Cours Automatique linéaire

CHAPITRE 2

Réponse temporelle des systèmes dynamiques continus LTI

GE 2

Introduction

❑ Système continu LTI

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\quad H(s) \quad} \longrightarrow y(t)$$

$H(s)$: fonction de transfert

Quelle est la forme de la sortie $y(t)$ du modèle en réponse aux signaux usuels :

- impulsion de Dirac $u(t)=\delta(t)$
- signal échelon $u(t)=\Gamma(t)$
- signal rampe $u(t)=v(t)$

❑ Décomposition en éléments simples

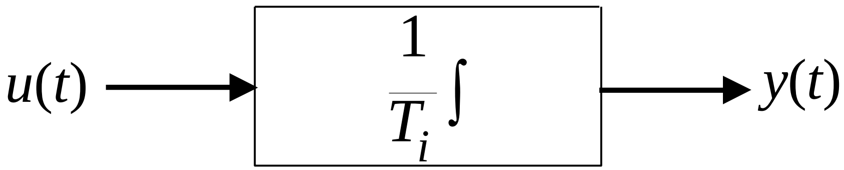
$$H(s) = \sum_i H_i(s)$$

$H_i(s)$: fonction de transfert de systèmes de base ou systèmes fondamentaux (1er ordre, 2^{e} ordre)

Intégrateur (1)

- Système régi par l'équation différentielle

$$T_i y^{\cdot}(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t u(\tau)\,d\tau \quad \text{(CI nulle)}$$



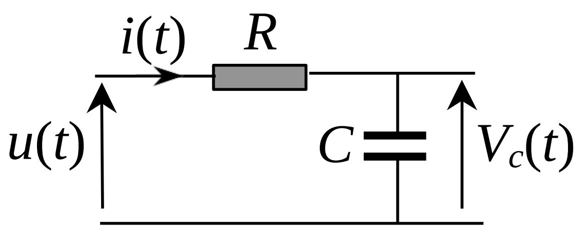
- Fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1}{T_i s}$$

T_i : constante d'intégration

Pôle : $\lambda=0$

- Exemple



Relation entre le courant $i(t)$ et $V_c(t)$

$$y(t) = V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

Intégrateur (2)

Réponse aux signaux usuels

- **Réponse impulsionnelle**

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{\Gamma(t)}{T_i}$$

La réponse impulsionnelle d'un intégrateur est un échelon d'amplitude $1/T_i$

- **Réponse indicielle**

$$u(t) = \Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{T_i} v(t)$$

La réponse indicielle d'un intégrateur est une rampe de pente $1/T_i$

- **Réponse à une rampe**

$$u(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = ?$$

Système du 1er ordre

- Système régi par l'équation différentielle

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

- Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad \Rightarrow \quad sTY(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{1 + Ts}}$$

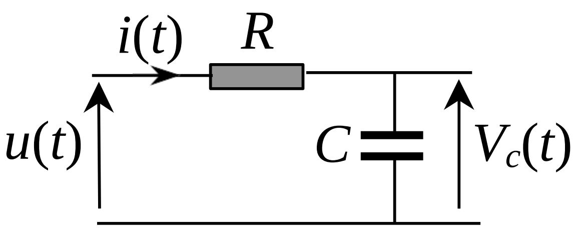
T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda = -\dfrac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

- Exemple



$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$ avec $y(t) = V_c(t)$

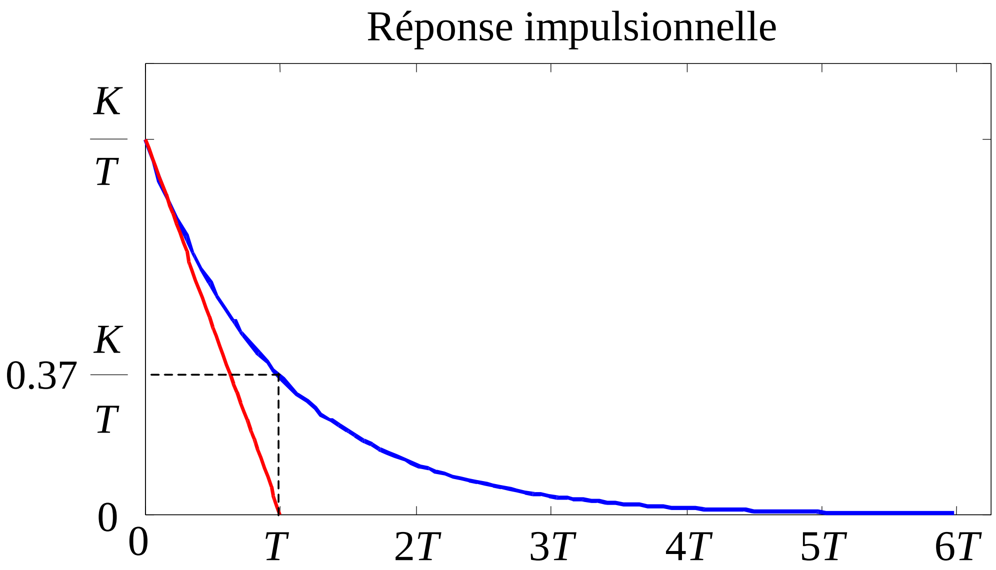
$H(s) = \dfrac{1}{1 + Ts}$ avec $T = RC$

Système du 1er ordre

Réponse impulsionnelle

- Entrée : $u(t) = \delta(t)$
- Réponse du système : $h(t) = \dfrac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
- Tangente à l'origine : $x(t) = -\dfrac{K}{T^2} t + \dfrac{K}{T}$ (Pente $= -\dfrac{K}{T^2}$)

La tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = T$



0	T	$2T$	$3T$
$h_0 = \dfrac{K}{T}$	$0.37\ h_0$	$0.13\ h_0$	$0.05\ h_0$

Système du 1er ordre

Réponse indicielle

- Entrée : signal échelon $u(t) = \Gamma(t)$

- Réponse du système

$$u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

. On en déduit $Y(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K\left(1 - e^{\lambda t}\right)}$$

- Valeur de la sortie en régime permanent

$$y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t) = K$$

- Tangente à l'origine

$$x(t) = \frac{K}{T} t \quad \left(\text{Pente} = \frac{K}{T}\right)$$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale $y = K$ en $t = T$

