SOLUTIONS DES EXERCICES

EXERCICES DU CHAPITRE 1

Exercice 1.1

Vitesse dans (1)

Équation de continuité entre (1) et (2) :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 \Rightarrow V_1 \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} = V_2 \cdot \pi \cdot \frac{D_2^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow V_1 = 1 \cdot \left(\frac{60}{20}\right)^2 = 9m/s$$

$$\Rightarrow V_1 = 9m/s$$

Vitesse dans (3) :

Équation de continuité entre (2) et (3) :

$$Q_2 = Q_3 \Rightarrow V_2 \cdot A_2 = V_3 \cdot A_3 \Rightarrow V_3 = V_2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2$$

$$V_3 = 1 \cdot \left(\frac{60}{40}\right)^2 = 2,25m/s$$

$$V_3 = 2,25m/s$$

Exercice 1.2

a) Équation de conservation de masse du réservoir :

$$\frac{dv}{dt} = \left(Q_{E_1} + Q_{E_2}\right) - Q_S$$

$$\upsilon = A \cdot h \qquad avec\ A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$A\frac{dh}{dt} = \left(Q_{E1} + Q_{E2}\right) - Q_s$$

$$Q_S = V_S \cdot A_S = \sqrt{2g \cdot h} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Soit :

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right) = Q_{E1} + Q_{E2} - \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi D^2}\left(Q_{E1} + Q_{E2}\right) - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$

b) Hauteur finale d'équilibre $\longrightarrow$ $\frac{dh}{dt} = 0$

$$\rightarrow \sqrt{h} = \frac{4\left(Q_{E1} + Q_{E2}\right)}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}}$$

$$h = \left[\frac{4 \cdot (5+6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,6)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}}\right]^2 = 1,60\text{m}$$

c) $$\left.\frac{dh}{dt}\right)_{h=1,5m} = \frac{4(5+6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,6^2} - \left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5}$$

$$\boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right)_{h=1,5m} = 0,00123 m/s = 1,23 \cdot 10^{-3} m/s}$$

Le plan d'eau monte à une vitesse de $1,23 \cdot 10^{-3}$ m/s.

d) $$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot D^2}\left(Q_{E1} + Q_{E2}\right) - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$

Si $Q_{E1} = Q_{E2} = 0$, on trouve le temps pour que le niveau baisse de h_0=1,5m à h_1=0,5m :

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh} \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\ dt$$

$$\rightarrow 2\left[h^{1/2}\right]_{h_0}^{h_1} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\left[t\right]_0^T$$

$$\rightarrow 2\left[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}\right] = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\ T \rightarrow \quad T = -\frac{2\left[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}\right]}{\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}}$$

$$T = -\frac{2\left[0,5^{1/2} - 1,5^{1/2}\right]}{\left(\frac{5}{60}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 33,66\ s$$

$$\boxed{T = 33,66\ s}$$

Si Q_{E1} = 5 l/s et Q_{E2} = 6 l/s, on trouve le temps pour que le niveau monte de h_0=0,5m à h_1=1,5m :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4(0,005 + 0,006)}{\pi \cdot 0,60^2} - \left(\frac{5}{60}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \sqrt{h}$$

$$dt = \frac{dh}{0,0389 - 0,0308\sqrt{h}}$$

En intégrant par méthode numérique de h=0,5m à h=1,5m :

T = 1830s

Exercice 1.3

Réservoir 1 :

Charge hydraulique à la sortie : $h_1 = 5,00m - 0,50m - 0,15m = 4,35m$

Aire de sortie : $A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,30^2}{4} = 0,071m^2$

Vitesse de sortie : $V_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,35} = 9,238 m/s$

Débit de sortie : $Q_1 = A_1 \cdot V_1 = 0,071 m^2 \cdot 9,238 m/s = 0,656 m^3/s$

Réservoir 2 :

Charge hydraulique à la sortie : $h_2 = 4,00m - 0,50m - 0,10m = 3,40m$

Aire de sortie : $A_2 = \dfrac{\pi D_2^2}{4} = \dfrac{3,14 \cdot 0,20^2}{4} = 0,031 m^2$

Vitesse de sortie : $V_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3,40} = 8,167 m/s$

Débit de sortie : $Q_2 = A_2 V_2 = 0,031 m^2 \cdot 8,167 m/s = 0,253 m^3/s$

Par conséquent, le débit du trop plein est :

$$Q_1 - Q_2 = 0,656 m^3/s - 0,253 m^3/s = 0,403 m^3/s$$

Exercice 1.4

1- Selon l'équation de continuité : $\dfrac{dS}{dt} = Q_E - Q_S$

$$Q_E = 1000 m^3/s$$

$$Q_S = 543 + 20 + 1 + 2 = 566 m^3/s$$

Donc : $\dfrac{dS}{dt} = 1000 m^3/s - 566 m^3/s = 434 m^3/s$

Le stockage en 24 heures est :

$$S = 434 m^3/s \cdot 24h \cdot 60 \min/h \cdot 60 s/\min = 37,498 \cdot 10^6 m^3$$

La variation journalière du niveau est donc :

$$\Delta h = S/A = 37,498 \cdot 10^6 m^3 / 50,0 \cdot 10^6 m^2 = 0,750 m$$

2- Volume à remplir : $v = (205m - 160m) \cdot 10,0 \cdot 10^6 m^2 = 2250 \cdot 10^6 m^3$

Le temps de remplissage est donc :

$$\Delta t = 2250 \cdot 10^6 m^3 / 434 m^3/s = 5,184 \cdot 10^6 s$$

$$soit \;\; 60 \;\; jours$$

Exercice 1.5

a) Temps de vidange : $S = \left(Q_P - Q_A\right)t_1 \quad donc \quad t_1 = \dfrac{S}{Q_P - Q_A}$

b) Temps de remplissage : $S = Q_A t_2 \quad donc \quad t_2 = \dfrac{S}{Q_A}$

c) Durée d'un cycle : $t_t = t_1 + t_2 = \dfrac{S}{Q_P - Q_A} + \dfrac{S}{Q_A} = \dfrac{S \cdot Q_P}{\left(Q_P - Q_A\right) \cdot Q_A} = S\left[\dfrac{1}{Q_A} + \dfrac{1}{Q_P - Q_A}\right]$

d) Fréquence : $f = \dfrac{1}{t_t} = \dfrac{\left(Q_P - Q_A\right)Q_A}{SQ_P}$

e) $\dfrac{\delta f}{\delta Q_A} = \dfrac{1}{S} - \dfrac{2Q_A}{SQ_P}$. La fréquence est maximum quand cette dérivée est nulle :

Donc : $\dfrac{1}{S} - \dfrac{2Q_A}{SQ_P} = 0 \quad et \quad Q_A = \dfrac{Q_P}{2}$

$donc\ Q_A = 0,50 l/s$

f) De d), avec Q_P=1 litre/seconde, $f_{\max} = \dfrac{\left(Q_P - \dfrac{Q_P}{2}\right) \cdot \dfrac{Q_P}{2}}{S \cdot Q_P} = \dfrac{Q_P}{4S} = \dfrac{0,25}{S}\ par\ seconde$

g) Pour une durée de 15 minutes entre deux démarrages, la fréquence de démarrage est 1/15min ou 1/900s. Donc $\dfrac{Q_P}{4 \cdot S} = \dfrac{1}{900s} \quad donc \quad S = \dfrac{1l/s \cdot 900s}{4} = 225\ litres$.

