

## 1 Description

### 1.1 Eléments structural à paroi mince

On considère une portion d'une surface  $\Sigma$ , ainsi que sa normale  $\mathbf{n}$  au point  $\mathbf{A}$ . on porte sur  $\mathbf{n}$  le segment  $\mathbf{BC}$  de longueur  $t$ , symétriquement par rapport à  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ ). En faisant parcourir au point  $\mathbf{A}$  toute la surface  $\Sigma$ , la grandeur  $t$  pouvant varier très progressivement, on matérialise un élément structural, dit à paroi mince si  $t$  est petit vis-à-vis de certaines dimensions caractéristiques de  $\Sigma$  ( $t < L$ ,  $t < a$ ,  $t < r$ ). On appelle  $\Sigma$  la surface moyenne et  $t$  l'épaisseur.

Les surfaces engendrées par les extrémités  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  du segment normal, qui limitent l'élément structural selon l'épaisseur, sont appelées faces, supérieure et inférieure, extérieure et intérieure, voir avant et arrière selon les cas.

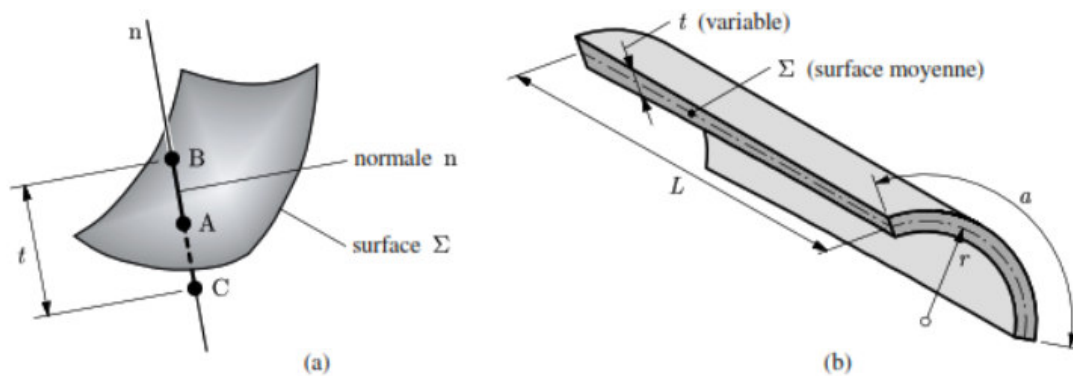


Fig. 1.1 Elément structural mince ( $t$  est l'épaisseur) : (a) surface moyenne  $\Sigma$  et sa normale ; (b) dimensions caractéristiques ( $L$ ,  $a$ ,  $r$ ).

Ingénieurs et architectes conçoivent une infinie variété de structures formés d'un ou plusieurs éléments de ce genre, de sorte qu'une classification est presque impossible. On distingue, d'après la forme de la surface moyenne,

- Les coques ou voiles, à surface moyenne courbe,
- Les parois et plaques, à surface moyenne plane,
- Les surfaces plissées, à surface moyenne polyédriques.

La rigidité de ces structures peut être accrue par l'adjonction de raidisseurs. On parle alors de coques et plaques nervurées ou raidies.

Dans l'étude théorique des coques, la surface moyenne  $\Sigma$ , la normale  $\mathbf{n}$  et le segment  $\mathbf{BC}$  jouent un rôle essentiel. Dans la suite on désigne par **normale** tant le segment que la droite qui la porte. Le segment correspond, dans la théorie des coques, à la section droite dans la théorie des poutres de Bernoulli.

Pour éviter de recourir à une analyse de solide tridimensionnel, l'objectif de toute théorie de coque est de tirer partie de la minceur de l'élément structural défini ci-dessus : sa réponse peut en effet être ramenée à l'étude bidimensionnelle de sa surface moyenne, complétée de

règles dictant le comportement des normales. L'analyse de la surface moyenne est donc importante.

## 1.2 Géométrie de la surface moyenne :

### 1.2.1 Définition

Dans un système cartésien droit  $(X, Y, Z)$ , les équations paramétriques :

$X = X(\alpha, \beta)$  --  $Y = Y(\alpha, \beta)$  --  $Z = Z(\alpha, \beta)$  ; définissent une surface  $\Sigma$ . A toute valeur constante  $C_\beta$  du paramètre  $\beta$  correspond une ligne sur la surface, dite ligne de coordonnée  $\alpha$  ; de même  $\alpha = C_\alpha$  définit une ligne de coordonnée  $\beta$ . L'ensemble forme les lignes de coordonnées et  $(\alpha, \beta)$  sont les coordonnées curvilignes sur la surface.

Si les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être éliminés des équations, on obtient la forme explicite  $Z = Z(X, Y)$ .

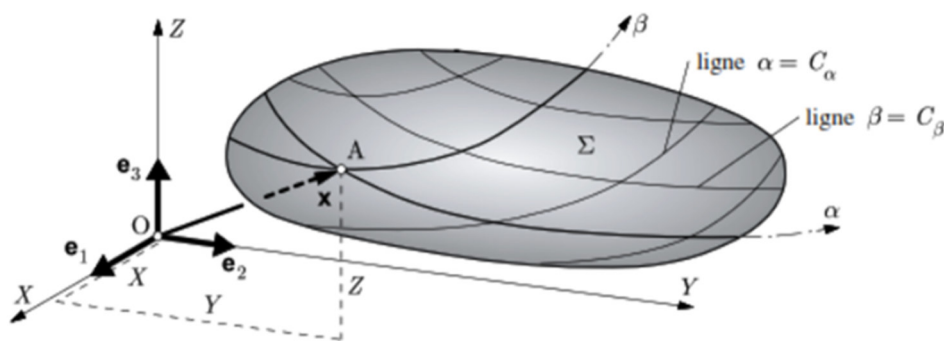


Fig. 1.2 Surface et ses lignes de coordonnées.

### 1.2.2 Courbure normale

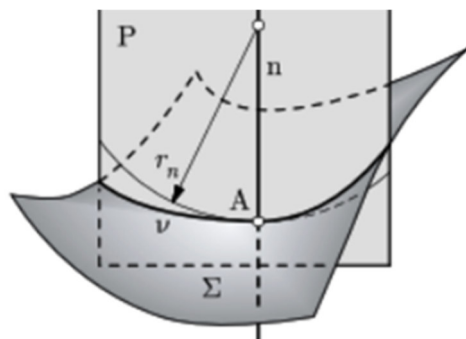


Fig. 1.3 Courbe  $\nu$ , de courbure normale  $1/r_n$  au point A, section normale de la surface  $\Sigma$  par le plan P.

Soit  $\mathbf{n}$  la normale élevée au point  $A$  d'une surface  $\Sigma$ . On dit qu'un plan  $P$  contenant  $\mathbf{n}$  réalise une section normale de la surface ; cette section se traduit par une courbe plane  $\mathbf{v}$  tracée sur  $\Sigma$ .

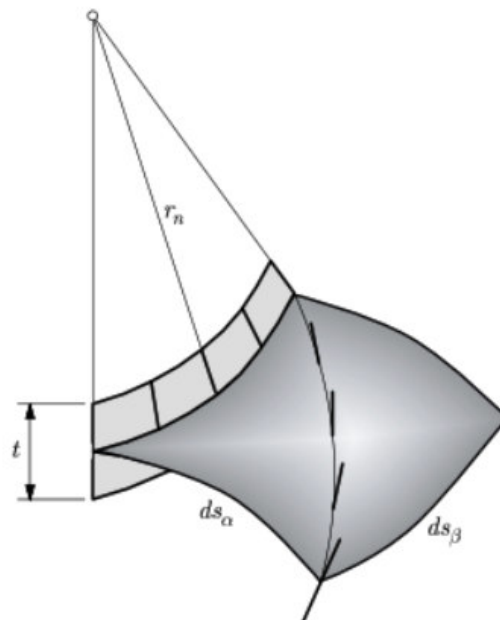
Au point  $A$  de cette courbe, on désigne par  $r_n$  le rayon de courbure ; son inverse  $1/r_n$  est la courbure normale.

Lorsque le plan  $P$  tourne autour de  $\mathbf{n}$ ,  $r_n$  et  $1/r_n$  varient entre deux valeurs extrêmes appelés rayons de courbure principaux  $r_{\max}$  et  $r_{\min}$  et courbures principale  $1/r_{\min}$  et  $1/r_{\max}$  ; les plans  $P$  correspondants sont perpendiculaires. La trace de ces deux plans dessine, au voisinage immédiat du point  $A$ , une petite croix sur la surface  $\Sigma$ . Les bras de cette croix sont les directions principales ; les courbes enveloppes de ces directions en tous les points de  $\Sigma$ , constituent un réseau orthogonal de deux familles de lignes, les lignes de courbure principale ou simplement, les lignes de courbure.

### 1.2.3 Ligne de courbure

Le réseau de ligne de courbure d'une surface peut être utilisé comme système de lignes de coordonnées curvilignes  $(\alpha, \beta)$  pour exprimer les équations des coques. Outre l'orthogonalité, ce réseau possède la propriété essentielle suivante : **le long d'un tronçon  $ds_\alpha$ , (ou  $ds_\beta$ ) d'une ligne de courbure, la normale reste dans le plan contenant la section normale et passe par le centre de courbure de ce tronçon.** Grâce à cette propriété, on peut isoler un fragment de coque d'épaisseur  $t$  par des sections droites, c'est-à-dire des coupes planes et normales à la surface moyenne.

Seules les lignes de courbure présentent cette particularité ; sur une autre ligne, la normale tourne autour de la ligne, traduisant la torsion de cette ligne.

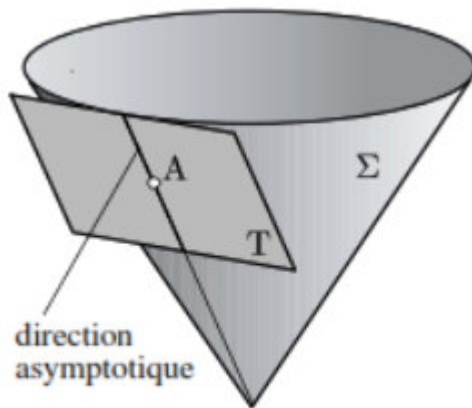


**Fig. 1.4** Élément de surface limité par des lignes de courbure ; le long d'un côté, la normale reste dans le plan de la section normale ; pour toute autre ligne, la normale tourne autour de la ligne.