Système du 1er ordre

Réponse indicielle (fin)

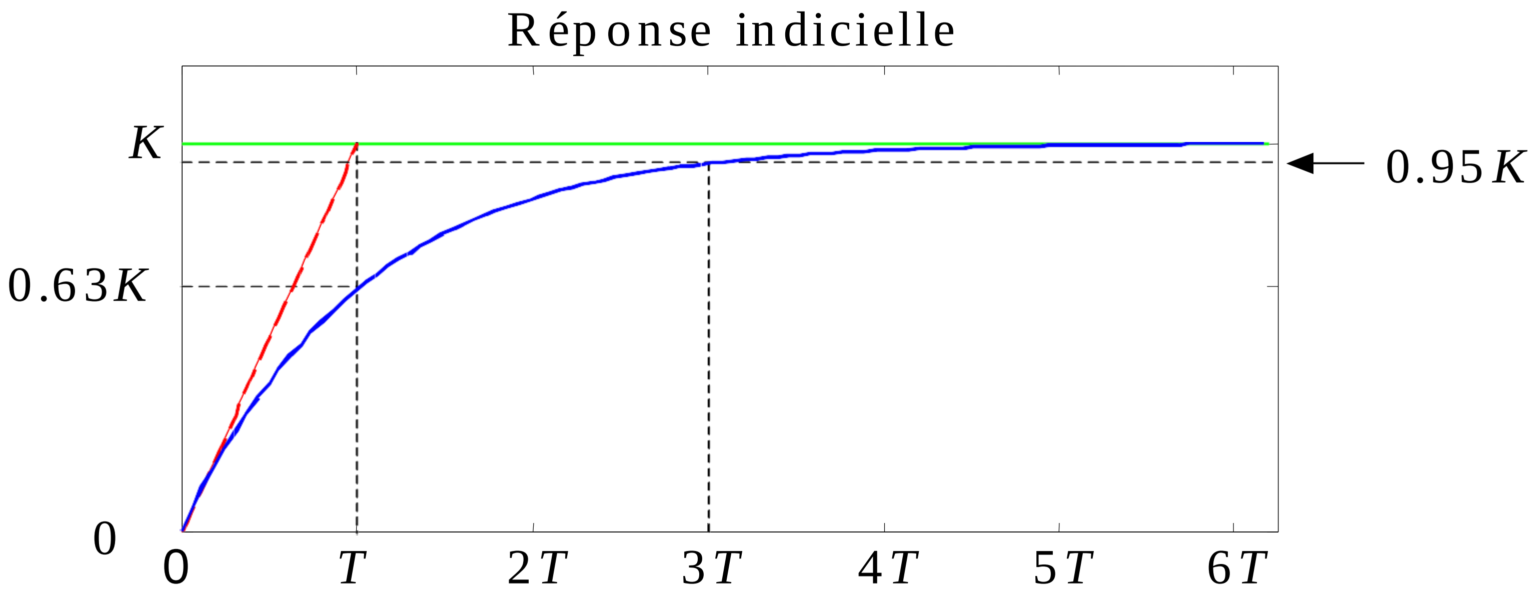


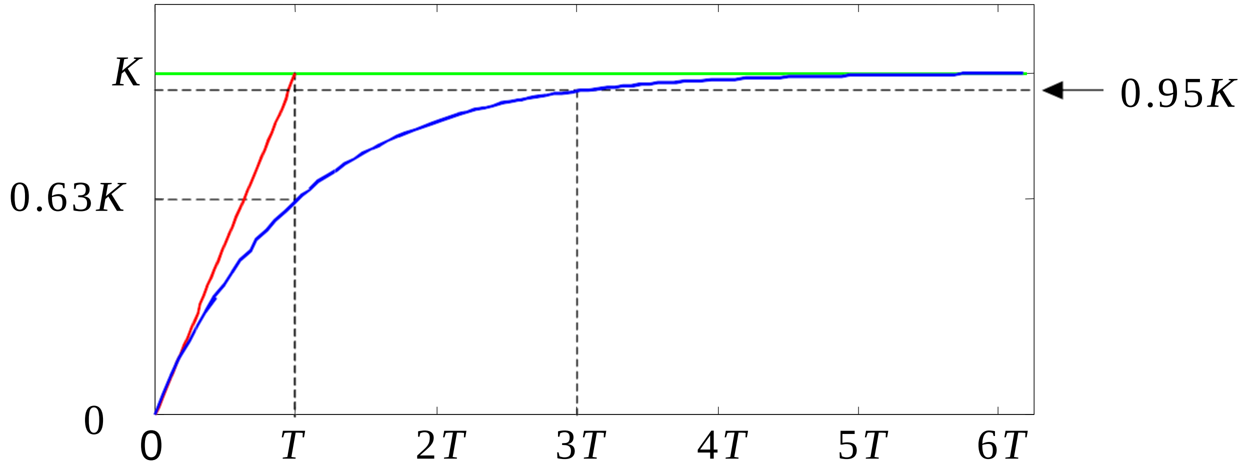
Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_\infty}$ (%)	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Système du 1er ordre

Rapidité du système



- **Temps de réponse t_r du système**

t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$\boxed{t_r \approx 3T}$$

- **Temps de montée t_m**

t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

$$\boxed{t_m \approx 2{,}2T}$$

Système du 1er ordre

Réponse à une rampe

- Entrée : signal rampe $u(t) = v(t)$

- Réponse du système

$$u(t) = v(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}.$$ On en déduit $$Y(s) = \frac{K}{s^2(1+Ts)}$$

