $h(t)$

Fonction de transfert d'un système LTI (1)

- Fonction de transfert

$$y(t) = u(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \mathcal{L}\big(y(t)\big) = U(s)\,H(s) \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$H(s)$ est la fonction de transfert du système

- Système continu régi par une équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

avec $m \leq n$

On suppose les conditions initiales nulles c'est-à-dire

$$y^{(n-1)}(0) = \cdots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$$

$$u^{(m-1)}(0) = \cdots = u^{(1)}(0) = u(0) = 0$$

Fonction de transfert d'un système LTI

Système régi par une équation différentielle (suite)

En utilisant la TL, on a :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle :

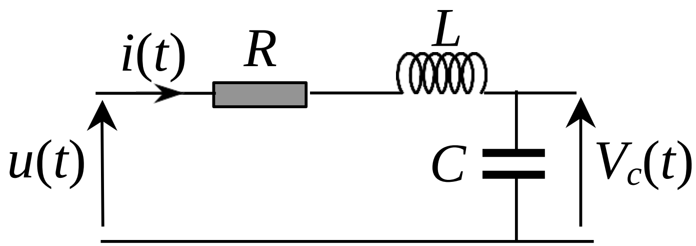
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ et $D(s)$: polynômes en s de degrés respectifs m et n

Le système est dit d'ordre n

Fonction de transfert d'un système LTI

- Exemple : circuit RLC



Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

- Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\dot{V}_c(t)$$

On en déduit : $LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)$

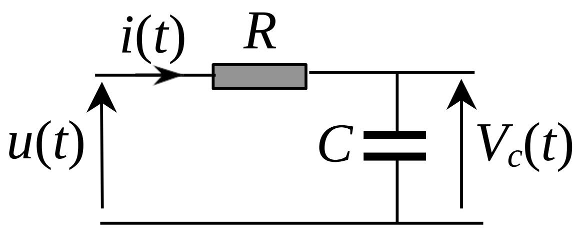
- Fonction de transfert

$$\left(LC\,s^2 + RC\,s + 1\right)V_c(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LC\,s^2 + RC\,s + 1}$$

Réponse d'un système LTI par la TL

Exemple : circuit RC



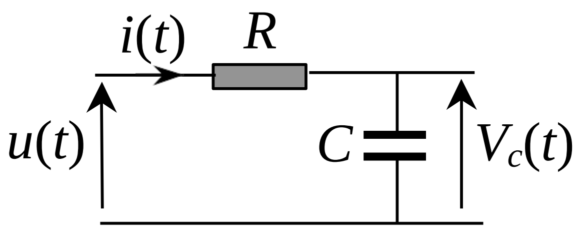
$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $\quad y(t) = V_c(t)$

Donner l'expression de la réponse du système pour une entrée échelon d'amplitude u_0=2V. La tension initiale aux bords de la capacité est $V_c(0)$=0.5V

Réponse d'un système LTI par la TL

Exemple : circuit RC



$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $\quad y(t) = V_C(t)$

- Application de la TL

$$RC\big(sY(s) - V_C(0)\big) + Y(s) = U(s) \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{U(s)}{RC\,s+1} + \frac{RC}{RC\,s+1}V_C(0)$$

$$u(t) = u_0\Gamma(t) \quad\Rightarrow\quad U(s) = \frac{u_0}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{u_o}{s(RC\,s+1)} + \frac{RC}{RC\,s+1}V_C(0)$$