### 1.2.4 Propriétés géométriques

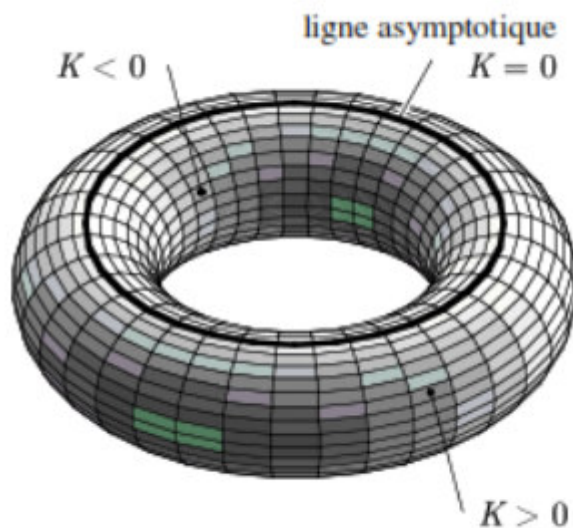
En un point d'une surface, la courbure de Gauss  $\mathbf{K}$ , ou courbure totale, est le produit des courbures principales :  $\mathbf{K} = 1/ (r_{\max} \times r_{\min})$  et la courbure moyenne  $\mathbf{H}$  est :  $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \times (1/r_{\max} + 1/r_{\min})$

Dans une surface à simple courbure, l'une des courbures principales est nulle et  $\mathbf{K} = 0$ .



(c)

Dans une surface à double courbure, les deux courbures principales sont non nulles ; si elles sont de même signe, ou de signe contraire, la surface est dite de gausse positive ou négative.



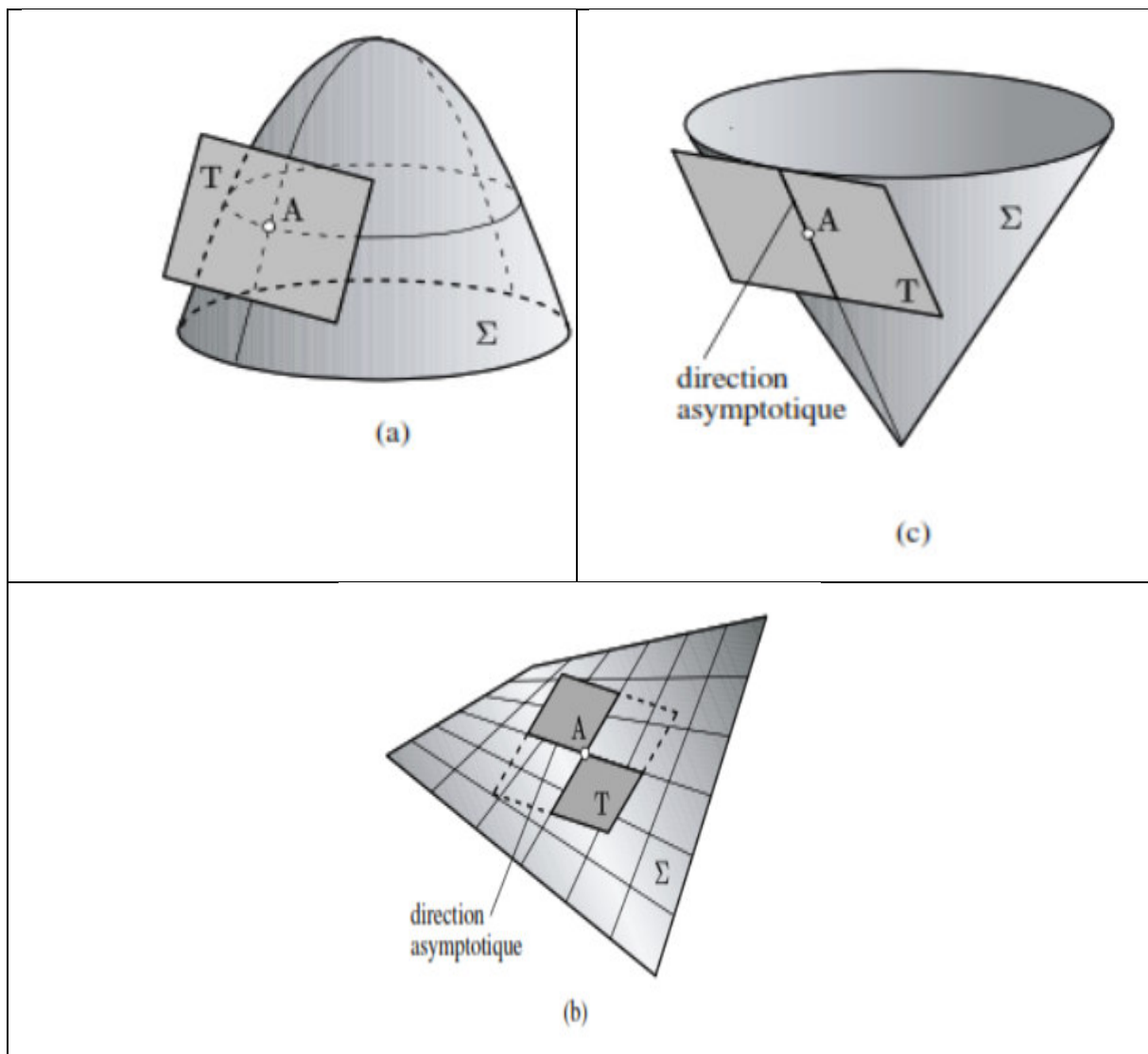
(d)

Certaines surfaces ont des zones à courbure totale positive, nulle ou négative. Il convient donc d'examiner cette notion de manière plus locale. Soit  $T$  le plan tangent au point  $A$  d'une surface  $\Sigma$ . Localement, trois cas sont possibles :

- La surface  $\Sigma$  reste située d'un seul côté de  $T$ , ne coupe pas  $T$  : le point  $A$  est dit elliptique (si on coupe  $\Sigma$  par un plan parallèle à  $T$ , très voisin de  $T$ , la section est, en

première approximation une ellipse) ; la courbure totale  $K$  est positive ; pour toute section normale par  $A$ , la courbure normale  $1/r_n$  ne change pas de signe.

- La surface  $\Sigma$  coupe  $T$  et se situe des deux côtés de  $T$  : le point  $A$  est dit hyperbolique et la courbure totale est négative ; l'intersection de  $\Sigma$  avec  $T$  se fait selon deux directions dites asymptotiques ; les directions principales en sont les bissectrices ; la courbure normale  $1/r_n$  change de signe, s'annulant le long des directions asymptotiques.
- La surface  $\Sigma$  et le plan  $P$  ont une ligne en commun, définissant une direction asymptotique ; le point  $A$  est dit parabolique et la courbure de gauss est nulle ; la courbure normale ne change pas de signe, s'annulant, une seule fois, sur la direction asymptotique.



### 1.2.5 Théorème de Meusnier et formule d'Euler

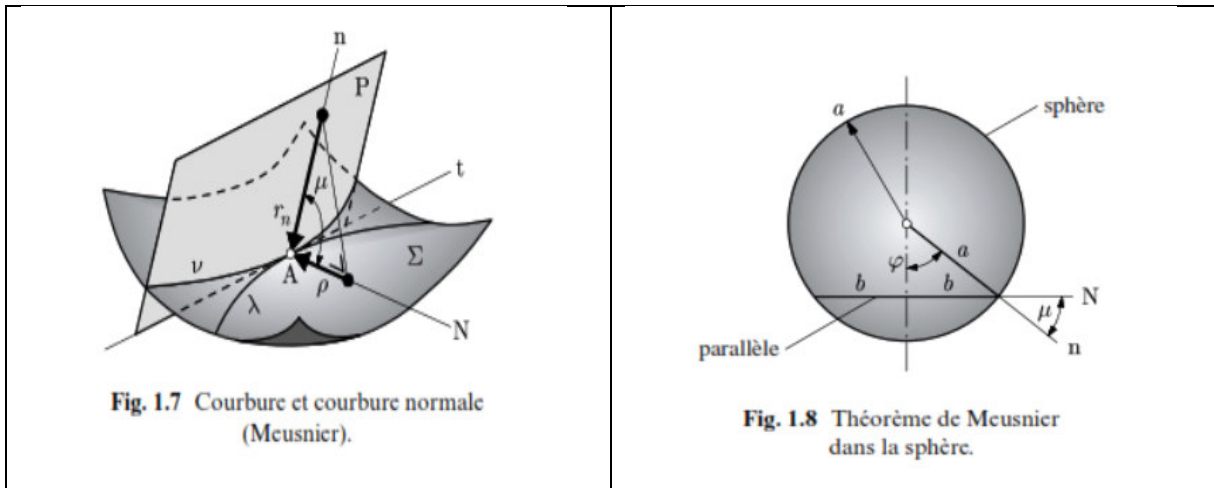
Soit une ligne quelconque  $\lambda$  tracée sur une surface  $\Sigma$ . Au point  $A$ , on trace la tangente  $\mathbf{t}$  et la normale principale  $\mathbf{N}$  à  $\lambda$  ; sur  $N$  se trouve le rayon de courbure  $\mathbf{q}$  de  $\lambda$  en  $A$ . en  $A$  toujours, on élève la normale  $\mathbf{n}$  à  $\Sigma$  ; le plan  $P$  formé de  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  coupe  $\Sigma$  selon la ligne  $\mathbf{v}$  de courbure

normale  $1/r_n$  (section normale). Si  $\mu$  est l'angle entre  $n$  et  $N$ , le théorème de Meusnier (1776) :  $\rho = r_n \cos \mu$ . Exprime les propriétés suivantes :

- Le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface est la projection, sur la normale principale, de celui de la section normale correspondante ;
- A toutes les courbes tracées sur une surface, ayant une tangente commune en un point, correspond la même courbure normale  $1/r_n$  en ce point.

Ce théorème rappelle, en particulier, que les courbures principales  $1/r_{\min}$  et  $1/r_{\max}$  ne sont pas nécessairement les courbures des lignes de courbures, mais bien les courbures des sections normales. Ainsi, sur une sphère de rayon  $a$ , un parallèle de rayon  $b$  est une ligne de courbure principale. Sa courbure vaut  $1/b$  et sa courbure normale  $1/a$ , avec (Meusnier),  $b = a \cos \mu$

Où en utilisant la colatitude  $\phi$ ,  $b = a \sin \phi$



Dans le plan tangent T au point A d'une surface  $\Sigma$ , orientons le plan P d'une section normale quelconque par l'angle  $\gamma$  compté à partir de la direction principale associée à  $r_{\max}$ . La formule d'Euler donne, en fonction de  $\gamma$ , la courbure  $1/r_n$  de la section normale  $v$  par :

Formule d'Euler	$\frac{1}{r_n}(\gamma) = \frac{1}{r_{\max}} \cos^2 \gamma + \frac{1}{r_{\min}} \sin^2 \gamma$
-----------------	---

Où les trois rayons de courbure sont mesurés au point A.