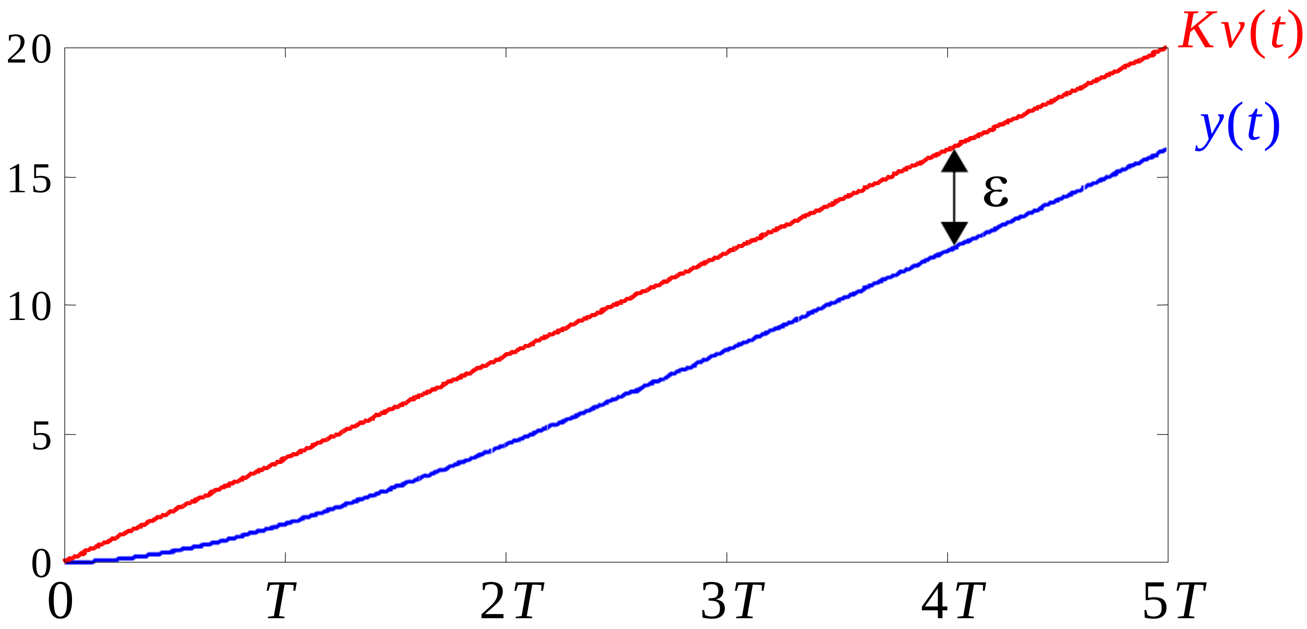
$$\boxed{y(t) = K(t-T) + KTe^{-\frac{t}{T}}}$$

- Remarques

  - La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard T

Système du 1er ordre

❑ Réponse à une rampe (fin)



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T
- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé erreur de traînage

Erreur de traînage : $= KT$

Système du 2e ordre

- Système régi par l'équation différentielle

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- Fonction de transfert

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \Rightarrow \left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) Y(s) = b_0 U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

- Autre écriture de la fonction de transfert

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}$$

ξ : facteur d'amortissement, K : gain

ω_n : pulsation naturelle non amortie du système avec $\omega_n > 0$

Système du 2e ordre

Pôles du système

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Les pôles sont les racines du polynôme $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

- Etude du discriminant réduit
  - $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1)$
  - Si $|\xi| \geq 1$ alors $\Delta \geq 0$: le système a des pôles réels et son comportement est apériodique
    - Si $|\xi| > 1$ alors le système a deux pôles réels distincts
    - Si $|\xi| = 1$ alors le système a un pôle réel double
  - Si $|\xi| < 1$ alors $\Delta < 0$: le système a une paire de pôles complexes conjugués et son comportement est oscillatoire

Système du 2e ordre

Système apériodique : $|\xi| \geq 1$

- Pôles du système

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- Condition de stabilité

Le système est stable si les pôles λ_1 et λ_2 sont négatifs, ce qui correspond à la condition $\xi \geq 1$

- Factorisation de la fonction de transfert

Comme $\lambda_1\lambda_2 = \omega_n^2$, on a $H(s) = \dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

Le système du 2e ordre apériodique est équivalent à la mise en série de deux systèmes du 1er ordre de constantes de temps :

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

Système du 2e ordre

- Système apériodique (cas $\xi > 1$) : réponse indicielle
  - Décomposition de la FT en éléments simples

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{K_1}{(1+T_1 s)} - \frac{K_2}{(1+T_2 s)}$$

avec $K_1 = \dfrac{K\,T_1}{T_1 - T_2}$ et $K_2 = \dfrac{K\,T_2}{T_1 - T_2}$

  - Réponse indicielle

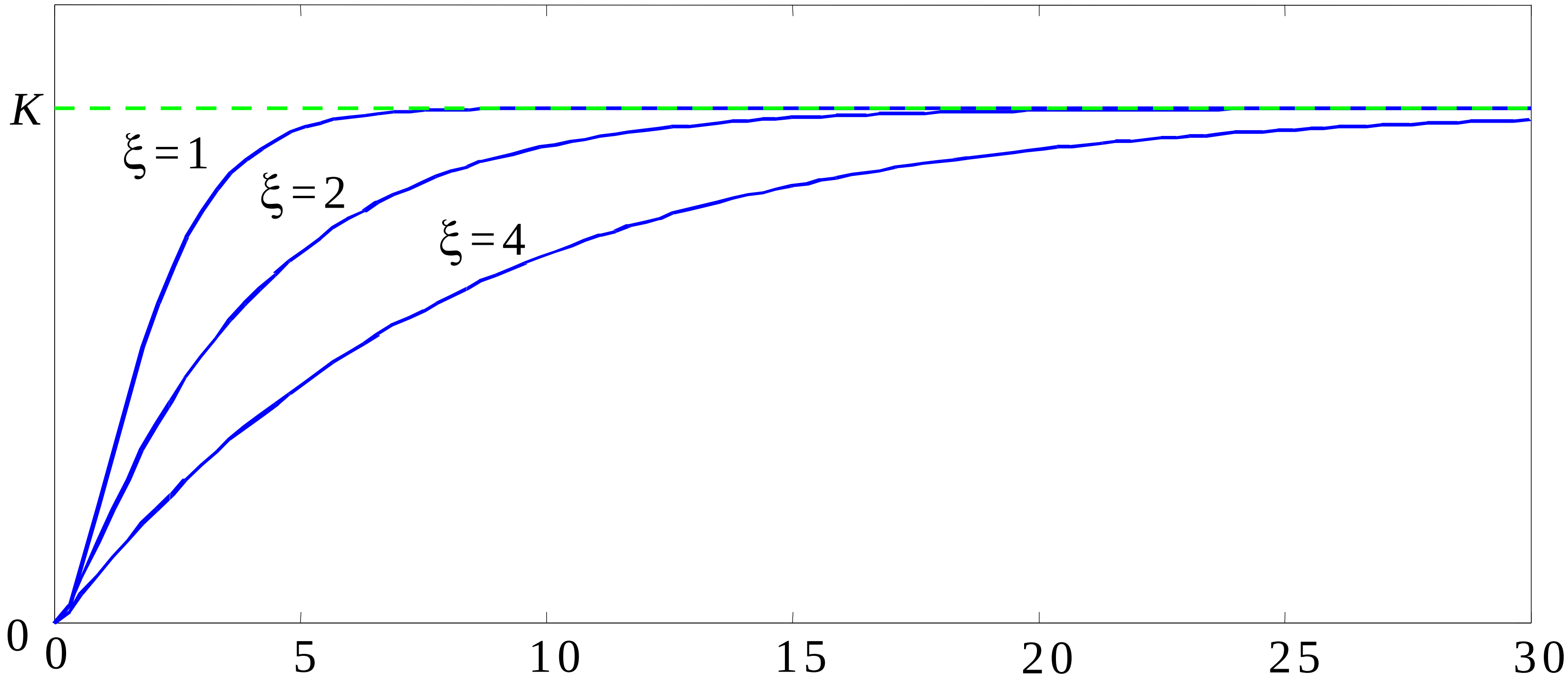
C'est la somme des réponses indicielles des deux sous-systèmes