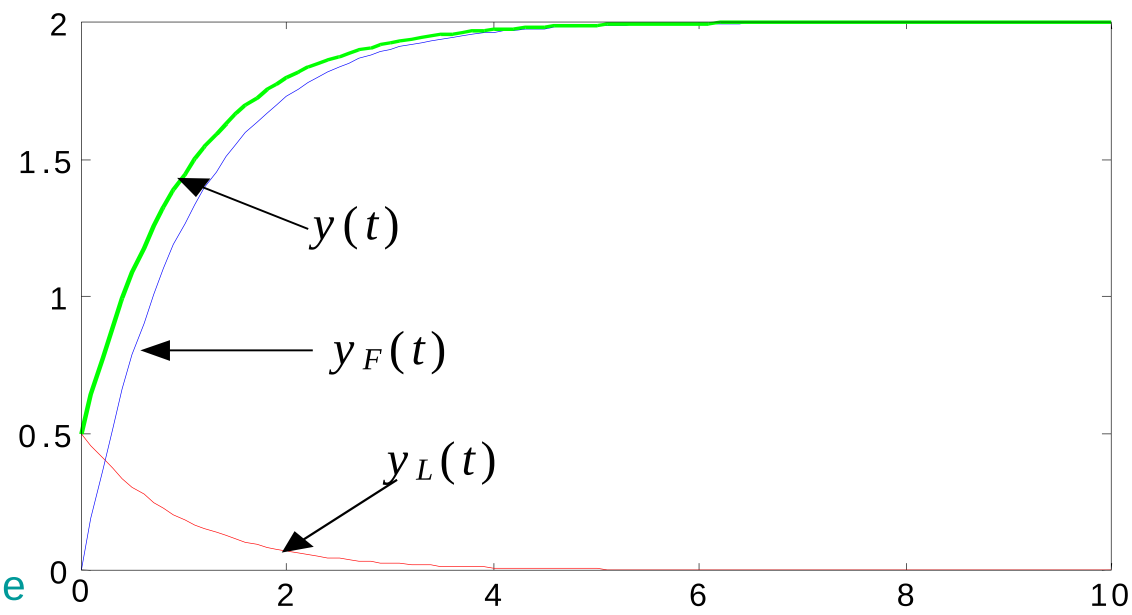
Réponse d'un système LTI par la TL

❑ Exemple : circuit RC (suite)

$$Y(s) = \frac{u_o}{s(RC\,s+1)} + \frac{RC}{RC\,s+1} V_c(0)$$

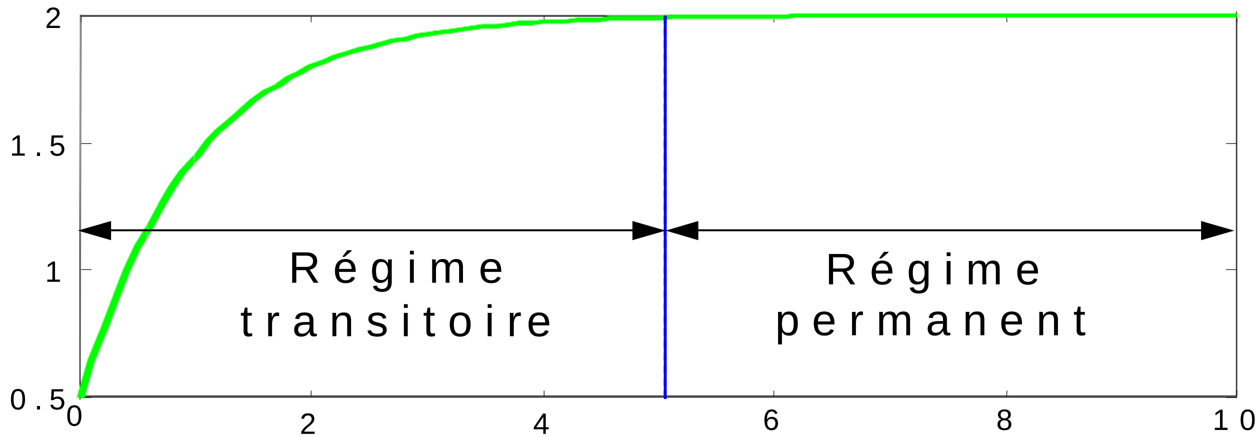
En utilisant les tables de transformée, on a :

$$y(t) = \underbrace{u_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{y_F(t)} + \underbrace{V_c(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}}_{y_L(t)}$$



Régimes transitoire et permanent

Réponse du circuit RC



- ## Régime permanent

Soumis à un entrée échelon, rampe, … un système linéaire stable aura un comportement asymptotique similaire à l'entrée : on dit qu'il a atteint le régime permanent.

- ## Régime transitoire

C'est la partie de la réponse qui précède le régime permanent.
Le régime transitoire est lié à la dynamique du système

Eléments caractéristiques de la FT

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\cdots+a_1 s+a_0}$$

❑ Pôles (modes) et zéros du système

- Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $D(s)$. Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués

- Un système d'ordre n admet n pôles distincts ou non

- Les zéros sont les racines $z_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $N(s)$

❑ Gain du système

$$H(s)=\frac{K}{s^\alpha}\,\frac{b_m/b_0\, s^m+\cdots+b_1/b_0\, s+1}{a_n/a_\alpha\, s^n+\cdots+a_1/a_\alpha\, s+1}$$