EXERCICES DU CHAPITRE 2

Exercice 2.1

Le volume S du réservoir est constant, donc $\dfrac{\delta S}{\delta t} = Q_E - Q_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad Q_E = Q_2 = V_2 \times \frac{\pi D^2}{4}$$

Pour calculer la vitesse de sortie appliquons Bernoulli entre les points 1 et 2

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12}$$

$$V_1 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0 \qquad donc:$$

$$\left(Z_1 - Z_2\right) = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12} - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4Q_2}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05^2} Q_2 = 509{,}3 Q_2 \qquad (2)$$

$$\Delta H_{12} = h_f\,(frottement) + h_s\,(perte\ sing.)$$

$$h_f\,(Darcy - Weissbach) = 0{,}0827 \times 0{,}02 \times 3 \times \frac{Q_2^2}{(0{,}05)^5} = 15878 Q_2^2$$

$$h_s = K\frac{V_2^2}{2g} = \left(2 \cdot 0{,}75 + 0{,}5\right) \cdot \frac{\left(509{,}3 \cdot Q_2\right)^2}{2 \cdot 9{,}81} = 26441 Q_2^2$$

$$\Delta H_{12} = 15878\ Q_2^2 + 26441 Q_2^2 = 42319\ Q_2^2$$

$$Selon\ (1)\ :\ 13220{,}3\ Q_2^2 + 42319\ Q_2^2 = 1$$

$$Q_2 = Q_E = 4{,}2 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

Utilisant Q_2 dans (2) : $V_2 = 509{,}3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3} = 2{,}16\ m/s$

b) Équation de continuité : $A\dfrac{dh}{dt} = Q_E - Q_2$

Bernoulli entre A et le point 2 :

$$H_A = H_2 + pertes$$
$$pertes = h_s\left(coude\right) + h_f\left(\,frottement\right)$$

$$h_s = K_c\frac{V^2}{2g} = 0,75\cdot\frac{2,16^2}{2\cdot 9,81} = 0,178m$$

$$L = 1 + 0,5 + \frac{0,25}{2} = 1,625m$$

$$h_f = 0,0827\, fL\frac{Q^2}{d^5} = 0,0827\cdot 0,2\cdot 1,625\cdot\frac{\left(4,2\cdot 10^{-3}\right)^2}{0,05^5} = 0,1517m$$

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_s + h_f$$

où $V_A = V_2 = V\ et\ P_2 = 0$

En prenant le point 2 pour référence de cote : $Z_2 = 0\ et\ Z_A = 1,5\ m$

$$1,5 + \frac{P_A}{\rho\, g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} + h_s + h_f$$

$$\frac{P_A}{\rho\, g} = h_s + h_f - 1,5$$

$$P_A = \rho g\left(h_s + h_f - 1,5\right) = 1000\cdot 9,81\cdot\left(0,178 + 0,1517 - 1,5\right) = -11470Pa$$

$$\boxed{P_A = -11,48\ kPa}$$

c) Bernoulli entre points 1 et B :

$$\frac{P_1}{\rho g}+Z_1+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_B}{\rho g}+Z_B+\frac{V_B^2}{2g}+h_s+h_f$$

Où $\quad V_B=V\ et\ \frac{V_1^2}{2g}=0,y_1=y_B,P_1=P_{ain}=0$

Donc : $\quad 0=\frac{P_B}{\rho \mathrm{g}}+\frac{V^2}{2g}+h_s+h_f$

$$P_B=-\rho g\left(\frac{V^2}{2g}+h_s+h_f\right)$$

$$h_s=0,50\cdot\frac{2{,}16^2}{2\cdot 9{,}81}=0{,}119m$$

$$h_f=0{,}0827\cdot 0{,}020\cdot 0{,}75\cdot\frac{\left(4{,}2\cdot 10^{-3}\right)^2}{0{,}05^5}=0{,}070m$$

$$P_B=-1000\cdot 9{,}81\cdot\left(\frac{2{,}16^2}{2\cdot 9{,}81}+0{,}119+0{,}070\right)=-4{,}19kPa$$

$$\boxed{P_B=-4{,}19\ kPa}$$

d) Négligeant les pertes : $\begin{cases}H_A=H_2\\H_B=H_1\end{cases}$

$$Z_A+\frac{P_A}{\rho g}=0;\quad donc\ \ P_A=-\rho g Z_A=-1000\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5=-14{,}72kPa$$

$$\begin{cases}P_A=-14{,}72kPa\\P_B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} Erreur\ sur\ P_A : \quad \dfrac{-14,72-(-11,48)}{-11,48} = 0,28 \rightarrow \boxed{28\%} \\ Erreur sur P_B : \quad \dfrac{0-4,2}{4,2} = -1 \quad \boxed{100\%} \end{cases}$$

Hypothèse non raisonnable car les erreurs sont excessives et P_B ne peut pas être zéro.

Exercice 2.2

1) $$\in / d = \frac{0,16}{205} = 7,8 \cdot 10^{-4} \qquad 10^{-6} < \frac{\in}{d} < 10^{-2}$$

Calcul du nombre de Reynolds (Re) :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,205^2}{4} = 0,033 m^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,033 m^3 / s}{0,033 m^2} = 1,0 m / s$$

$$\nu = 1,520 \cdot 10^{-6} m^2 / s \quad \text{à } 5^{\circ}\text{C (tableau 2.1)}$$

Selon l'équation (2.22) : $$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,205}{1,52 \cdot 10^{-6}} = 1,349 \cdot 10^5$$

$$5.10^3 < R_e < 10^8$$

Selon (2.23a) :

$$f = 0,0055 \left[1 + \left[2 \cdot 10^4 \cdot \frac{\in}{d} + \frac{10^6}{R_e} \right]^{1/3} \right]$$

$$f = 0,0055 \left[1 + \left[2 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,16}{205} + \frac{10^6}{1,349 \cdot 10^5} \right]^{1/3} \right] = 0,0213$$

Perte de charge sur 1000 m (Darcy-Weissbach, équation 2.21) :

$$h_f = 0,0827 \cdot f \cdot L \cdot \frac{Q^2}{d^5}$$

$$h_f = 0,0827 \cdot 0,0213 \cdot 1000 \cdot \frac{\left(33 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(0,205\right)^5} = 5,30m$$

2) Formule de Hazen-Williams (2.26) :

$$h_f = 10,675L\left(\frac{Q}{C_{HW}}\right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

$$C_{HW}^{1,852} = \frac{10,675L \cdot Q^{1,852}}{h_f \cdot D^{4,87}}$$

$$C_{HW} = \left[\frac{10,675 \cdot 1000 \cdot 0,033^{1,852}}{5,30 \cdot 0,205^{4,87}}\right]^{1/1,852} = 129,5$$

$$\boxed{C_{HW} = 129,5}$$

Exercice 2.3

1) Bernoulli entre le plan d'eau (point 1) et (B) :

$$H_1 = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \ pertes$$

Pertes = perte singulière à l'entrée (h_s) + perte de frottement (h_f)

$$h_s = K\frac{V^2}{2g} \ avec\ K = 0,50\ (\ figure\ \ 2.9)$$

Selon Darcy-Weissbach (2.21) : $h_f = 0,0827 \cdot f \cdot L\dfrac{Q^2}{D^5} = f \cdot \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$

(N.B. : la seconde forme de 2.21 est obtenue en utilisant Q=AV=(πD²/4)V, avec les valeurs numériques de π et de g).

$$e = 0,12mm \rightarrow \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,12}{600} = 2.10^{-4} \qquad 10^{-6} < \frac{\varepsilon}{D} < 10^{-2}$$

Selon le tableau 2.1, ν = 1,142 x 10^{-6}m²/s.

$$H_1 = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + K\frac{V^2}{2g} + \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}0,0055\left[1+\left(2\cdot 10^4\frac{\varepsilon}{D}+\frac{10^6\upsilon}{V\cdot d}\right)^{1/3}\right]$$

$$\rightarrow 20 = 18 + \frac{V^2}{2\cdot 9,81}\left[1+0,50+\frac{2000}{0,6}\cdot 0,0055\left[1+\left(2\cdot 10^4\cdot\frac{0,12}{600}+\frac{10^6\cdot 1,142\cdot 10^{-6}}{V\cdot 0,6}\right)^{1/3}\right]\right]$$

$$\rightarrow 2 = \frac{V^2}{19,62}\left[19,83 + 18,33\left(4+\frac{1,90}{V}\right)^{1/3}\right]$$

Par itérations successives, on obtient : V = 0,856m/s

$$Q = V\cdot\pi\frac{D^2}{4} = 0,856\cdot 3,14\cdot\frac{0,6^2}{4} = 0,242\,m^3/s$$

$$\boxed{Q = 0,242\,m^3/s}$$

Exercice 2.4

1) Puissance de la turbine (équation 2.16) : $P = g\rho Q H_T$
Avec un rendement de 70% :

$$P = 0,7\cdot 1000\cdot 9,81\cdot 1\cdot H_T = 6867\cdot H_T$$

$$\frac{\in}{D} = \frac{0,1}{300} = 3,3\cdot 10^{-4}$$

D'après le tableau 2.1, $\nu = 10^{-6}$ m²/s à 20°C.