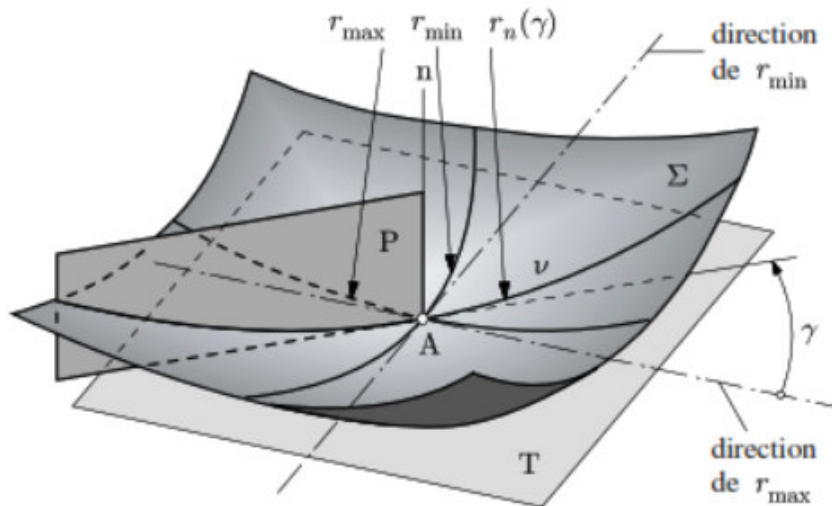


Fig. 1.9 Courbure d'une section normale quelconque de  $\Sigma$  en A.

### 1.3 Etat membranaire et état flexionnel

L'état de contrainte, par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par des efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une sections droite s'appelle ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

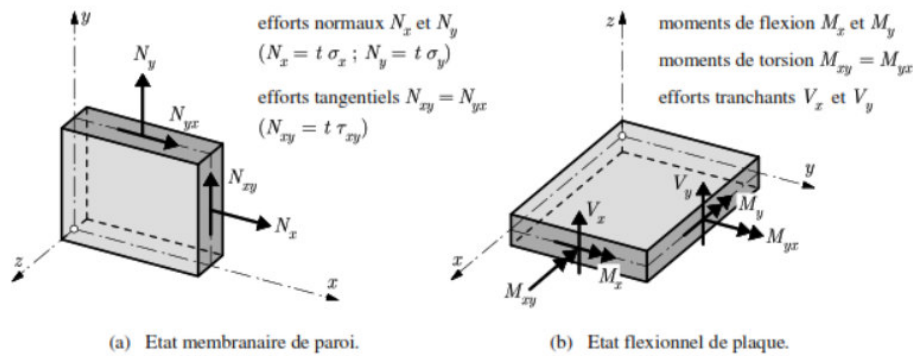
**L'état membranaire** s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels.

**L'état flexionnel** regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

Selon le mode de travail, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux :

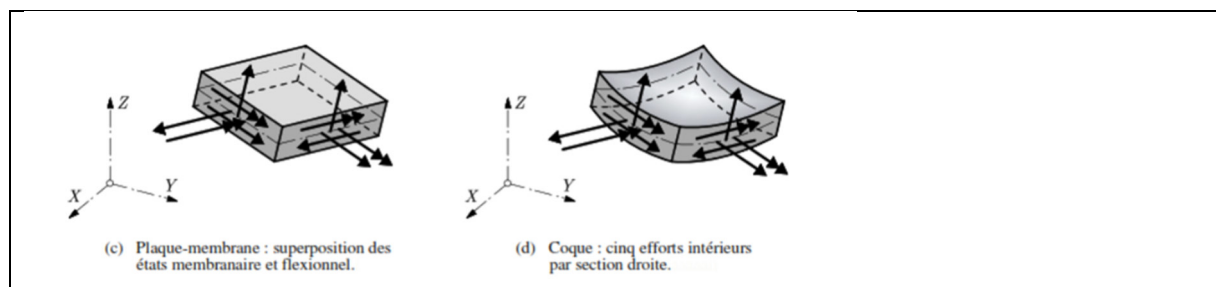
**L'élément de paroi** est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur ; sollicité par des charges agissant dans son plan moyen, il y résiste par **un état membranaire** ; les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contraintes ;

**L'élément de plaque** est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen) ; il résiste aux charges agissant normalement à son plan moyen par **un état flexionnel** ;

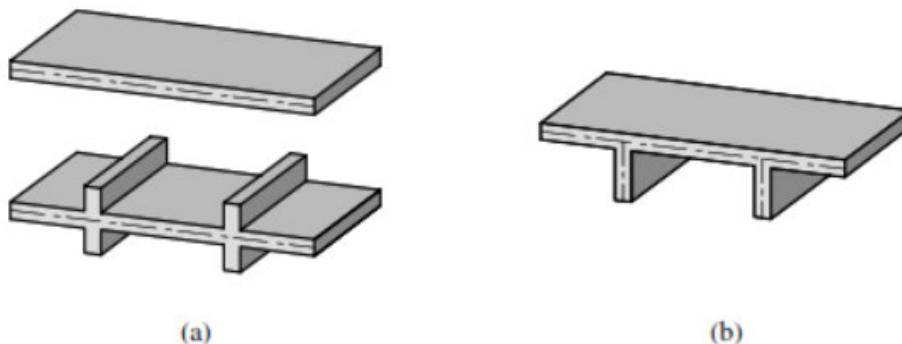


**L'élément plaque – membrane** est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque ; bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen ; il constitue la base **des structures plissées** ;

**L'élément structural de coque** est, par nature, courbe et spatial ; il utilise les deux états d'efforts intérieurs, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter ; exceptionnellement, grâce à sa courbure, une coque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire. (Structure gonflable, textile, peau, etc.)



La présence de raidisseurs peut modifier considérablement le mode de travail d'un élément structural ; par exemple, les sommiers ajoutés sous une plaque (dalle nervurée) transforment le comportement de plaque en celui d'une structure plissée.

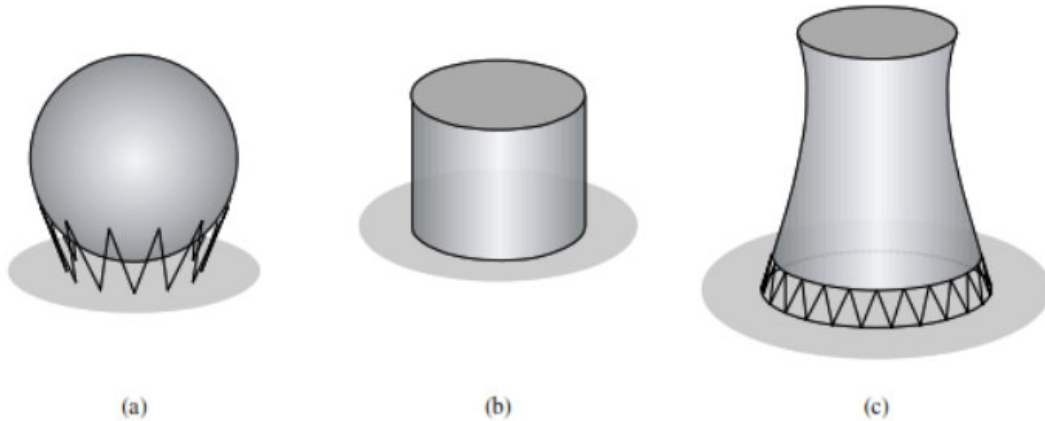


**Fig. 1.11** Effet des raidisseurs :  
 (a) plaque et plaque nervurée (avec raidisseurs centrés) : état flexionnel seul ;  
 (b) structure plissée (plaque avec raidisseurs excentrés) : états membranaires et flexionnels.



## 1.4 Coques

Une coque est définie par la géométrie courbe de sa surface moyenne et par son épaisseur en tout point de cette surface. Le choix de la bonne forme dépend en premier lieu de la fonction que la coque doit remplir.

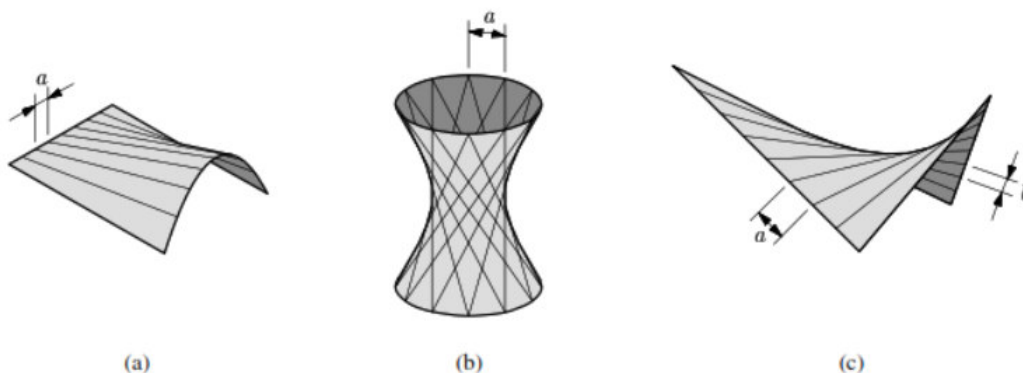


**Fig. 1.12** Surfaces de révolution : (a) réservoir sphérique (double courbure  $K > 0$ );  
(b) réservoir cylindrique (simple courbure  $K = 0$ );  
(c) tour de refroidissement (hyperboloïde, double courbure  $K < 0$ ).

### 1.4.1 Surfaces géométriques

La géométrie des surfaces offre un grand éventail de formes simple. Parmi les surfaces à simple courbure, le cône et surtout le cylindre sont très utilisés. (Réservoirs, silos, châteaux d'eau, récipients sous pression, conduites forcées, fusées, etc.). Les surfaces de révolution, sont également d'un emploi très fréquent.

Les surfaces réglées résultent du déplacement d'une droite, la génératrice, selon une certaine loi ; on peut ainsi engendrer des surfaces diverses à simple ou double courbure, dont la plus connue est le paraboloid hyperbolique.



**Fig. 1.13** Surfaces réglées : (a) conoïde ( $K = 0$ ); (b) hyperboloïde à une nappe ( $K < 0$ );  
(c) paraboloid hyperbolique ( $K < 0$ ).

L'intérêt de l'utilisation des surfaces réglées est essentiellement technique. Si la coque est en béton, le coffrage est réalisé au moyen de planches rectilignes étroites disposées selon les génératrices ; en bois, elle peut être formée d'un réseau de planches croisées clouées.

Les surfaces cylindriques, ouvertes ou fermées, ont obtenues en déplaçant une droite, la génératrice, parallèlement à elle-même sur une courbe plane, la directrice. La voûte autoportante, par exemple, est d'usage courant comme couverture ; elle est supportée par des diaphragme situés au niveau des appuis.

Les surfaces géométriques, présentées ici, ont l'avantage de pouvoir être décrites analytiquement. Elles ne sont toutefois pas l'unique ni nécessairement le meilleur choix pour la surface moyenne d'une coque. Ces formes simples risquent de ne pas s'adapter à des exigences particulières, par exemple à certaines charges, aux conditions géométriques ou statiques au contour (conditions aux limites), à la résistance au voilement, etc.