$$y(t) = K_1\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) - K_2\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) = K_1(1 - e^{\lambda_1 t}) - K_2(1 - e^{\lambda_2 t})$$

- Système apériodique (cas $\xi = 1$) : réponse indicielle

Système du 2e ordre

Système apériodique ($\xi \geq 1$) : réponse indicielle



- Remarques
  - Pente à l'origine nulle
  - La réponse la plus rapide correspond à $\xi=1$
  - Asymptote horizontale $y=K$

Système du 2e ordre

Système oscillatoire : $|\xi| < 1$

- Pôles du système

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Le système est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$, soit $\boxed{0 < \xi < 1}$

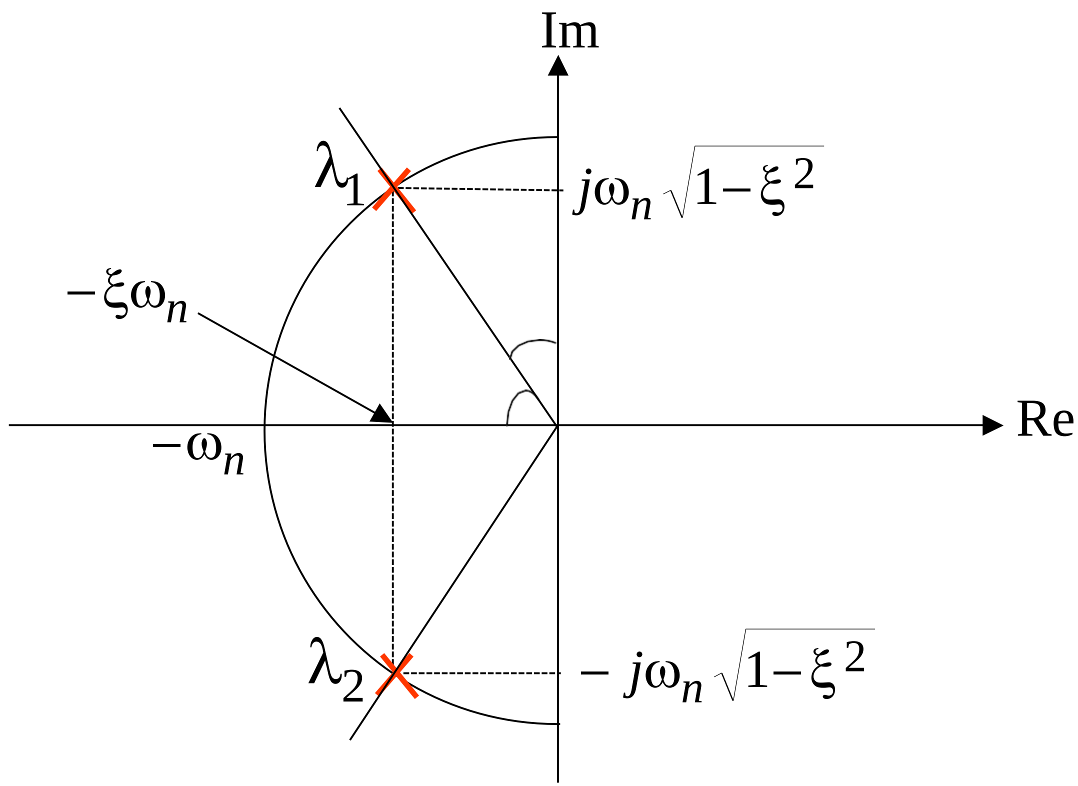
- Lieu des pôles

Pour $0 \leq \xi \leq 1$

Rayon de l'arc de cercle = ω_n

$$\cos(\varphi) = \xi$$

$$\sin(\psi) = \xi$$

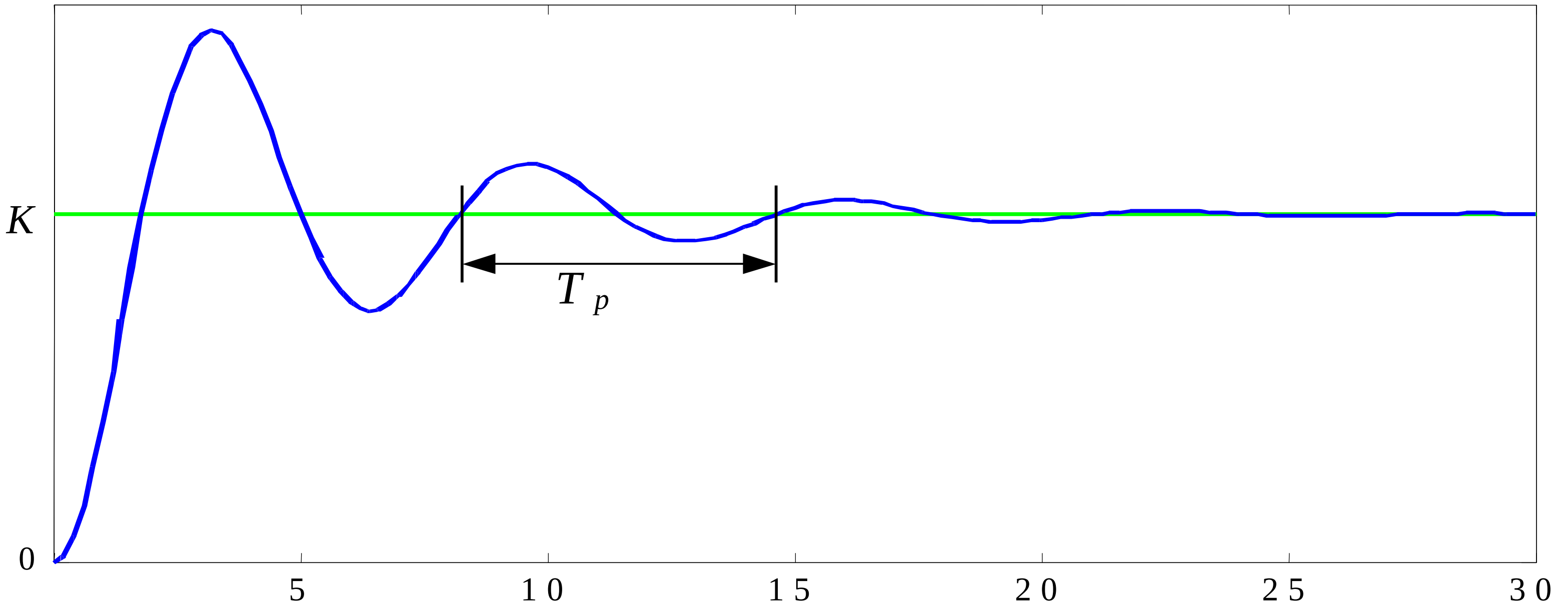


Système du 2e ordre

- Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$)
  - Réponse indicielle

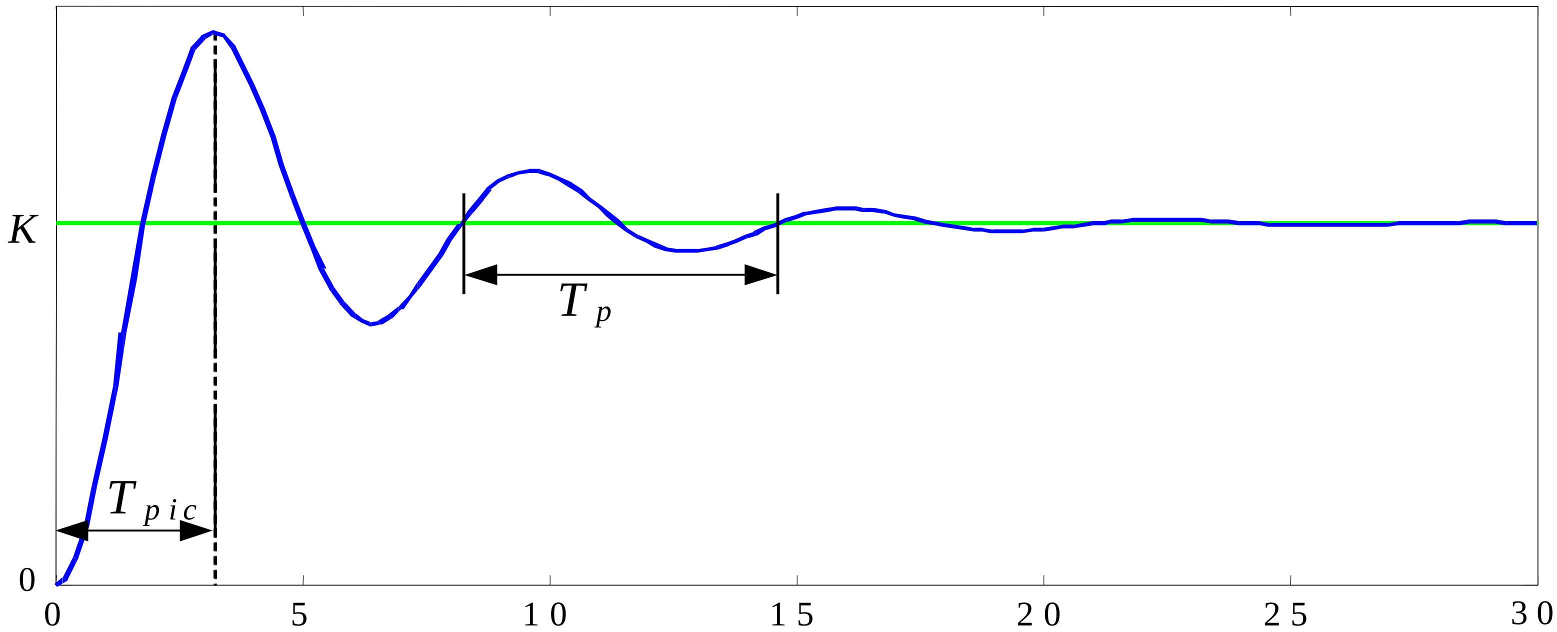
$$y(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t + \varphi)\right)$$