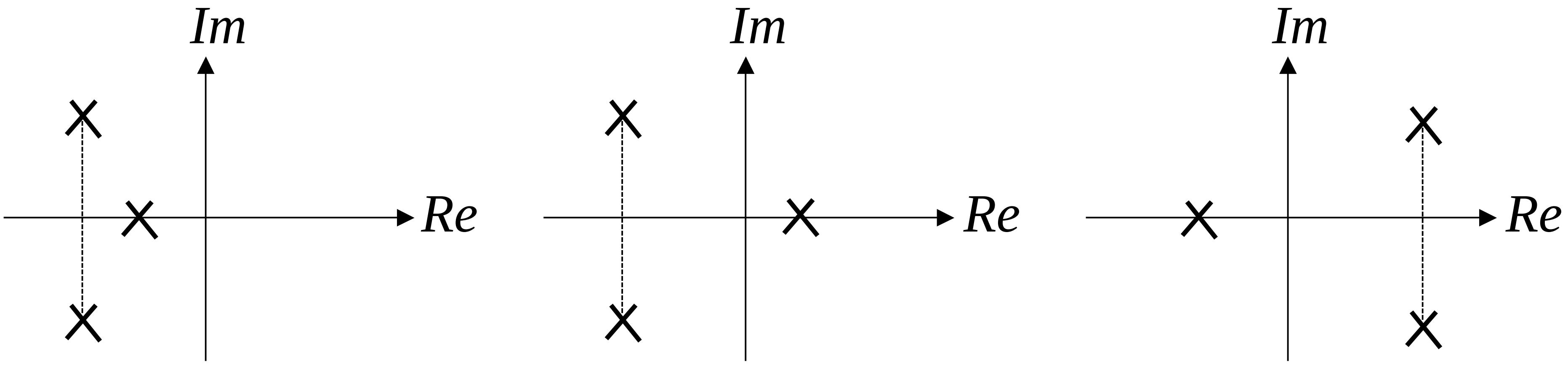
$K=\dfrac{b_0}{a_\alpha}$: gain du système

≥ 0

Stabilité des systèmes LTI

Théorème

Un système LTI est stable si et seulement si tous ses pôles λ_i ont une partie réelle $Re(\lambda_i)$ négative



Stable

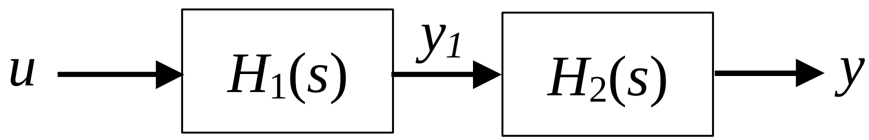
Instable

Instable

Le domaine de stabilité est le demi-plan gauche du plan complexe

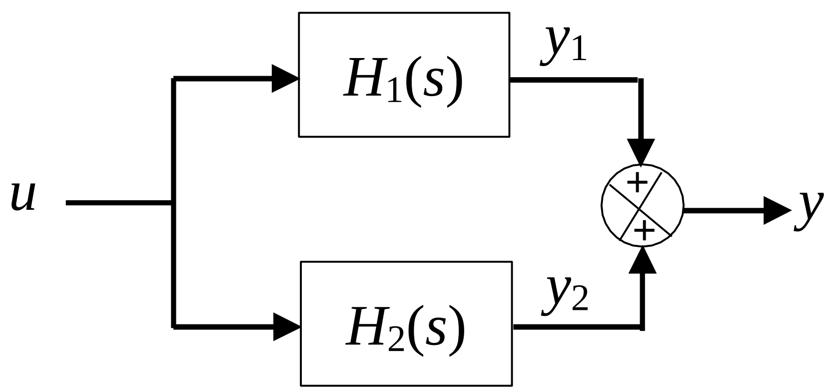
Association de fonctions de transfert

Association en série ou cascade



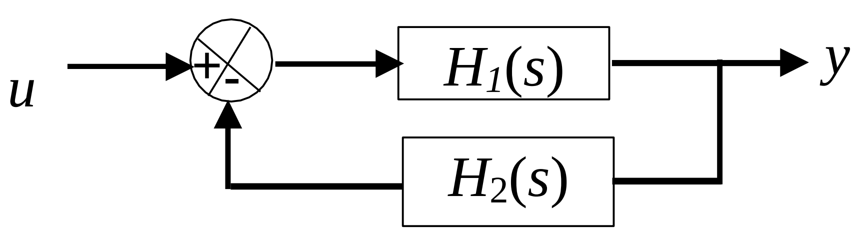
$$H(s) = H_1(s) \times H_2(s)$$

Association en parallèle



$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Fonction de transfert en réaction



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$