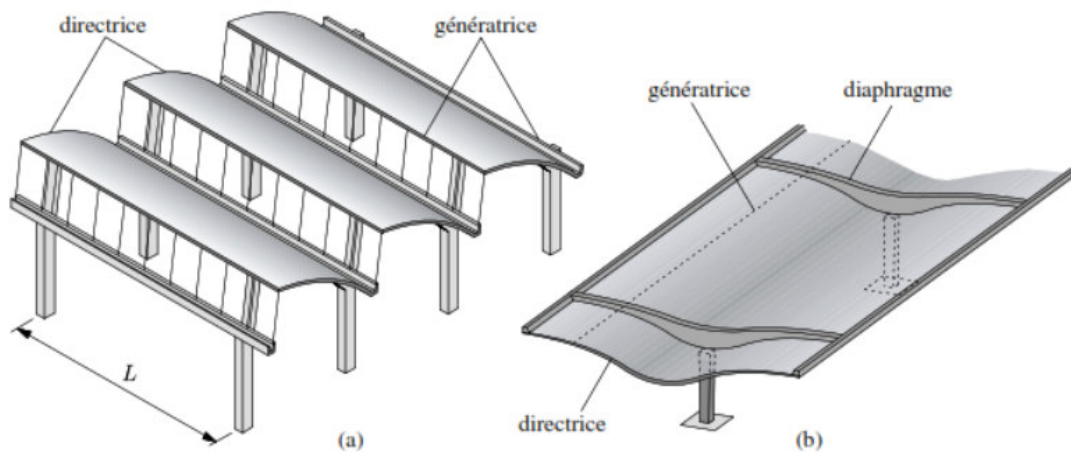


Fig. 1.14 Surfaces cylindriques ouvertes ( $K = 0$ ) dites voûtes autoportantes : (a) sheds (voûtes à simple portée  $L$ ) ; (b) abri (voûte continue).

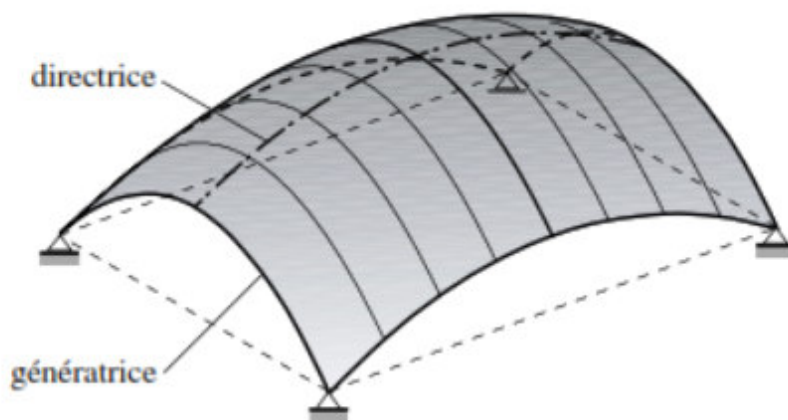


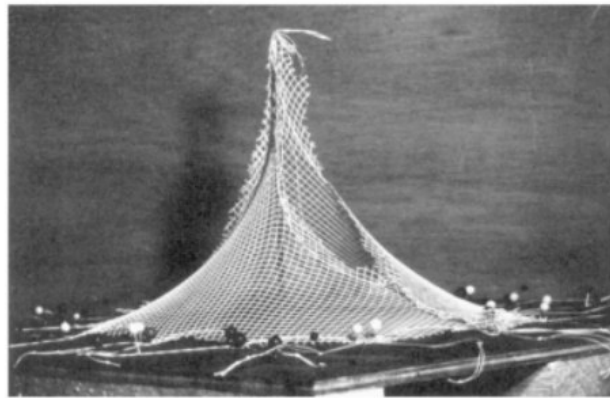
Fig. 1.15 Surface de translation ( $K > 0$ ) utilisée comme couverture.

### 1.4.2 Surfaces expérimentales

D'autres surfaces intéressantes et souvent très fonctionnelles peuvent s'obtenir par des techniques expérimentales. La plupart d'entre elles recourent à des matières souples (sans résistance flexionnelle) adaptant leur forme à la charge appliquée, en sorte que la résistance résulte essentiellement d'un état membranaire.



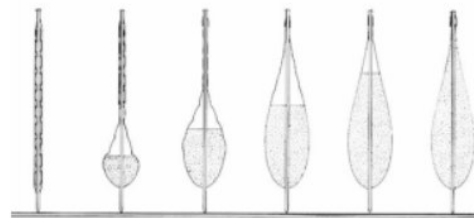
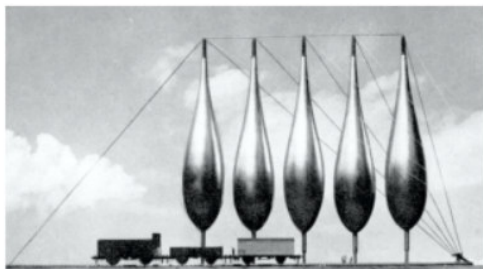
(a)



(b)

**Fig. 1.16** Maquettes pour l'étude des formes (pavillon de l'Allemagne, Expo 1967, Montréal) :  
(a) bulle de savon ; (b) tissu.

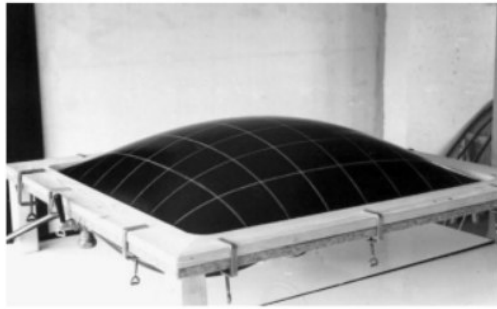
(Source : *IL8 – Netze in Natur und Technik*, K. Bach Red., Mit. des IL, Univ. Stuttgart, 1975.)



**Fig. 1.17** Projet de silos en enveloppe souple. (Source : F. Otto, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Band 1. Ullstein Verlag. Frankfurt/M - Berlin. 1962.)

Une membrane élastique tendue sur un cadre et soumise à une pression uniforme conduit également à des formes très variées selon la géométrie de la base. Gonflée et en vraie grandeur, elle peut servir de coffrage à une coque en béton. Soumise à une pression

hydrostatique, la membrane peut donner la forme idéale pour un barrage en voute.



(a)



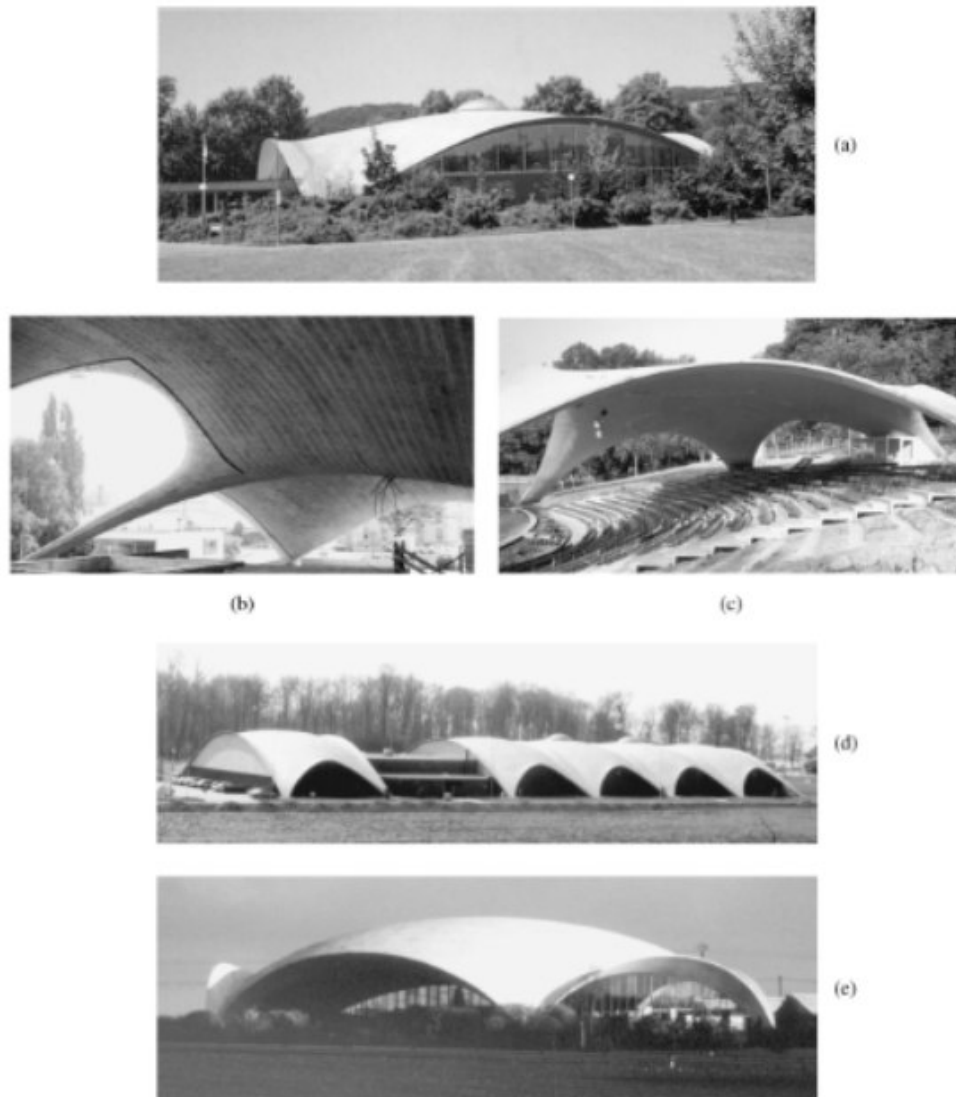
(b)

**Fig. 1.18** Coques de forme pneumatique :  
(a) maquette d'une membrane en caoutchouc sous pression d'air ;  
(b) réalisation de coques à base rectangulaire 18 m × 24 m.  
(Source : H. Isler, ingénieur ETHZ, Berthoud.)

Convaincu de l'efficacité de la méthode des toiles pesantes rigidifiées inversées, l'ingénieur suisse H. Isler l'utilise dans la réalisation des couvertures les plus diverses. Sa démarche expérimentale propre, lui permet de trouver des formes inédites et de propriétés idéales.

Dans tous ces procédés expérimentaux de recherche de formes, le relevé topographique du modèle est une opération délicate à mener.

La surface moyenne obtenue échappe à toute représentation analytique et, par suite, à toute méthode classique de résolution qui pourrait en dépendre. Seules les méthodes numériques (éléments finis) ou expérimentales (essais sur modèle) permettent d'étudier les coques de forme quelconque.