avec $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \arccos\xi$



Système du 2e ordre

Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$) : réponse indicielle

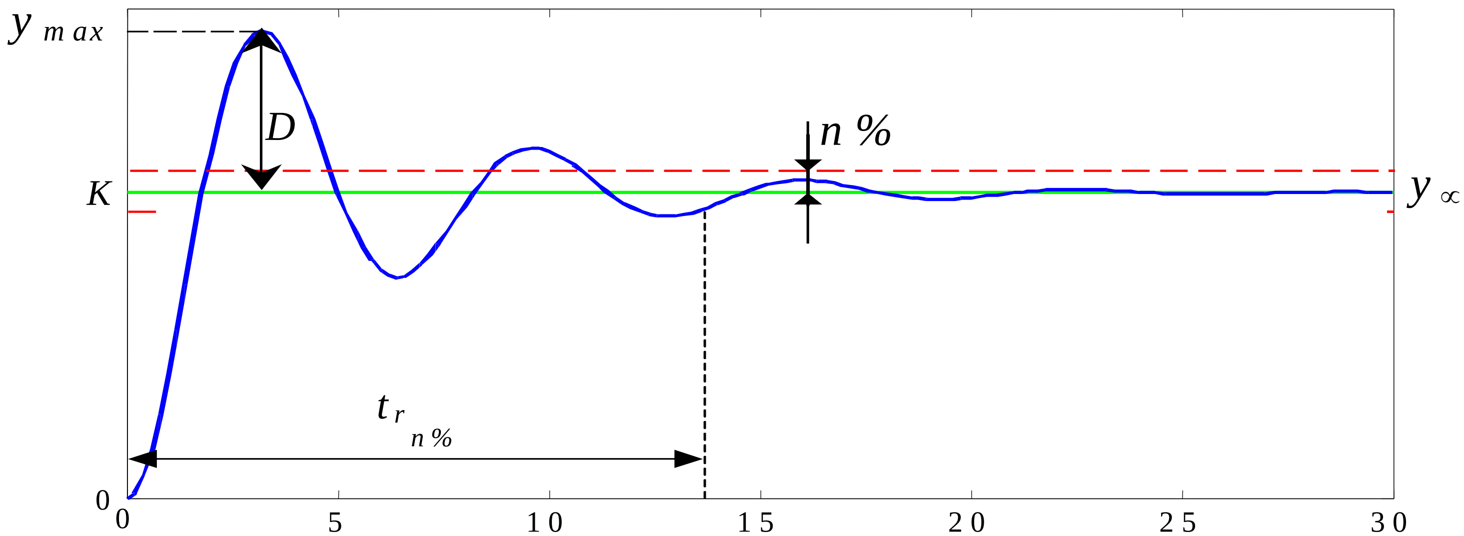


Caractéristiques de la réponse indicielle

- Réponse oscillatoire amortie de pulsation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$
- Pseudo-période des oscillations $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de pic $T_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_p}$

Système du 2e ordre

❑ Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



- Dépassement (D)

Définition : $D_{\%} = \dfrac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \times 100$

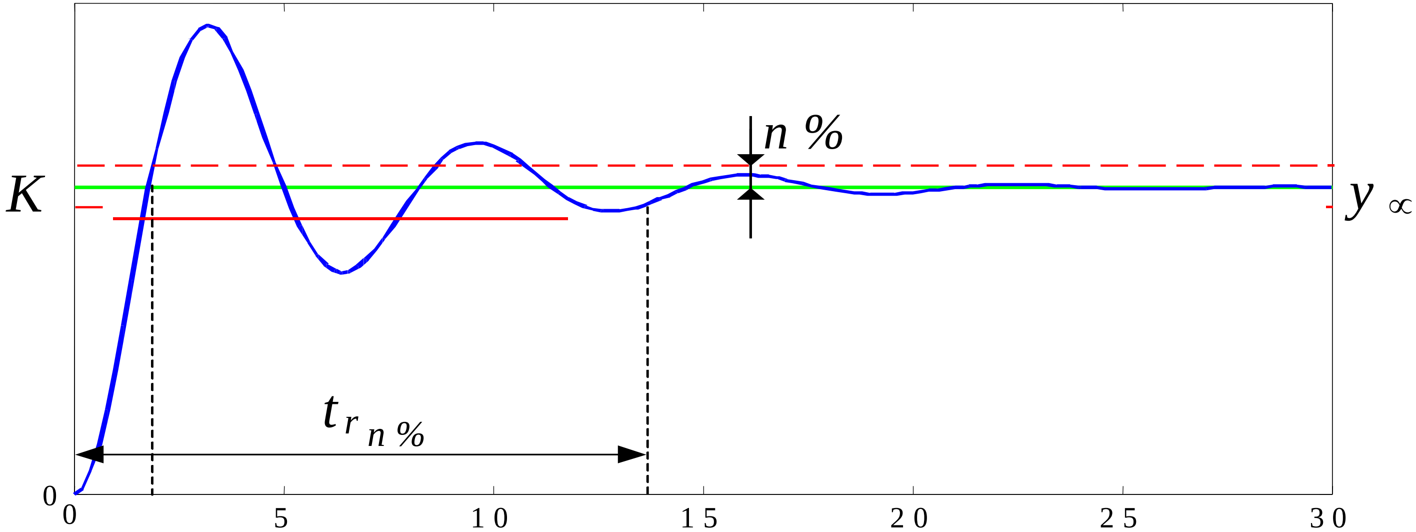
y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

y_{max} : valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%} = 100\, e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Système du 2e ordre

❑ Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



➢ Temps de réponse à n% ($t_{r_{n\%}}$)

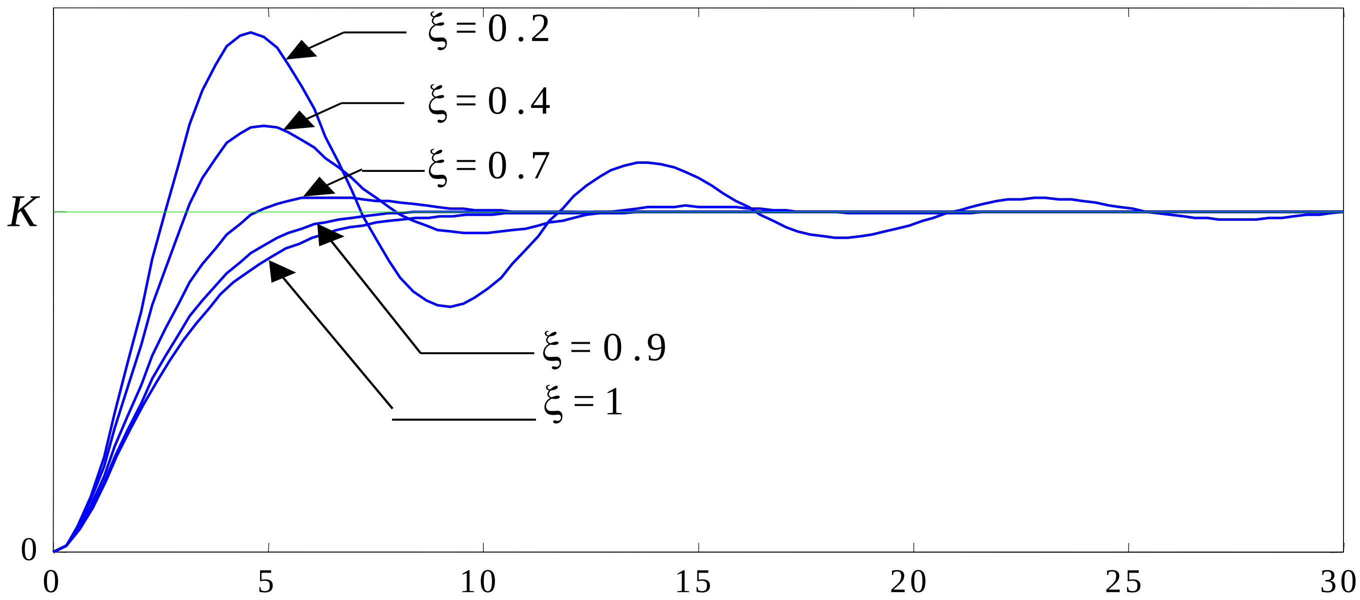
C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $\pm n$% de sa valeur finale