D'après (2.22), le nombre de Reynolds est :

$$R_e = \frac{V\cdot D}{\upsilon} = \frac{4\cdot Q}{\pi\cdot D\cdot\upsilon} = \frac{4\cdot 1}{\pi\cdot 0,3\cdot 10^{-6}} = 4,24\cdot 10^6$$

Selon le diagramme de Moody, $f = 0,015$

Bernoulli entre le début de la conduite et la turbine (avec K=0,04 pour prise d'eau arrondie) :

$$H_T = 60 - 0,0827\frac{Q^2}{D^4}(1+0,04) - 0,0827\ f\cdot L\cdot\frac{Q^2}{D^5}$$

$$H_T = 60 - \frac{0,0827 \cdot 1^2 \cdot 1,04}{0,3^4} - 0,0827 \cdot 0,015 \cdot 50 \cdot \frac{1^2}{0,3^5} = 23,85m$$

$$P = 6867 \cdot H_T = 6867 \cdot 23,85 = 163826\,W = 163,8kW$$

$$recette\ annuelle = 4 \times 10^{-2} \times 24 \times 365 \times 163,8 = 57396\$$$

Exercice 2.5

D'après Hazen-Williams (2.40) : $h_f = L\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$

Choisissant (tableau 2.3) : $C_{HW} = 100$

D'après les données, $h_f = 3\,m/1000\,m$

$$D = \left[L\left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{hf}\right]^{1/4,87}$$

$$D_{AB} = \left[1000\left[\frac{3,59}{100}\right]^{1,852} \cdot \frac{\left(40 \cdot 10^{-3}\right)^{1,852}}{3}\right]^{1/4,87} = 0,273m$$

$$\boxed{D_{AB} = 0,273m}$$

$$D_{BC} = \left[1000\left(\frac{3,59}{100}\right)^{1,852} \cdot \frac{\left(30 \cdot 10^{-3}\right)^{1,852}}{3}\right]^{1/4,87} = 0,245m$$

$$\boxed{D_{BC} = 0,245m}$$

$$D_{CD} = \left[1000\left(\frac{3,59}{100}\right)1,852 \frac{\left(20 \cdot 10^{-3}\right)^{1,852}}{3}\right]^{1/4,87} = 0,21m$$

$$\boxed{D_{CD} = 0,21\,m}$$

$$D_{DE}=\left[1000\left(\frac{3,59}{100}\right)^{1,852}\cdot\frac{\left(10\cdot10^{-3}\right)^{1,852}}{3}\right]^{1/4,87}=0,161m$$

$$\boxed{D_{DE}=0,161m}$$

Exercice 2.6

Le long de la conduite :

$$H_1+H_P-h_f-h_s-\frac{V^2}{2g}=Z_2$$

Donc en considérant $\frac{V^2}{2g}$ comme une perte singulière h_s où k = 1

$$H_P=Z_2-H_1+h_f+h_s=30m-20m+h_f+h_s=10m+h_f+h_s$$

La perte par frottement h_f est donnée par l'équation 2.26 avec L = 7(30m) = 210m :

$$h_f=10,675\cdot210m\cdot\left(\frac{0,025}{130}\right)^{1,852}\cdot\frac{1}{0,15^{4,87}}=3,027m$$

Les pertes singulières sont dues aux 6 coudes et à la prise d'eau, selon l'équation 2.31 :

$$V=Q/A=\frac{0,025m^3/s}{\left(\frac{\pi\cdot0,15^2}{4}\right)}=1,4147m/s$$

$$h_s=\left(6\cdot0,75+0,04+1\right)\cdot\frac{1,4147^2}{2\cdot9,81}=0,565m$$

Donc $h_P=10m+3,027m+0,565m=13.59m$

Selon l'équation 2.26, la puissance est :

$$P=\rho gQH_P=1000\cdot9,81\cdot0,025\cdot13,59=3332.95W$$

Exercice 2.7

Le débit dans chaque tuyau est Q/2. Utilisant l'équation 2.40 :

$$h_{f_1} = L\left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \cdot \frac{\left(Q/2\right)^{1,852}}{d^{4,87}} = h_{éq} = L_{éq}\left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{éq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(Q/2\right)^{1,852}}{d^{4,87}} = \frac{Q^{1,852}}{D_{éq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow D_{éq}^{4,87} = 2^{1,852} \cdot d^{4,87} \Rightarrow D_{éq} = \left[2^{1,852} \cdot 0,61^{4,87}\right]^{1/4,87} = 0,794m$$

$$\boxed{D_{éq} = 0,794m}$$

Exercice 2.8

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 150l/s$$

$$h_{f_1} = h_{f2} = h_{f3}$$

D'après Hazen-Williams (2.40) :

$$L_1\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = L_2\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} = L_3\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q_3^{1,852}}{D_3}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \qquad \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \dfrac{\left(Q - Q_1 - Q_3\right)^{1,852}}{D_2^{4,87}} \\ \dfrac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \dfrac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} = \frac{\left(Q - Q_1 - \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_1\right)^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1^{1,852}}{0,305^{4,87}} = \frac{\left(0,15 - Q_1 - 0,592 \cdot Q_1\right)^{1,852}}{0,205^{4,87}} \Rightarrow Q_1^{1,852} = \left(\frac{0,305}{0,205}\right)^{4,87} \left(0,15 - 1,592 Q_1\right)^{1,852}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2,84\left(0,15 - 1,592 Q_1\right) \Rightarrow Q_1 = 0,0772 m^3 / s$$

$$\boxed{Q_1 = 77,2\, l / s}$$

$$Q_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_1 = \left(\frac{205}{305}\right)^{4,87/1,852} \cdot 77,2 \cdot 10^{-3} = 0,0272 m^3 / s$$

$$\boxed{Q_2 = 27,2\, l / s}$$

$$Q_3 = Q - Q_1 - Q_2 = 150 - 77,2 - 27,2 = 45,6\, l / s$$

$$\boxed{Q_3 = 45,6\, l / s}$$

Exercice 2.9

L'équation de Hazen-Williams est utilisée pour calculer les pertes par frottement.