**Fig. 1.20** Coques en béton réalisées par Heinz Isler : (a) coque sur quatre appuis, 35 m × 35 m, épaisseur 9 à 10 cm (piscine de Brugg, 1981); (b) coque sur sept appuis, à base irrégulière 57,5 m × 34,5 m, épaisseur 10 cm (Sicli S.A., Genève, 1969); (c) coque sur cinq appuis à différents niveaux, 28 m × 42 m (théâtre en plein air, Grötzingen bei Stuttgart, 1977); (d) coques à base rectangulaire 18,4 m × 48 m accolées (halle de tennis, Marin-La Thène vers Neuchâtel, 1983); (e) coque sur cinq appuis, exemple de forme non suspendue mais dite coulée (centre horticole, Florélites Clause, Paris, 1975). (Source : H. Isler, ingénieur ETHZ, Berthoud.)

## 1.5 Structures plissées

Les structures plissées sont constituées d'un assemblage d'éléments structuraux plans, de type plaque – membrane, réalisant une structure portante stable. La jonction de deux éléments plans forme une arrête selon laquelle la liaison est presque toujours rigide.

La surface moyenne d'une structure plissée est une sorte de surface polyédrique à facettes multiples. La plus simple est une surface prismatique à facettes rectangulaires, la coque prismatique, très courante en pratique ; elle est formée d'une série de panneaux rectangulaires, généralement allongés, supportés transversalement par des diaphragmes au droit des appuis.

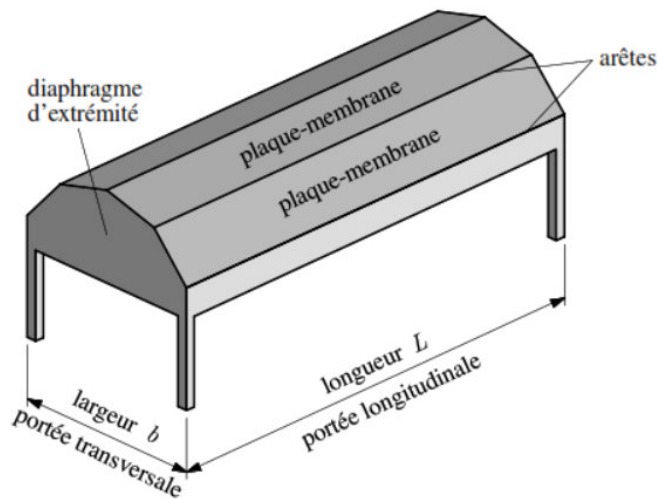


Fig. 1.21 Coque prismatique ouverte.

La coupe transversale d'une coque prismatique est une section droite à parois minces, ouverte ou fermée ; toute structure engendrée par le déplacement d'une telle section le long d'une droite est ainsi une coque prismatique (toiture, platelage, plancher, pont, poutre...). La présence d'entretoises intermédiaires, pour garantir la conservation de la forme de la section droite, permet souvent de calculer les plus allongées de ces coques comme de simples poutres.

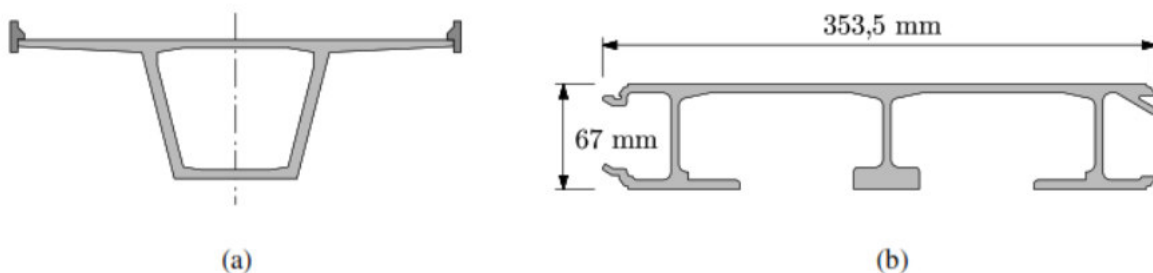
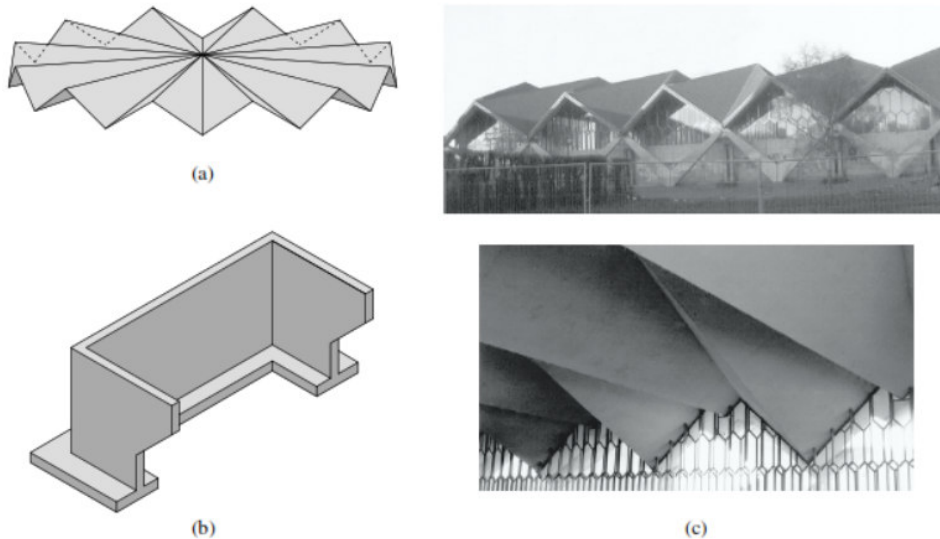


Fig. 1.22 Coupes transversales de coques prismatiques : (a) pont-caisson en béton armé ; (b) platelage en aluminium du pont suspendu de Montmerle, France (source : R. Paubel, *Le pont suspendu de Montmerle*, Revue de l'Aluminium, juillet-août 1974).

De façon générale, l'utilisation de panneaux plans à bords non parallèles permet de réaliser des structures portantes les plus diverses (couvertures, bâtiments, murs de soutènement, ponts caissons biais, culées de ponts, silos ...)



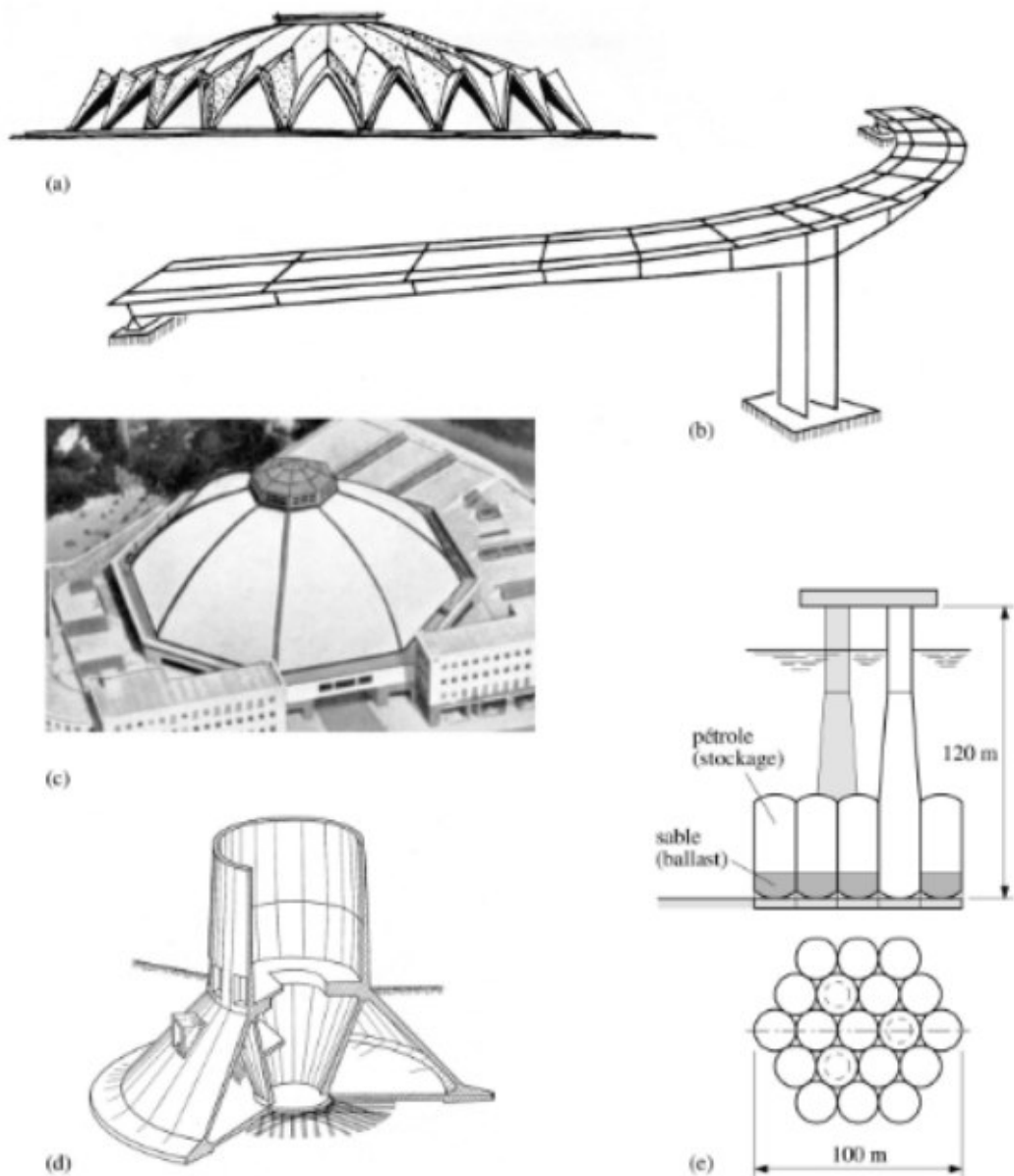
**Fig. 1.23** Structures plissées : (a) toiture circulaire (esquisse) ; (b) culée de pont (esquisse) ; (c) église St-Pierre et St-Paul, Droixhe, Liège (vues extérieure et intérieure; photos F. Frey).

## 1.6 Autres structures

Il est possible d'envisager d'autres formes d'éléments structuraux à parois minces.

D'autres types de structures plissées, par exemple, sont composées d'éléments à surface moyenne courbe et réalisés par des arrêtes curvilignes, ou un ou un mélange de panneaux courbes et plans.

Des structures composées, formées d'un assemblage de coques et de plaques-membrane, sont également très répandues ; les structures les plus diverses et les plus complexes résultent des exigences modernes de la technique (fondation des tours de télévision, bâtiments des réacteurs nucléaires, plateformes pétrolières etc.)