$$t_{r_{n\%}} \approx \frac{1}{\xi\omega_n} \ln\frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7)$$

On mesure en général le temps de réponse à 5% : $t_{r_{5\%}} \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n} \quad (\xi < 0.7)$

Système du 2e ordre

Influence du coefficient d'amortissement

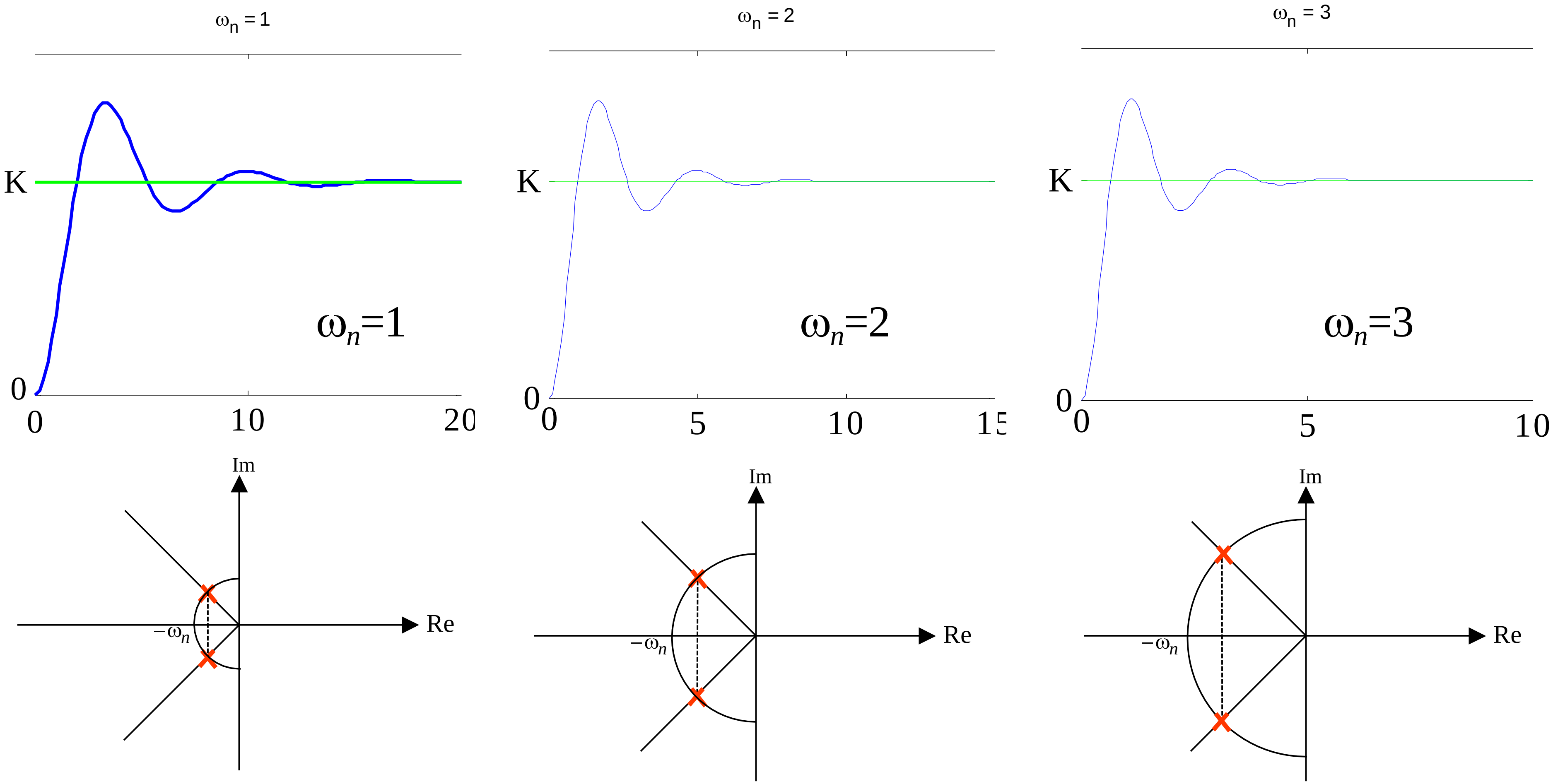


- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)

  Dépassement $D \approx 5\%$ et $\omega_n t_r \approx 3$

Système du 2e ordre

Influence de la pulsation naturelle ω_n



- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la période des oscillations est grande
- Plus la pulsation ω_n est faible, plus la réponse du système est lente

Exercice1 : Etude d'un système second ordre

Soit le système :

obéissant à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 5\frac{dy}{dt}(t) + 6y(t) = 6x(t)$$

1. Quelle est sa fonction de transfert ?
2. Quelle est l'évolution de la sortie y(t) à partir de t = 0 avec l'entrée x(t) est un échelon unitaire :

Notion de pôles dominants

Illustration

Traçons la réponse indicielle du système de fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{5}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$ avec T_1=1 et T_2=5.