On obtient d'abord la conduite équivalente pour les 3 conduites en parallèle :

$$h_{f_2} = h_{f_3} = h_{f_4} = h_{eq_1}$$

$$\Rightarrow L_2 \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,84}} = L_3 \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,84}} = L_4 \frac{Q_4^{1,852}}{D_4^{4,84}} = L_{eq_1} \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,84}}$$

Pour $L_{eq_1} = 1500 m$

$$\begin{cases} Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 \\ Q_2 = \left(\dfrac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_3 \\ Q_4 = \left(\dfrac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852} \cdot Q_3 \end{cases} \Rightarrow \quad Q = \left[1 + \left(\dfrac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\dfrac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852}\right] Q_3$$

$$L_3 \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} = L_{eq_1} \frac{Q^{1,852}}{D_{eq_1}^{4,87}} \Rightarrow D_{eq_1}^{4,87} = \frac{D_3^{4,87}}{Q_3^{1,852}} \cdot Q^{1,852}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1}^{4,87} = \frac{D_3^{4,87}}{Q_3^{1,852}} \cdot \left[1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852}\right]^{1,852} \cdot Q_3^{1,852}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1} = D_3 \left[1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{D_4}{D_3}\right)^{4,87/1,852}\right]^{1,852/4,87}$$

$$\Rightarrow D_{eq_1} = 0,205 \left[1 + \left(\frac{0,305}{0,205}\right)^{4,87/1,852} + \left(\frac{0,250}{0,205}\right)^{4,87/1,852}\right]^{1,852/4,87}$$

$$D_{eq_1} = 0,462m \quad \Rightarrow \boxed{D_{éq_1} = 462mm}$$

Pour les trois conduites en série ainsi obtenues :

$$h_{f_1} + h_{leq_1} + h_{f_5} = h_{eq}$$

$$L_1 \cdot \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_{eq_1} \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{eq_1}^{4,87}} + L_s \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_5^{4,87}} = L \left(\frac{3,59}{C_{Hw}}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_{eq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{D_1^{4,87}} + \frac{L_{eq_1}}{D_{eq_1}^{4,87}} + \frac{L_s}{D_5^{4,87}} = \frac{L}{D_{eq}^{4,87}}$$

$$\Rightarrow D_{eq} = \left[\frac{L}{\frac{L_1}{D_1^{4,87}} + \frac{L_{eq_1}}{D_{eq_1}^{4,87}} + \frac{L_5}{D_5^{4,87}}} \right]^{1/4,87}$$

où $L_1 = L_5 \; et \; D_1 = D_5$

$$\Rightarrow D_{eq} = \left[\frac{3500}{2 \cdot \frac{1000}{0,51^{4,87}} + \frac{1500}{0,462^{4,87}}} \right]^{1/4,87} = 0,486m$$

$$\boxed{D_{eq} = 486mm}$$

Exercice 2.10

$$Q_3 = Q_2 + Q_1 \quad et \quad Q_4 = Q_3$$

Procédant par tâtonnement, supposons que P_I^*=35 m

$$h_1 = Z_1 - P_I^* = 60 - 35 = 25 \; m \qquad D_1 = 90cm$$
$$h_2 = Z_2 - P_I^* = 40 - 35 = 5m \qquad D_2 = 60cm$$

$$h_3 = P_I^* - Z_3 = 35 - 20 = 15 \; m$$

$$j_1 = \frac{h_1}{L_1} = \frac{25}{10000} = 0,0025 \qquad D_1 = 90cm$$

$$j_2 = \frac{h_2}{L_2} = \frac{5}{10000} = 0,0005$$

Exprimant Q d'après Hazen-Williams (équation 2.40) :

$$Q=\left[\frac{hD^{4,87}}{L\left(\dfrac{3,59}{C_{HW}}\right)^{1,852}}\right]^{1/1,852}$$

$$\begin{cases} Q_1 = 831\,l/s \\ Q_2 = 120\,l/s \end{cases}$$
$$Q_1+Q_2=951 l/s$$

L'élargissement de D_3 à D_4 produit une perte singulière (équation 2.32) :

$$h_s = 0,0827\,K\,\frac{Q_3^2}{D_3^4} \quad \text{avec (équation 2.34) : } K=\left[1-\left(\frac{D_3}{D_4}\right)^2\right]^2$$

Les pertes par frottement dans les sections 3 et 4 sont obtenues par l'équation 2.40. Puisque $L_3 = L_4$, on peut écrire :

$$h_f = L_3\cdot\left(\frac{3,59}{C_{HW}}\right)^{1,852}\cdot\ Q_3^{1,852}\cdot\left(\frac{1}{D_3^{4,87}}+\frac{1}{D_4^{4,87}}\right)$$

$$h_3 = 15m = 0,0827\left[1-\left(\frac{0,9}{1}\right)^2\right]^2\cdot\frac{Q_3^2}{0,9^4}+5000\cdot\left(\frac{3,59}{100}\right)^{1,852}\cdot\left[\frac{1}{0,9^{4,87}}+\frac{1}{1^{4,87}}\right]\cdot Q_3^{1,852}$$

$$\Rightarrow 15 = 4,55\cdot 10^{-3}Q_3^2+28,157Q_3^{1,852}$$

$$\Rightarrow Q_3 = 712\,l/s$$

Comme $Q_3 < \left(Q_1+Q_2\right)$, supposons une nouvelle valeur $P_I^* = 33\ m$ et recalculons :

$$h_1 = 60-33 = 27m \quad\rightarrow\quad j_1=\frac{h_1}{L_1}=27/10000=0,0027$$

$$h_2 = 40-33 = 7m \rightarrow j_2=\frac{h_2}{L_2}=7/10000=0,0007$$

$$h_3 = 33-20=13m$$

Hazen-Williams $\begin{cases} Q_1 = 875\,l/s \\ Q_2 = 145\,l/s \end{cases}$

$$Q_1+Q_2=1020 l/s$$

$$h_3 = 4,55.10^{-3}\ Q_3^2+28,157\ Q_3^{1,852}=13m$$

$$\Rightarrow Q_3 = 659\,l/s$$

$$Q_3 \;<\; Q_1 + Q_2$$

On doit augmenter la valeur de P_I

Recalculons en supposant que $P_I^* = 37m$

$$h_1 = 60 - 37 = 23m \rightarrow Q_1 = 792\,l/s$$
$$h_2 = 3\,m \rightarrow Q_2 = 100\,l/s$$
$$h_3 = 17\,m \rightarrow Q_3 = 761\,l/s$$
$$Q_1 + Q_2 = 892l/s$$
$$Q_3 \;<\; Q_1 + Q_2$$

Essayons $P_I^* = 45\,m$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$
$$h_1 = 60 - 45 = 15m \rightarrow j_1 = \frac{1,5}{1000} \rightarrow Q_1 = 650\,l/s$$
$$h_2 = 45 - 40 = 5m \rightarrow j_2 = \frac{0,5}{1000} \rightarrow Q_2 = 122\,l/s$$
$$h_3 = 45 - 20 = 25m \rightarrow Q_3 = 937,8\,l/s$$
$$Q_2 + Q_3 = 1060l/s$$
$$Q_1 < \; Q_2 + Q_3$$

Avec $P_I^* = 42\,m$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = 60 - 42 = 18m \rightarrow Q_1 = 700\,l/s \\ h_2 = 42 - 40 = 2m \rightarrow Q_2 = 70\,l/s \\ h_3 = 42 - 20 = 22m \rightarrow Q_3 = 875\,l/s \end{array}\right\} \quad Q_1 \;<\; Q_2 + Q_3$$

Avec $P_I^* = 40,5\,m$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = 19,5m \rightarrow Q_1 = 750\,l/s \\ h_2 = 0,5m \rightarrow Q_2 = 35\,l/s \\ h_3 = 20,5m \rightarrow Q_3 = 842\,l/s \end{array}\right\} \quad Q_1 \;<\; Q_2 + Q_3$$

Le calcul converge et on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_1 = 750\, l/s \\ Q_2 = 35\, l/s \\ Q_3 = 715\, l/s \end{array}}$$

Exercice 2.11

Conduite 4-3 :

Perte de charge par frottement (2.26) :

$$h_{f\,43} = 10,675 \cdot 500m \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{1,852} \cdot \frac{1}{2,44^{4.87}} = 2,065m$$

Niveau au point 3 : H_3 = 27,0m + 2,065m = 29,065m

La conduite 4-3 est donc sous charge et une légère inondation se produit au point 3.