**Fig. 1.24** Structures à parois minces diverses : (a) projet de marché couvert à Moscou (esquisse); (b) pont-caisson courbe, Barbolesaz, Suisse (discrétisation); (c) coupole polygonale régulière, Markthalle, Bâle, 1929 (source : J. Joedicke, *Les Structures en Voiles et Coques*, Editions Vincent, Fréal et Cie, Paris, 1962); (d) fondation de la tour de télévision de Stuttgart (source : F. Leonhardt, *Der Stuttgarter Fernsehturm*, Beton- und Stahlbetonbau, 51 (1956) 4/5); (e) plate-forme offshore norvégienne *condeep* (esquisse).



## 1.7 Analyse des surfaces

### 1.7.1 Introduction

Cette section rappelle quelques relations de la théorie des surfaces, exprimées selon les lignes de courbure principale.

On choisit la représentation paramétrique vectorielle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha, \beta)$

Pour décrire une surface  $\Sigma$  dans l'espace. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées curvilignes sur  $\Sigma$  ; les lignes  $\alpha=\text{cste}$  et  $\beta=\text{cste}$  sont les lignes de coordonnées sur  $\Sigma$ .

On adopte les lignes de courbure (principal) comme lignes de coordonnées : elles forment un réseau orthogonal sur la surface.

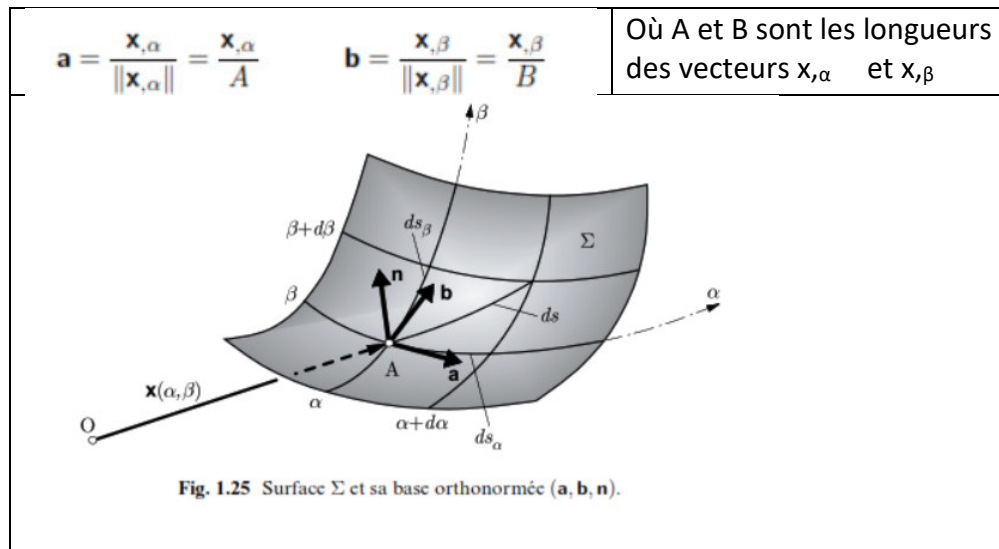
### 1.7.2 Valeurs unités attachées à la surface

Les vecteurs

$$\mathbf{x}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \quad \mathbf{x}_{,\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta}$$

Sont tangents aux lignes de coordonnées et à la surface.

Les vecteurs unités, tangents  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont :



Le vecteur unité  $\mathbf{n}$  normal à la surface est issu du produit vectoriel :  $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 1/AB (\mathbf{x}_{,\alpha}, \mathbf{x}_{,\beta})$

Les vecteurs unités  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{n}$  forment un repère attaché à la surface ; ils sont fonctions des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ; leur dérivées par rapport à la dernière sont données par les relations matricielles suivantes ( sans démonstration) :

$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{A}{r_\alpha} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ -\frac{A}{r_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix}$	$\frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & \frac{B}{r_\beta} \\ 0 & -\frac{B}{r_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix}$
--	---

Dans ces matrices  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  sont les rayons de courbure principaux ; ces rayons sont positifs si la normale unité  $\mathbf{n}$  pointe vers le centre de courbure.

La dernière ligne de chacune des relations précédentes, montre que l'accroissement du vecteur  $\mathbf{n}$  n'a de composante que dans la section normale associée, c'est-à-dire que ce vecteur reste dans le plan des sections normales le long des arcs élémentaires tracés sur les lignes de courbure. Cette propriété n'a lieu que sur les lignes et traduit le théorème de Rodrigues.

### 1.7.3 Première forme fondamentale

La différentielle  $dx = x_{,\alpha} d\alpha + x_{,\beta} d\beta$  ; permet de calculer le carré de la longueur de l'élément de ligne sur la surface.

$ds^2 = dx \cdot dx = (x_{,\alpha} \cdot x_{,\alpha}) d\alpha^2 + (x_{,\beta} \cdot x_{,\beta}) d\beta^2$	Relation qui s'écrit sous la forme : $I = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$
---	---

Cette relation représente la première forme fondamentale de la surface. Cette forme illustre la mesure de la distance sur  $\Sigma$ . Les coefficients A et B sont les paramètres de Lamé (Longueur de  $x_{,\alpha}$  et  $x_{,\beta}$ ).

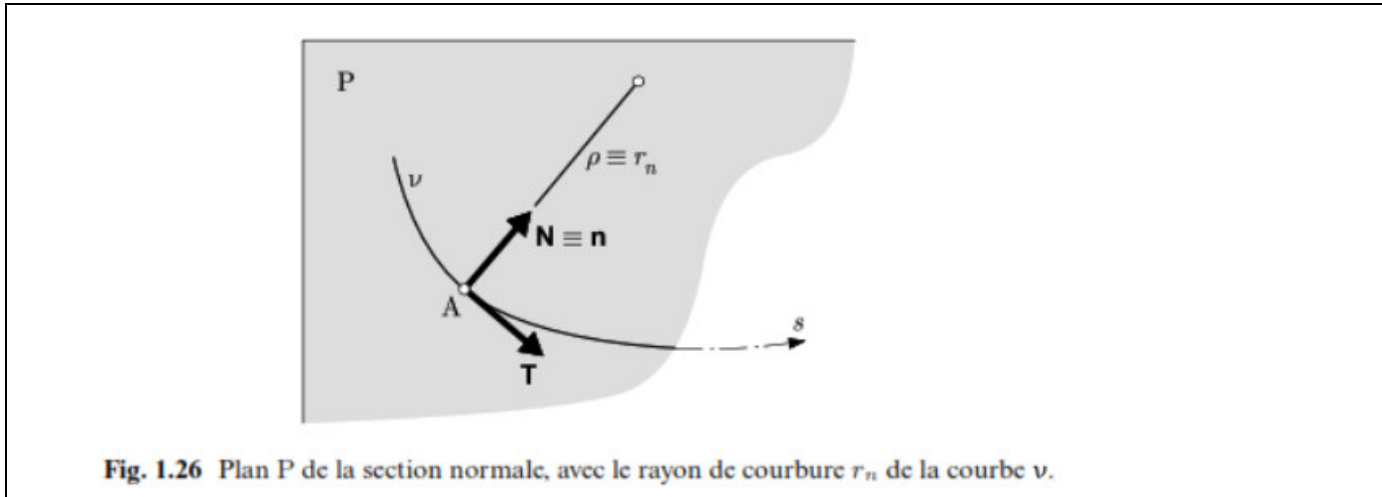
Si l'élément se situe sur une ligne de coordonnées ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) on a  $ds_\alpha = A d\alpha$  et  $ds_\beta = B d\beta$

Et les paramètres de Lamé donnent l'accroissement de la longueur d'arc associé à l'accroissement de la coordonnée. L'élément d'aire sur  $\Sigma$  est  $dA = ds_\alpha ds_\beta = AB d\alpha d\beta$

### 1.7.4 Deuxième forme fondamentale

L'intersection du plan P d'une section normale avec la surface  $\Sigma$  est une courbe plane  $v$ . Au point A de cette courbe d'abscisse curviligne  $s$ , on construit le vecteur tangent T et le vecteur normal N au sens de Frenet. On  $N \equiv \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale unité à  $\Sigma$  et par Frenet,

$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}$	avec $1/\rho \equiv 1/r_n$ , où $1/\rho$ est la courbure de $v$ en A et $1/r_n$ la courbure normale.
--	--



La dérivée, par rapport à l'abscisse curviligne $s$ de $v$ , du produit : $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ s'écrit :	$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$
D'où avec l'ensemble des relations précédentes :	$\frac{1}{r_n} = \frac{-d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n}}{ds^2} = \frac{II}{I}$
L'expression $II$ , est la seconde forme fondamentale de la surface.	$II = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n} = L d\alpha^2 + N d\beta^2$

On observe qu'elle traduit la forme de la surface via la courbure. Ses paramètres valent :

$L = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha}$	$N = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta}$	$L = \frac{A^2}{r_\alpha}$	$N = \frac{B^2}{r_\beta}$
--	--	----------------------------	---------------------------

### 1.7.5 Equations de Codazzi et Gauss.

Les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  intervenant dans les deux formes fondamentales d'une surface, ne sont pas indépendants, mais liés par trois équations. Ces équations peuvent être considérées comme des conditions de compatibilité géométrique entre ces paramètres, garantissant l'existence et l'unicité de la surface.

Pour les trouver, on examine les identités existantes entre les secondes dérivées mixtes des vecteurs de base.

Equation de Codazzi	$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{r_\alpha} \right) = \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{r_\beta} \right) = \frac{1}{r_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$
Equation de Gauss	$-\frac{AB}{r_\alpha r_\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)$

### 1.7.6 Formules de Frenet

On peut décrire une courbe dans l'espace semblablement à une surface, par représentation vectorielle à un paramètre.  $X = X(s)$

Où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la courbe.

A tout point A de cette courbe, on construit le repère de Frenet (T, N, B) par les vecteurs unités :

## 2 Théorie des coques minces

### 2.1 Introduction

De quelle manière on peut établir les équations nécessaires à la résolution du problème de coque. On se limite à la théorie la plus simple (celle due à Love).

Il s'agit de souligner les aspects structuraux, profitables à l'ingénieur, plutôt que des démonstrations mathématiques, bien qu'utiles, elles restent fastidieuses.

### 2.2 Théorie de love

Dans le domaine des coques, la première théorie recevable a été formulée par Love en 1888. Elle est construite sur le même modèle que la théorie des plaques de Kirchhoff, à savoir exprimer les équations en se référant à la surface moyenne tout en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables de la minceur de la structure.

La courbure de la coque pose toutefois des problèmes nouveaux et délicats, par rapport au cas de la plaque. Suite à de nombreuses recherches et controverses, la validité de la théorie simple de Love n'a été confirmée que plus tard par Koiter (1960).

La théorie de Love est approximative. Elle néglige des termes dont l'ordre de grandeur peut être considéré comme petit. Il s'ensuit que certaines équations sont qu'imparfaitement satisfaites.