Les pôles sont : $\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{T_2}$

Décomposition de la fonction de transfert : $H(s) = H_2(s) - H_1(s)$

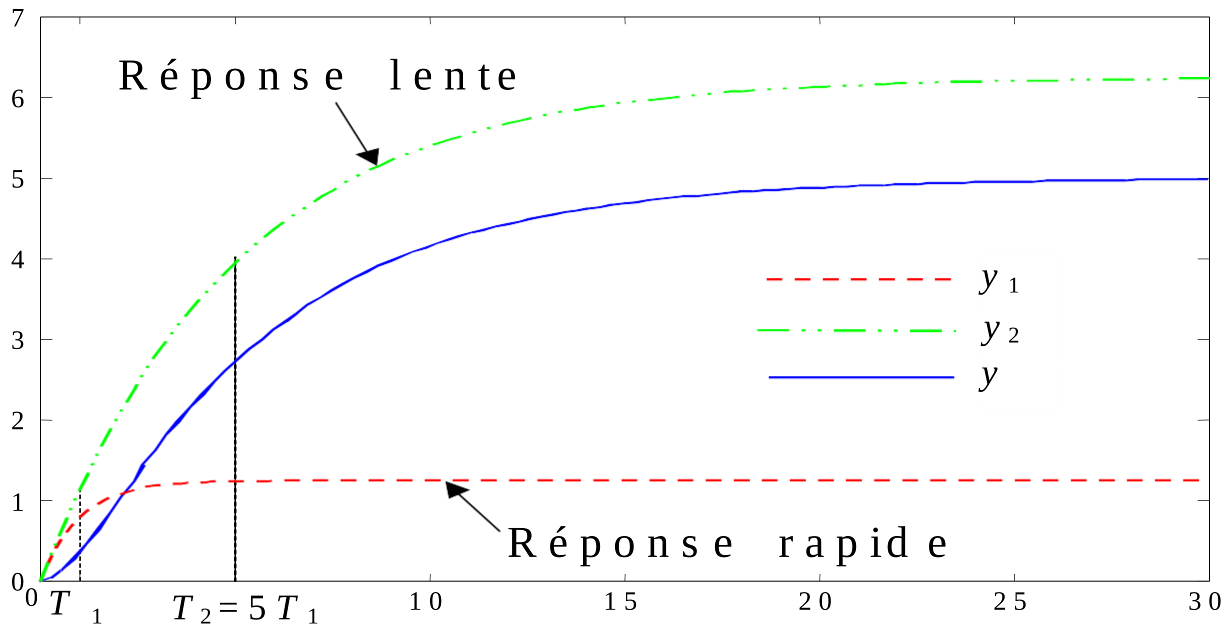
avec $H_2(s) = \frac{25}{4}\frac{1}{(1+T_2 s)}$ et $H_1(s) = \frac{5}{4}\frac{1}{(1+T_1 s)}$

Réponse indicielle

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t) = \frac{25}{4}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) - \frac{5}{4}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$y(t) = \frac{25}{4}\left(1 - e^{\lambda_2 t}\right) - \frac{5}{4}\left(1 - e^{\lambda_1 t}\right)$$

Notion de pôles dominants



Réponse indicielle

Au bout de $5T_1$, la réponse y_1 tend vers sa valeur finale $y_{1\infty}$. La sortie y du système n'évolue que sous l'influence de y_2.

Le sous-système H_2 (son pôle est $\lambda_2 = -1/T_2$) impose le régime transitoire du système. On dit que le pôle λ_2 est dominant par rapport à λ_1.

Le système du 2^{e} ordre a une réponse temporelle similaire à celle d'un système du 1er ordre de constante de temps T_2.

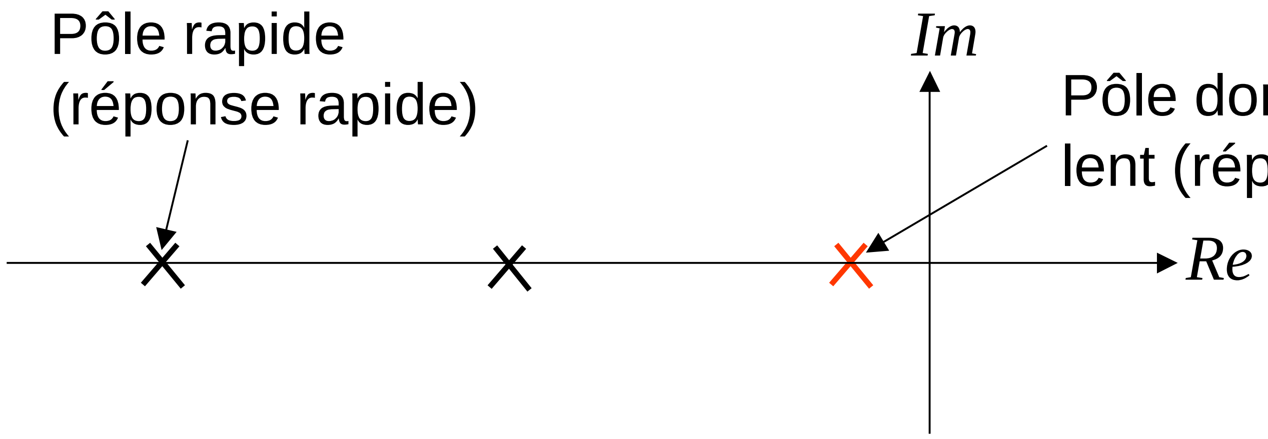
Notion de pôles dominants

Définition

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les pôles d'un système stable. Le pôle λ_i ou la paire de pôles (λ_i, λ_i^*) est dit dominant par rapport au pôle λ_j si :

$$\left|\mathrm{Re}(\lambda_i)\right| << \left|\mathrm{Re}(\lambda_j)\right| \qquad j \neq i$$

En pratique, λ_i est dominant par rapport à λ_j si $\left|\mathrm{Re}(\lambda_i)\right| < 5 \times \left|\mathrm{Re}(\lambda_j)\right|$



Les pôles dominants correspondent soit à une constante de temps élevée (réponse lente), soit à un amortissement faible (réponse très oscillatoire). Ils sont donc situés près de l'axe des imaginaires