Conduite 3-1 :

$$h_{f\,31} = 10,675 \cdot 100m \cdot \left(\frac{6}{100}\right)^{1,852} \cdot \frac{1}{1,37^{4,87}} = 1,258m$$

Niveau au point 1 : $H_1 = H_3$ + 1,258m = 30,32m

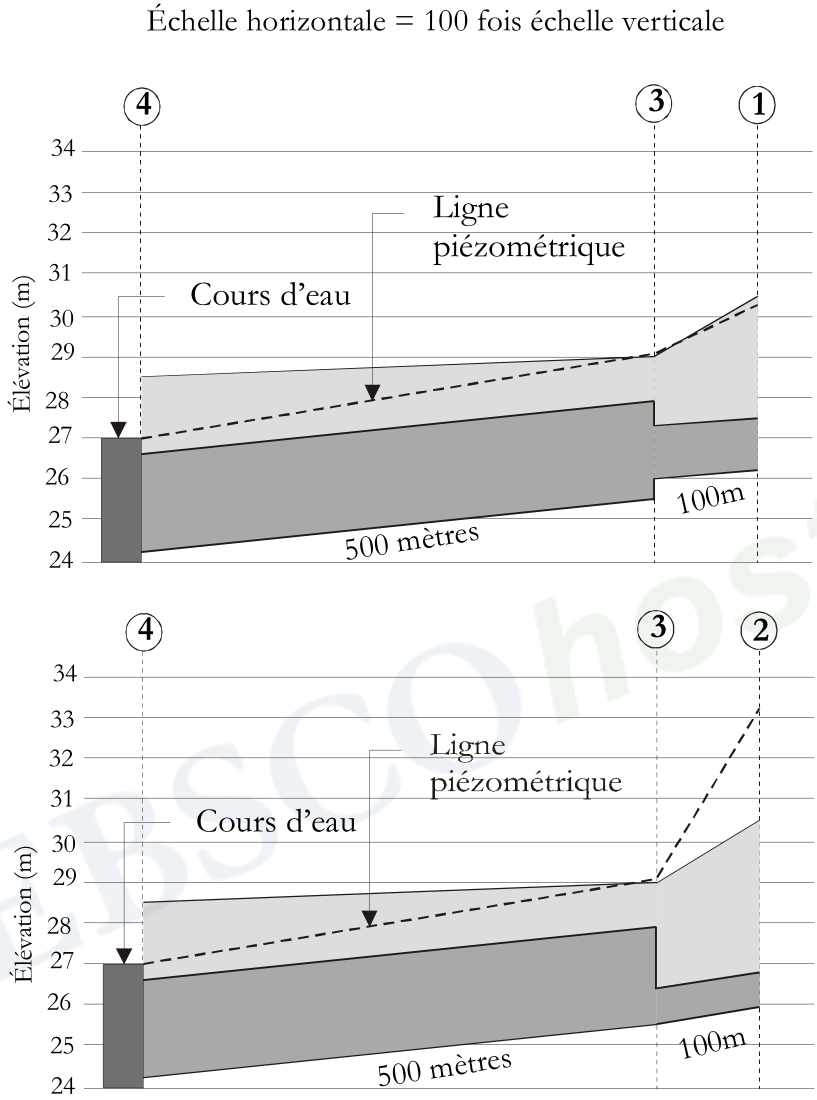
Il y a donc mise en charge au point 1, mais pas d'inondation.

Conduite 3-2 :

$$h_{f\,32} = 10,675 \cdot 100m \cdot \left(\frac{4}{100}\right)^{1,852} \cdot \frac{1}{0,915^{4,87}} = 4,239m$$

Niveau au point 2 : $H_2 = H_3$ + 4,239m = 33,30m

Il y a mise en charge et inondation au point 2.



Exercice 2.12

1) Équation de continuité : $$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s \qquad \text{(a)}$$

2) L'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + f\,\frac{L_t}{d}\,\frac{V^2}{2g}$$

$$h + H_r = \frac{V_s^2}{2g}\left(1 + f\,\frac{L_t}{d}\right)$$

et $$V_s = \left[2g\,\frac{(h+H_r)}{1 + f\,\dfrac{L_t}{d}}\right]^{1/2}$$

3) La section de la conduite en 2 est $A_s = \dfrac{\pi d^2}{4}$. Par ailleurs $Q_s = V_s A_s$. Donc):

$$Q_s = A_s V_s = \frac{\pi d^2}{4}\cdot\left[\frac{2g(h+H_r)}{1 + f\,\dfrac{L_t}{d}}\right]^{1/2}$$

4) $$\frac{dS}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4}\left[\frac{2g(h+H_r)}{1 + f(L_t/d)}\right]^{1/2}$$

En posant $dS = \dfrac{\pi D^2}{4}dh$, on obtient :

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\left[\frac{2g(h+H_r)}{1 + f(L_t/d)}\right]^{1/2}$$

5) On pose $H = h + H_r$, . Avec $dH = dh$:

$$\frac{dH}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\left[\frac{2gH}{1 + f(L_t/d)}\right]^{1/2}$$

6) $$\frac{dH}{H^{1/2}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\left[\frac{2g}{1 + f(L_t/d)}\right]^{1/2} dt$$

$$\int\frac{dH}{H^{1/2}} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\left[\frac{2g}{1 + f(L_t/d)}\right]^{1/2}\cdot t_{vidange}$$

$$2\cdot\left(\sqrt{h_0+H_r}-\sqrt{H_r}\right)=\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot\left[\frac{2g}{1+f\left(L_t/d\right)}\right]^{1/2}\cdot t_{vidange}$$

Donc :

$$t_{vidange}=\sqrt{2}\left(\frac{D}{d}\right)^2\cdot\left[\frac{1+f\left(L_t/d\right)}{g}\right]^{1/2}\cdot\left(\sqrt{h_0+H_r}-\sqrt{H_r}\right)$$

(j)

7) Avec les données numériques :

$$t_{vidange}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{100}{1}\right)^2\cdot\left[\frac{1+0,02\left(500/1\right)}{9,81}\right]^{1/2}\cdot\left(\sqrt{7+9}-\sqrt{9}\right)$$

$$t_{vidange}=14975s \quad ou \quad 4,16h$$

8) Si $h_f = 0$,

$$t_{vidange}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{100}{1}\right)^2\left[\frac{1}{9,81}\right]^{1/2}\cdot\left(\sqrt{7+9}-\sqrt{9}\right)=4515s \quad ou \quad 1,25h$$

9) Si Q_e et Q_s sont constants :

$$dh=\frac{4}{\pi D^2}\left(Q_e-Q_s\right)dt$$

En intégrant :

$$\left[h\right]_{h_0}^{h_1}=\left[\frac{4}{\pi D^2}\left(Q_e-Q_s\right)t\right]_0^{T_r}, \quad \text{soit} \quad \Delta h=\frac{4}{\pi D^2}\left(Q_e-Q_s\right)T_r$$

D'où :

$$T_r=\frac{\Delta h\cdot\pi\cdot D^2}{4\cdot\left(Q_e-Q_s\right)}$$

10) Avec les données numériques :

$$T_r=\frac{7\cdot\pi\cdot 100^2}{4\cdot\left(5-1\right)}=13744s \quad ou \quad 3,82h$$

EXERCICES DU CHAPITRE 3

Exercice 3.1

D'après (3.6) n_s =2500· $0{,}050^{0,5}$ / $25^{0,75}$ = 50
D'après la figure 3.9, il faut une pompe à aspiration double
D'après la figure 3.10, le rendement est de 78%

Exercice 3.2

D'après (3.6) n_s = 1500 · $0{,}60^{0,5}$ / $8{,}0^{0,75}$ = 244
D'après la figure 3.9, il faut une pompe axiale
D'après la figure 3.10, le rendement est de 79%