Tant qu'il y a cohérence dans l'ordre de grandeur des termes négligés, la théorie est acceptable. C'est le cas de la théorie de Love souvent appelée première approximation cohérente de la théorie des coques.

### 2.3 Élément de coque

Sur la surface moyenne de la coque, on choisit les lignes de courbure comme lignes de coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$ . On appelle  $z$  la coordonnée mesurée selon la normale  $n$  à la surface moyenne ( $-t/2 \leq z \leq +t/2$ )

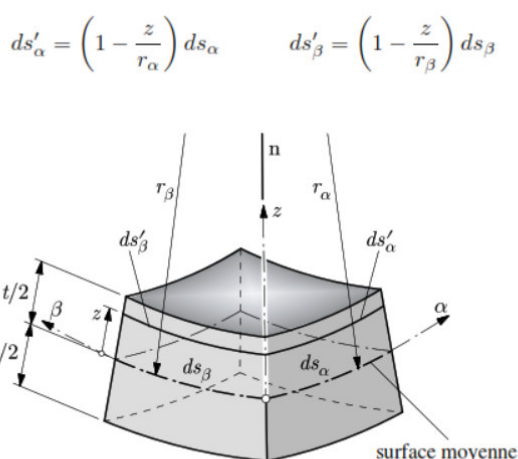


Fig. 2.1 Élément de coque dans les lignes de courbure (vue arrière).

## 2.4 Hypothèses

### 2.4.1 Hypothèse de linéarisation

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures, acceptant

- L'hypothèse de linéarisation géométriques (petits déplacements)
- L'hypothèse de linéarisation matérielle (loi de Hooke)
- La coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

### 2.4.2 Hypothèse des structures minces

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur ;
- La contrainte normale transversale est négligée.

La première hypothèse est purement cinématique et s'appelle parfois loi de conservation des normales. Il en résulte d'abord que les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne. Et que la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle.

La seconde hypothèse, statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit : ( $\sigma_z = 0$ ).

Les hypothèses ci-dessus sont d'autant mieux satisfaites que la minceur de la coque est effective ; elles réduisent l'état de contrainte dans la coque à un état de contraintes plane, parallèlement au plan tangent à la surface moyenne.

### 2.4.3 Hypothèse de faible épaisseur

L'hypothèse  $t$  négligeable devant  $r_{\min}$ ,  $r_\alpha$  et  $r_\beta$ , il en résulte que  $z$  est négligeable devant  $r_{\min}$ . D'où  $ds'_\alpha = ds_\alpha$  et  $ds'_\beta = ds_\beta$ . Ce qui signifie que les faces de l'élément de coque peuvent être admises rectangulaires.

En pratique, pour que la théorie qui suit soit valable, il est nécessaire de respecter en tout point d'une coque l'ordre de grandeur :  $t/r_{\min} < 1/10$ .

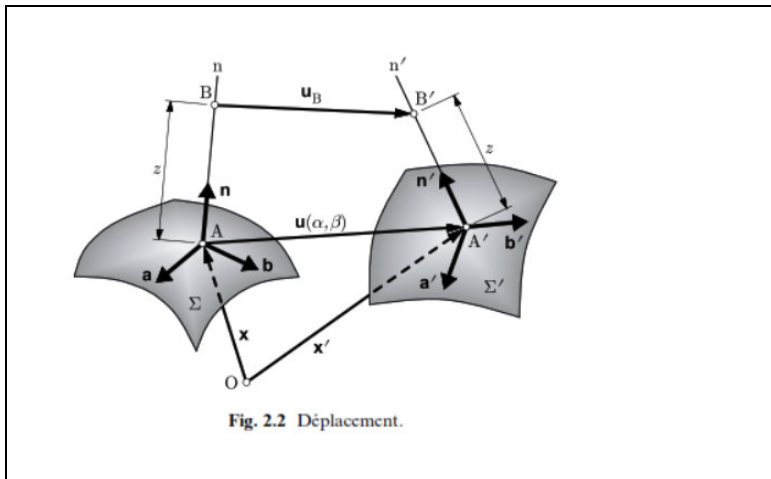
## 2.5 Autres théories

Sans objet

## 2.6 Cinématique

### 2.6.1 Déplacements

Sur une normale  $n$  à la surface  $\Sigma$  d'une coque, on considère le point  $A$ , pied de  $n$  sur  $\Sigma$ , et le point  $B$ , point de la coque situé à la distance  $z$  de  $A$  ( $-t/2 \leq z \leq t/2$ ). On construit en  $A$  le repère  $(a, b, n)$  attaché à  $\Sigma$ . En configuration déformée.  $n'$ ,  $\Sigma'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $(a', b', n')$  sont les images correspondantes, avec  $A'B' = z$ .



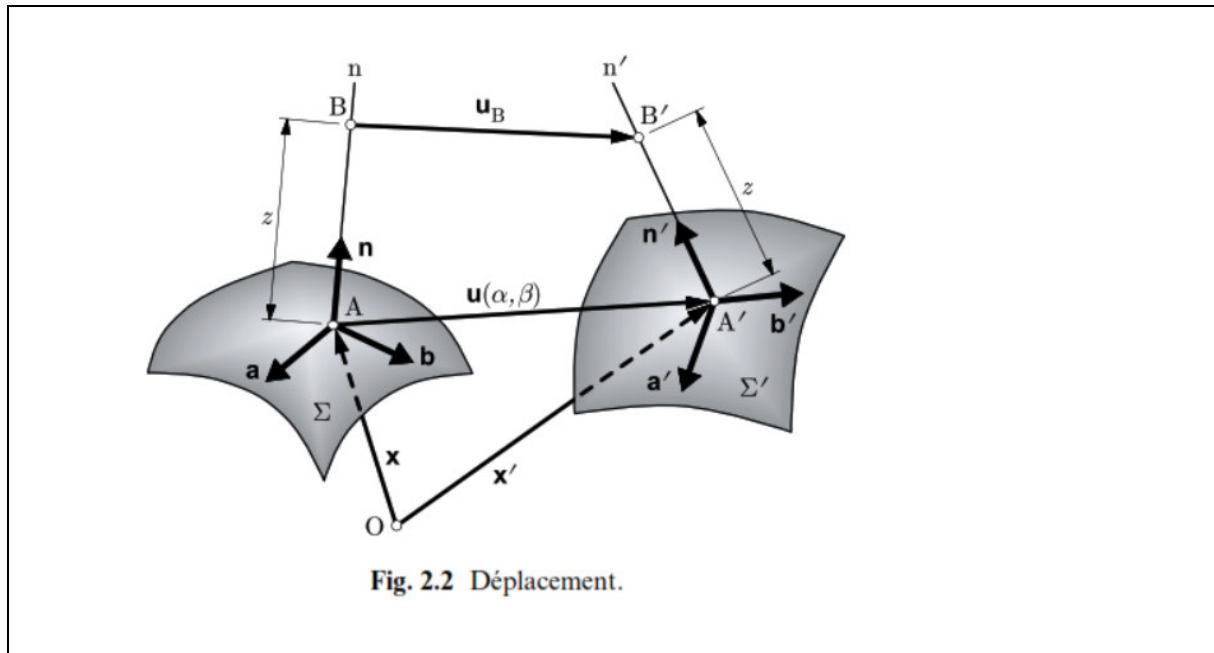
On appelle  $u, v, w$  les composantes du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  du point A de la surface moyenne  $\Sigma$  ; la composante  $w$  est souvent qualifié de déplacement transversal ou normal. L'équation paramétrique de la surface moyenne déformée  $\Sigma'$  est :

$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u} = x + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{n}$  ; elle permet de déterminer l'image  $(a', b', n')$  du repère  $(a, b, n)$ . On calcul d'abord, comme au paragraphe 1.7.2 les dérivées de  $\mathbf{x}'$  par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui fournit :

- $\mathbf{x}'_{,\alpha} = A \left( (1 + \epsilon_\alpha) \mathbf{a} + \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{b} + \theta_\alpha \mathbf{n} \right)$
- $\mathbf{x}'_{,\beta} = B \left( \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a} + (1 + \epsilon_\beta) \mathbf{b} + \theta_\beta \mathbf{n} \right)$

(Avec A et B étant les paramètres de Lamé de  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\alpha} & \epsilon_\beta &= \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\beta} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= -\frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \epsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \theta_\alpha &= \frac{u}{r_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} & \theta_\beta &= \frac{v}{r_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \end{aligned}$$



Dans les calculs qui suivent, il faut appliquer l'hypothèse de linéarisation géométriques pour que les expressions restent linéaires en les composants des déplacements ou leurs gradients.

$$A' = A (1 + \epsilon_\alpha) \text{ et } B' = B (1 + \epsilon_\beta)$$

Et permettent de calculer les vecteurs unités  $a' = x'_{,\alpha} / A'$  et  $b' = x'_{,\beta} / B'$

Puis  $n' = a' \times b'$ , on obtient en négligeant  $\epsilon_\alpha$  et  $\epsilon_\beta$  devant 1,

$$\begin{Bmatrix} a' \\ b' \\ n' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_{\alpha\beta} & \theta_\alpha \\ \epsilon_{\beta\alpha} & 1 & \theta_\beta \\ -\theta_\alpha & -\theta_\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ n \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs  $a'$  et  $b'$  sont dirigés selon les images dans  $\Sigma'$  des lignes de courbure de  $\Sigma$ . Ces images ne sont pas les lignes de courbure de la surface déformée  $\Sigma'$  et par suite,  $a'$  et  $b'$  ne sont pas perpendiculaires.

En effectuant les produits scalaires, on obtient  $n' \cdot b = -\theta_\beta$  et  $n' \cdot a = -\theta_\alpha$

Ce qui permet d'interpréter  $\theta_\beta$  et  $\theta_\alpha$  comme les composantes de la rotation de la normale  $n'$ , autour de  $a$  et  $b$ . on remarque que ces rotations ne sont pas liées qu'aux seules dérivées du déplacement  $w$ .



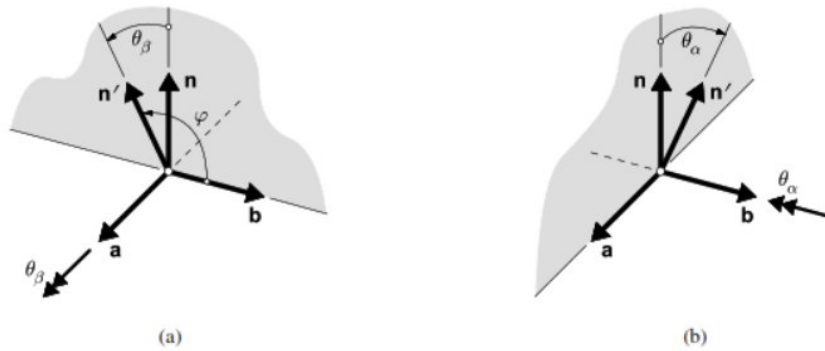


Fig. 2.3 Rotations : (a) composante  $\theta_\beta$  ( $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi) \cong \pi/2 - \varphi = -\theta_\beta \Rightarrow \theta_\beta = \varphi - \pi/2$ ); (b) composante  $\theta_\alpha$ .