Exercice 3.3

D'après (3.6) n_s = 1500 · $0{,}20^{0,5}$ / $50{,}0^{0,75}$ = 36
D'après la figure 3.9, il faut une pompe radiale
D'après la figure 3.10, le rendement est de 87%

Exercice 3.4

Pertes : h_f (frottement, équation 2.40)

$$h_f = L\left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$$

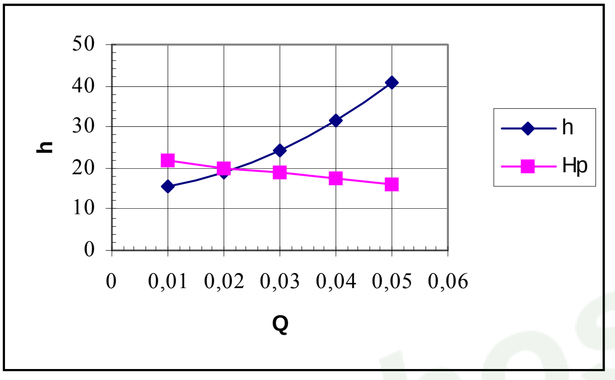
(1) * Avant réhabilitation : $C_{Hw} = 70$, $L = 6000m$; $D = 0,315m$

$$h_f = 6000\cdot\left(\frac{3,59}{70}\right)^{1,852} \cdot\frac{1}{0,315^{4.87}}\cdot Q^{1,852} = 6797\cdot Q^{1,852}$$

$$H_t = 14,0m + 6796\cdot Q^{1,852}$$

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
hf	1,34	4,85	10,28	17,51	26,47
H_t	15,34	18,85	24,28	31,51	40,47

En superposant la charge H_t à la courbe caractéristique de la pompe H_p :

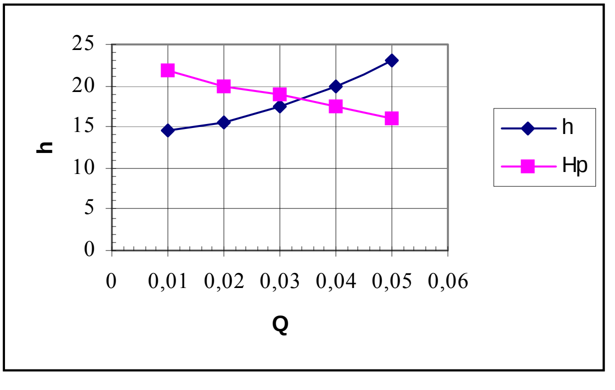


Le point de fonctionnement est : Q = 0,022m³/s (22 litres/seconde), avec h = 20,0m

(2) *Après réhabilitation : $C_{Hw} = 150\,;\, L = 6000m;\, D = 0,295m$

$h_f = 2282 \cdot Q^{1,852}$ $\qquad H_t = 14,0m + h_f$

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
hf	0,45	1,63	3,45	5,88	8,89
h	14,45	15,63	17,45	19,88	22,89



Point de fonctionnement : Q = 0,034m³/s (34 litres/seconde), H = 18m

Exercice 3.5

5 pompes en parallèle : même perte de charge

$$Q_{éq} = 5Q$$

$$H_{éq} = 20 - 0,09 \cdot \left(\frac{Q_{eq}}{5}\right)^2$$

$$\boxed{H_{éq} = 20 - 0.0036\, Q^2}$$

5 pompes en série : même débit et

$$h_{péq} = \sum h_{pi} = 5h_p$$

$$Q_{éq} = Q$$

$$h_{éq} = 5 \cdot (20 - 0,09\, Q^2)$$

$$\boxed{h_{éq} = 100 - 0,45\, Q^2}$$

Exercice 3.6

1) Selon l'équation 2.40

$$h_f = L\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}}$$

$$L = 6000m\,; \quad C_{HW} = 150\,; \quad D = 0,510m$$

$$h_f = 6000 \cdot \left(\frac{3,59}{150}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{0,510^{4,87}} = 158,56 \cdot Q^{1,852}$$

$$H_t = 14,0m + 158,56Q^{1,852}$$

Courbe caractéristique de la conduite (CCC)

Q	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
$\mathbf{H_t}$	14,03	14,11	14,24	14,41	14,63	14,88	15,17	15,50	15,86

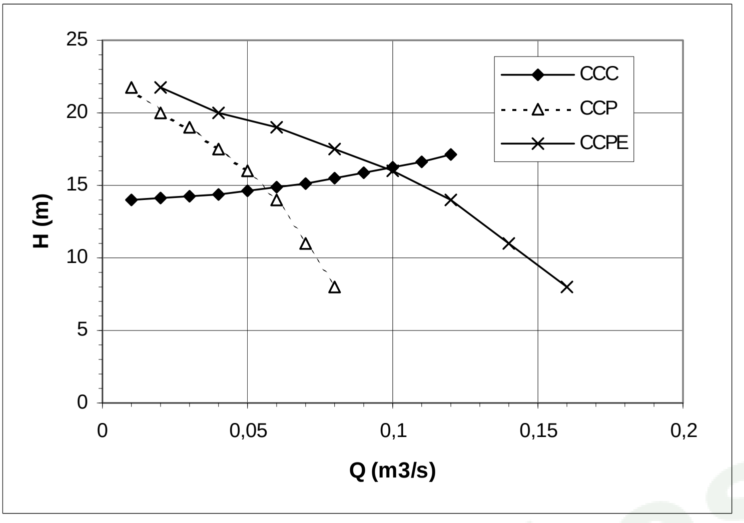
Courbe caractéristique de la pompe équivalente pour 2 pompes en parallèle : (CCPE)

Q(l/s)	20	40	60	80	100	120	140	160
Hp(m)	21,75	20	19	17,5	16	14	11	8

Donc, le point de fonctionnement pour deux pompes en parallèle est :

Q = 99,5 litres/seconde et H_p = 16,2m.

Pour chaque pompe : Q = 49,8 l/s et H_p = 16,2m.



2) Par l'équation 3.5 :

$$P = \frac{9,81.Q.H}{\eta}$$

La courbe de rendement de la pompe nous indique que pour Q = 50 l/s

$$\eta = 0,82 = 82\%$$

$$P_{absorbée} = \frac{9,81 \cdot 0,0498 \cdot 16,2}{0,82} = 9,65\,kW \quad par\ chacune\ des\ pompes$$

Exercice 3.7

Négligeant les pertes singulières :

Selon (2.40) : $h_f = 6000 \cdot \left(\frac{3,59}{150}\right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{0,51^{4,87}} = 158,57 \cdot Q^{1,852}$

Pompes en série : $Q_1 = Q_2 = Q$, $H_{tot} = H_1 + H_2$

Courbe caractéristique de la conduite (CCC) :

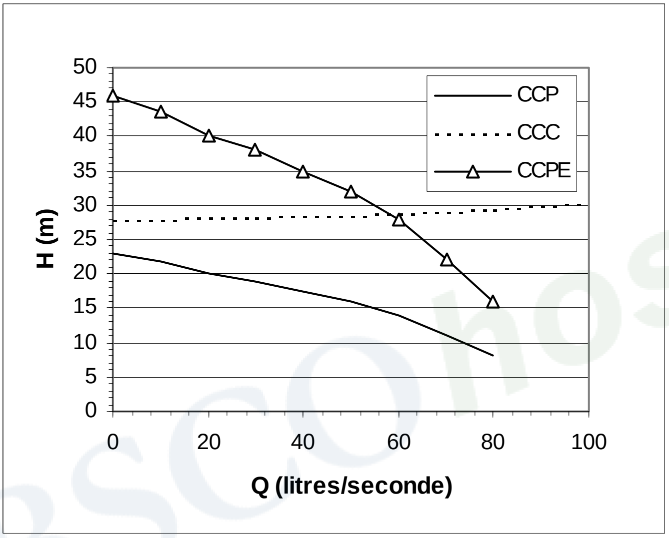
Q(l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
H (m)	28	28,03	28,11	28,24	28,41	28,62	28,87	29,15	29,47	29,83	30,23