Le déplacement  $\mathbf{u}_B$  du point B est donnée par :  $\mathbf{u}_B = \mathbf{u} + z (\mathbf{n}' - \mathbf{n})$

Avec  $\mathbf{n}' = -\theta_\alpha \mathbf{a} - \theta_\beta \mathbf{b} + \mathbf{n}$

On a :  $\mathbf{u}_B = u_B \mathbf{a} + v_B \mathbf{b} + w_B \mathbf{n} = u \mathbf{a} + v \mathbf{b} + w \mathbf{n} - z (\theta_\alpha \mathbf{a} + \theta_\beta \mathbf{b})$

Qui fait apparaître les composantes du champ des déplacements.

- $u_B = u - z \theta_\alpha$
- $v_B = v - z \theta_\beta$
- $w_B = w$

**Ces relations donnent le déplacement d'un point quelconque B de la coque en fonction des grandeurs propres au point correspondant A de la surface moyenne : déplacement de A, rotation de la normale en A et cote constante z. elles montrent que, parallèlement à la surface moyenne, les déplacements varient linéairement à travers l'épaisseur de la coque, ce qui exprime, en fait, la loi de conservation des normales.**

### 2.6.2 Déformations et équations cinématiques

L'image ( $a'$ ,  $b'$ ,  $n'$ ) du repère ( $a$ ,  $b$ ,  $n$ ) contient la mesure de la déformation ; cette dernière doit donc figurer dans les coefficients des relations précédentes :

#### Déformations membranaires :

Sur la première ligne de coordonnées de la surface moyenne, les longueurs d'arc en configuration initiale, puis déformée valent :

$$ds_\alpha = A d\alpha$$

$$ds'_\alpha = A' d\alpha = A (1 + \epsilon_\alpha) d\alpha$$

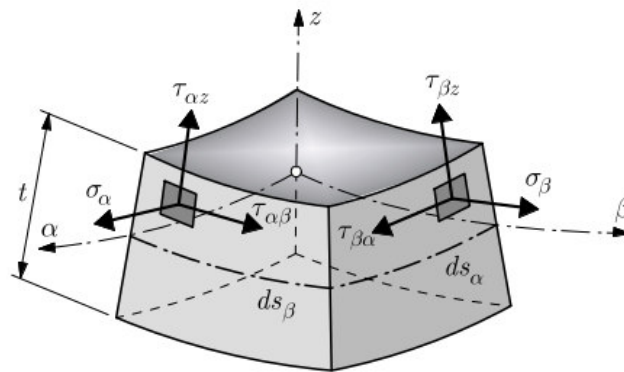
La dilatation a pour valeur  $(ds'_\alpha - ds_\alpha) / ds_\alpha = \epsilon_\alpha$

Pour le glissement on évalue la variation de l'angle droit qui se manifeste entre les vecteurs  $a'$  et  $b'$  et en linéarisant :  $a' \cdot b' =$

## 2.7 Statique

### 2.7.1 Contraintes et efforts intérieurs

Afin d'aboutir à une théorie bidimensionnelle, il faut intégrer les distributions des contraintes à travers l'épaisseur pour les remplacer par leurs résultantes équivalentes que sont les efforts intérieurs.



**Fig. 2.6** Contraintes ( $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$  : composantes de l'état plan de contrainte).



**Fig. 2.7** Efforts intérieurs : (a) membranaires ; (b) flexionnels.

Les efforts intérieurs sont subdivisés en efforts membranaires et efforts flexionnels. Ils sont définis par unité de longueur d'arc sur la surface moyenne.

Le domaine d'intégration est rectangulaire, de largeur constante unité et de hauteur  $t$ .

Efforts normaux : (N/m)	$N_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha dz \quad N_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\beta dz$
-------------------------	---

## Cours plaques et Coques

--	--

Les efforts tangentiels ( N/m)	$N_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} dz$	$N_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} dz$
--------------------------------	---	---

Les moments de flexion : ( Nm/m)	$M_{\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha} z dz$	$M_{\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\beta} z dz$
----------------------------------	---	---

Les moments de torsion ( Nm/m)	$M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} z dz$	$M_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} z dz$
--------------------------------	---	---

Les efforts tranchants (N/m)	$V_{\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha z} dz$	$V_{\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta z} dz$
------------------------------	---	---

En vertu du principe de réciprocité des contraintes tangentielles, on a :

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$$

A partir des efforts intérieurs, on peut calculer la distribution des contraintes par les formules classiques ( section rectangulaire de largeur unité et de hauteur t )

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{t} + \frac{12 M_\alpha}{t^3} z \quad \sigma_\beta = \frac{N_\beta}{t} + \frac{12 M_\beta}{t^3} z$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + \frac{12 M_{\alpha\beta}}{t^3} z$$

$$\tau_{\alpha z} = \frac{3V_\alpha}{2t} \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \quad \tau_{\beta z} = \frac{3V_\beta}{2t} \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right)$$

Vu l'hypothèse de linéarisation matérielle, les contraintes  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  et  $\tau_{\alpha\beta}$  varient linéairement, comme les déformations et on admet que les contraintes tangentiels d'efforts tranchant  $\tau_{\alpha z}$  et  $\tau_{\beta z}$  varient paraboliquement, sont maximale sur la surface moyenne ( $z=0$ ) et nulle en  $z = \pm t/2$ .

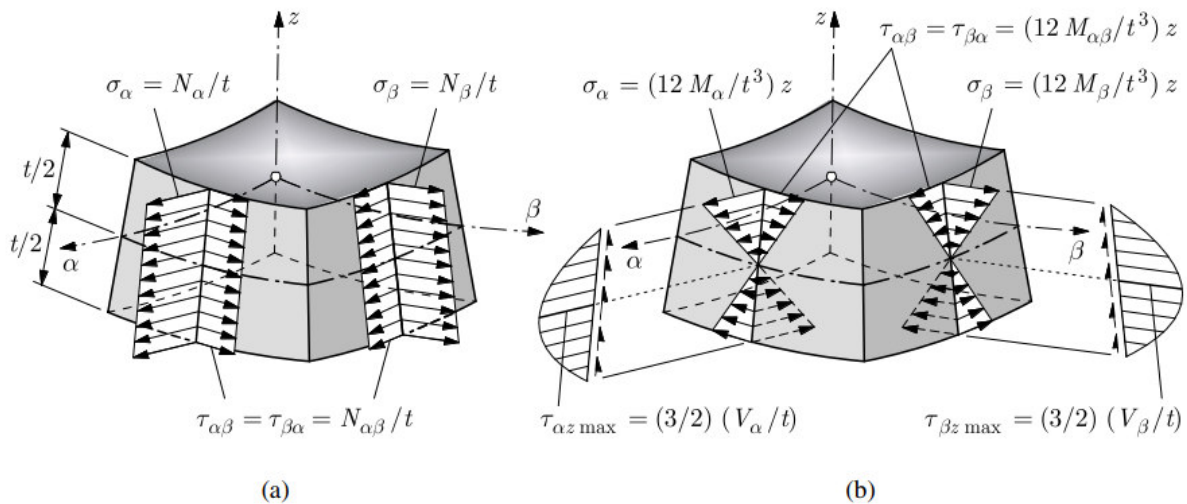


Fig. 2.8 Diagrammes des contraintes : (a) membranaires ; (b) flexionnelles.

## 2.7.2 Equilibre des équations

Pour exprimer l'équilibre, il faut procéder vectoriellement. On représente les divers vecteurs forces et moments qui s'exercent sur un élément isolé de la surface moyenne. De côté  $ds_\alpha$  et  $ds_\beta$ , on désigne par  $p_\alpha$ ,  $p_\beta$  et  $p_z$  les composantes de la force de surface  $p$  provenant de diverses charges ou actions sollicitant la coque. On se limite à l'équilibre statique. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= (N_\alpha \mathbf{a} + N_{\alpha\beta} \mathbf{b} + V_\alpha \mathbf{n}) ds_\beta & \mathbf{C}_\alpha &= (-M_{\alpha\beta} \mathbf{a} + M_\alpha \mathbf{b}) ds_\beta \\ \mathbf{F}_\beta &= (N_{\beta\alpha} \mathbf{a} + N_\beta \mathbf{b} + V_\beta \mathbf{n}) ds_\alpha & \mathbf{C}_\beta &= (-M_\beta \mathbf{a} + M_{\beta\alpha} \mathbf{b}) ds_\alpha \\ \mathbf{p} &= p_\alpha \mathbf{a} + p_\beta \mathbf{b} + p_z \mathbf{n} \end{aligned}$$

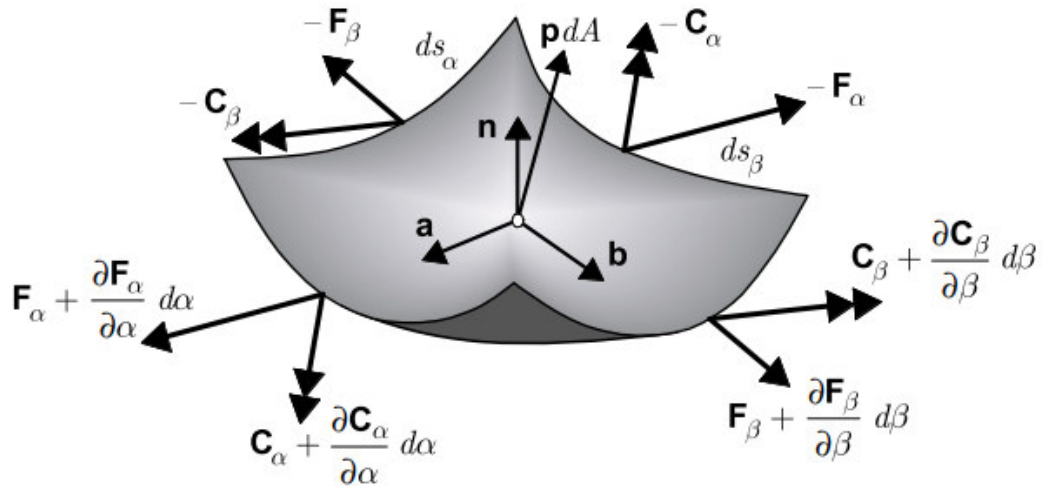


Fig. 2.9 Forces et moments sur l'élément de coque.

Equilibre statique :

## 2.8 Loi constitutive

## 2.9 Bilan des inconnues et équations

## 2.10 Conditions aux limites

### 2.10.1 Efforts de bord équivalents

### 2.10.2 Condition sur les bords