Courbe caractéristique de la pompe équivalente (CCPE) :

Q(l/s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
H (m)	46	43,5	40	38	35	32	28	22	16

Point de fonctionnement des 2 pompes : Q = 58 l/s, H = 28,5m.
Pour chaque pompe : Q = 58 l/s, H = 14,25m.
Avec un rendement de 80%, (voir courbe de rendement)

$$P = \rho g Q H_p / \eta = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,058 \cdot 14,25 / 0,8 = 10135W, \quad soit \quad 10,14kW$$



Exercice 3.8

1) Pompe non opérante :

$$H = h_{f1} + h_{f2} = L_1 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$10m = \left[30\left[\frac{3,59}{140}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}} + 350 \cdot \left[\frac{3,59}{130}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}}\right] Q^{1,852} = 358,66 \cdot Q^{1,852}$$

$$Q = \left(\frac{10}{358,66}\right)^{1/1,852} = 0,145 m^3 / s$$

2) Pompe en fonctionnement, écoulement de A vers B :

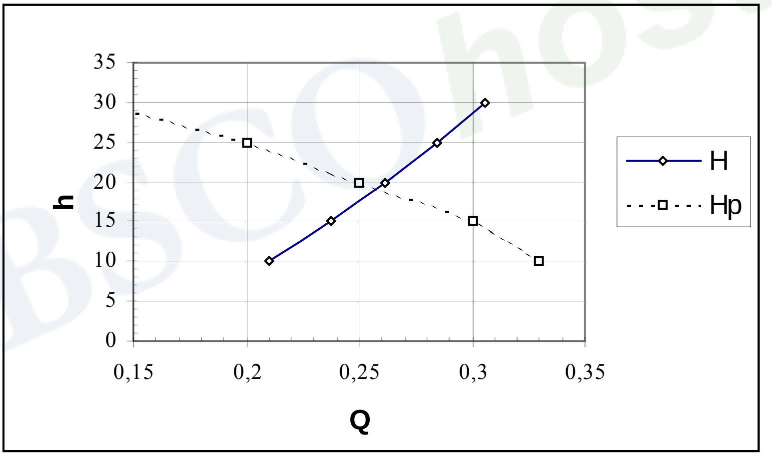
$$H_P = -H + h_{f1} + h_{f2}$$

$$H_P = -10 + L_2 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}} + L_1 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}}$$

$$H_P = -10 + \left[350\left[\frac{3,59}{130}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}} + 30\left[\frac{3,59}{140}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}}\right] Q^{1,852}$$

$$H_P = -10 + 358,66\, Q^{1,852}$$

$$Q = \left[\frac{H_P + 10}{358,66}\right]^{1/1,852}$$



pour $H = 19\ m$ $\boxed{Q = 0,26 m^3 / s}$

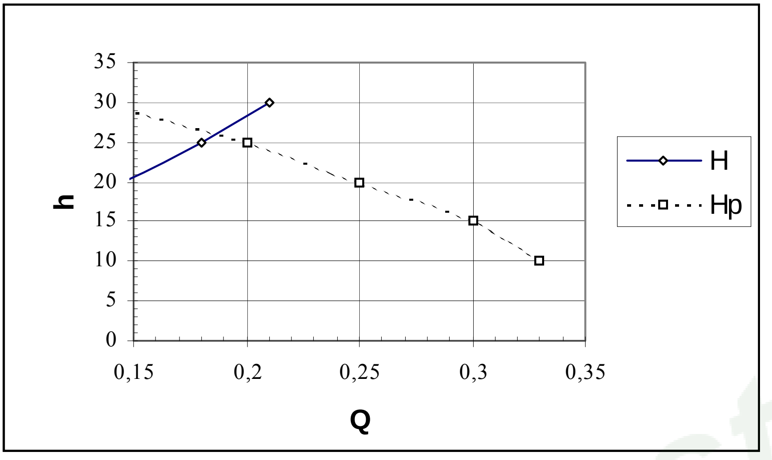
3) Pompe en fonctionnement, écoulement de B vers A :

$$H_P = H + h_{f1} + h_{f2}$$

$$H_P = 10 + L_1 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left[\frac{3,59}{C_{Hw}}\right]^{1,852} \frac{Q^{1,852}}{D_2^{4,87}}$$

$$H = 10 + \left[30\left[\frac{3,59}{140}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,305^{4,87}} + 350\left[\frac{3,59}{140}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,255^{4,87}}\right] Q^{1,852}$$

$$H_P = 10 + 358,66 Q^{1,852} \Rightarrow Q = \left[\frac{H - 10}{358,66}\right]^{1/1,852}$$



Pour $H = 26m \Rightarrow Q = 0,19\, m^3/s$

Exercice 3.9

1) $$J = L\left[\frac{3,59}{C_{HW}}\right]^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D_1^{4,87}} = 30.10^3\left[\frac{3,59}{140}\right]^{1,852} \cdot \frac{1}{0,9^{4,87}} . Q^{1,852}$$

$$\Rightarrow J = 56,5\, Q^{1,852} \quad ; \quad Hg = 138 - 107 = 31m$$

Q(l/s)	25	50	75	125	225	300
J(m)	0,06	0,22	0,47	1,2	3,6	6,01

1 pompe : 3 cellules en série $\Rightarrow$ même débit et $h_{éq} = \sum h_i = h_p$

3 pompes // $\Rightarrow h_{éq} = h_i \; et \; Q_{éq} = 3Q_i$

$$\Rightarrow Q_{fonctionnement}^{systeme} = 825\, l/s$$

Pour une pompe : Q = (825 l/s)/3 = 275l/s

2) $NPSH\ disp = 10 - (h_a + J_a) = 10 + h_a = 10 + 2 = 12m \langle\ NPH\ requis = 12,5m$

Il y a risque de cavitation.

EXERCICES DU CHAPITRE 5

Exercice 5.1

$$n = 0,013; \quad B = 5m; \quad h_n = 1m \quad S_o = 5.10^{-4}$$

1) Selon l'équation (5.13)

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{\ 2/3}\ S^{1/2}$$

D'après le tableau 5.1, le rayon hydraulique est :

$$R_H = \frac{B \cdot h_n}{B + 2h_n} = \frac{5 \cdot 1}{5 + 2 \cdot 1} = \frac{5}{7}$$

$$Q = \frac{5 \cdot 1}{0,013}\left(\frac{5}{7}\right)^{2/3} . \left(5 \cdot 10^{-4}\right)^{1/2} = \boxed{6,87 m^3 / s}$$

2) $$Q_2 = 13,74 = \frac{B \cdot y_n}{n} \cdot \left(\frac{B \cdot y_n}{B + 2y_n}\right)^{2/3} \cdot S^{1/2}$$

$$13,74 = \frac{5y_n}{0,013} \cdot \left(\frac{5y_n}{5 + 2y_n}\right)^{2/3} \cdot 0,0005^{1/2}$$

$$5y_n \cdot \left(\frac{5y_n}{5 + 2y_n}\right)^{2/3} - 7,99 = 0$$

On trouve par itérations successives : $\boxed{y_n = 1,62m}$

Exercice 5.2

1) D'après l'équation (5.13) :

$$Q = \frac{A}{n} R_H^{2/3} S^{1/2}$$

D'après le tableau (5.1) :

$$A = \left(b + y_n\right) y_n \quad et \quad R_H = \frac{\left(b + y_n\right) y_n}{b + 2\sqrt{2} y_n}$$

$$10 = \frac{(6+y_n)\cdot y_n}{0,022}\cdot\left(\frac{(6+y_n)\cdot y_n}{6+2.8284y_n}\right)^{2/3}\cdot 0,001^{1/2}$$

$$6,9570 = (6+y_n)\cdot y_n\left(\frac{(6+y_n)y_n}{6+2,8284y_n}\right)^{2/3}$$

Par essais successifs : $\boxed{y_n = 1,092m}$

2) En utilisant de nouveau l'équation (5.13) avec y = 2,184m :

$$A = (6+2,184)\cdot 2,184 = 17,8739m$$

$$R_H = \frac{(6+2,184)\cdot 2,184}{6+2,8284\cdot 2,184} = 1,4678m$$

$$Q = \frac{17,8739}{0,022}\cdot(1,4678)^{2/3}\cdot 0,001^{1/2} = \boxed{33,2m^3/s}$$

Exercice 5.3

D'après le tableau 5.1 :

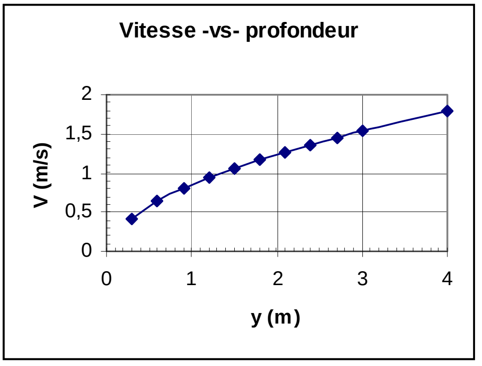
$$A = (6+2y)y \quad \text{et} \quad R_H = \frac{(6+2y)y}{6+2y\sqrt{5}}$$

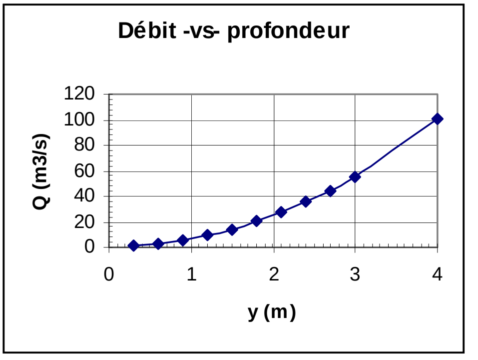
Selon l'équation (5.12) :

$$V = \frac{1}{n}R_H^{\ 2/3}S^{1/2} \quad \text{et Q = AV}$$

On peut donc calculer V et Q pour différentes valeurs de y

y(m)	**A(m²)**	**V(m/s)**	**Q(m³/s)**
0,3	1,98	0,467	0,924
0,9	7,02	0,882	6,189
1,5	13,5	1,164	15,71
2,1	21,42	1,394	29,85
3	36	1,687	60,74
4	56	1,973	110,486





Exercice 5.4

$$A = b \cdot y_n + \frac{y_n \cdot 2 \cdot y_n}{2} = b \cdot y_n + y_n^2 \quad \text{d'où : } b = \frac{A - y_n^2}{y_n}$$

$$A = \frac{Q}{V} = \frac{10m^3/s}{1m/s} = 10m^2$$

Pour $y_n = 1{,}0$m $\quad b = \frac{10 - 1^2}{1} = 1 \qquad \boxed{b = 9m}$

Exercice 5.5

Le cas de la conduite pleine permet de calculer S par l'équation (5.13) :

$$Q_P = \frac{1}{n} A\, R_H^{\;2/3}\; S^{1/2} \quad avec \quad A = \frac{\pi D^2}{4};\;\; R_H = \frac{A}{P} = \frac{D}{4}$$

$$S = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3}} = \frac{0{,}014^2 \cdot (0{,}100)^2}{\frac{3{,}14^2 \cdot 0{,}305^4}{16} \cdot \left(\frac{0{,}305}{4}\right)^{4/3}} = 0{,}0114$$

$$\boxed{S = 0{,}0114}$$

Conduite 75 % pleine :

$$y_n = 0{,}75 \cdot D = 229mm$$

$$V_P = \frac{Q_P}{A} = \frac{0,100}{\pi \cdot \frac{0,305^2}{4}} = 1,3687 m/s$$

Selon le tableau 5.3, $\frac{V}{V_P} = 1,135$

Donc $V = 1,1325 \cdot 1,3687 m/s = 1,55 m/s$

$$\boxed{V = 1,55\ m/s}$$

* Conduite 30 % pleine :

$$y_n = 0,3.D = 91,5mm$$

$$\frac{V}{Vp} = 0,776 \cdot V = 0,776 \cdot 1,3687 m/s = 1,0621 m/s$$

$$\boxed{V = 1,06 m/s}$$

Exercice 5.6

$$h = 0,75\ D \Rightarrow Tableau\ 5.3 \Rightarrow \frac{Q}{Q_p} = 0,91 \Rightarrow \boxed{Q_p = \frac{0,14}{0,91} = 0,154 m^3/s}$$

$$Q_{\min} = 0,03 m^3/s \Rightarrow \frac{Q_{\min}}{Q_p} = 0,195 \Rightarrow tableau\ 5.3 \Rightarrow \frac{V_{\min}}{V_p} = 0,776$$

ou $V_{\min} = 0,6 m/s \Rightarrow V_p = 0,77 m/s$

$$A = \frac{Q_p}{V_p} = \frac{0,154}{0,77} = 0,198 m^2 = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \qquad \boxed{D = 0,5m}$$

Calcul de S en utilisant l'équation (5.12) :

$$S = \left(\frac{n \cdot Vp}{R_H^{\ 2/3}}\right)^2 = \left(\frac{0,015 \cdot 0,77}{\left(\frac{0,5}{4}\right)^{2/3}}\right) = 2,1 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{S = 2{,}1.10^{-3}}$$

Selon le tableau 5.3, le débit maximum à surface libre est

$$\frac{Q_{\max}}{Q_p} = 1{,}0745 \quad donc \quad \boxed{Q_{\max} = 0{,}166 m^3/s}$$

Exercice 5.7

Indices utilisés : c pour conduite à section circulaire et r pour conduite à section rectangulaire.

$$Q_r = 2 \cdot Q_c$$

$$utilisant\ (5.13),\ simplifiant\ par\ S_f :$$

$$\frac{2A_c}{n_c} \times R_{Hc}^{2/3} = \frac{A_r}{n_r} \cdot R_{Hr}^{2/3}$$

$$A_c = \frac{\pi \cdot D_c^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1{,}54^2}{4} = 1{,}8627 \quad et \quad R_{Hc} = \frac{D}{4} = 0{,}385$$

$$A_r = b \cdot y_r = 1{,}54 \cdot y_r$$

Selon le tableau 5.1 : $R_{Hr} = \dfrac{b \cdot y_r}{b + 2y_r} = \dfrac{1{,}54 \cdot y_r}{1{,}54 + 2y_r}$

Donc $\dfrac{2 \cdot 1{,}8627}{0{,}025} \cdot 0{,}385^{2/3} = \dfrac{1{,}54 \cdot y_r}{0{,}012} \cdot \left(\dfrac{1{,}54 \cdot y_r}{1{,}54 + 2y_r} \right)^{2/3}$

Soit : $1{,}54 y_r^2 - 0{,}9634 y_r - 0{,}7418 = 0$

$$\boxed{y_r = 1{,}074 m}$$

Exercice 5.8

$$Q = 5 m^3/s \quad , \quad n = 0{,}013$$

$$B = 4m$$

a) Le débit unitaire est $q = \frac{Q}{b} = \frac{5m^3/s}{4m} = 1,25m^2/s$

Selon l'équation (5.25) : $y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{1,25^2}{9,81}\right)^{1/3} = 0,5421m$

$\boxed{y_c = 0,54m}$

b) D'après (5.28) $V_c = \sqrt{g \cdot y_c} = 2,3\ m/s$

$\boxed{V_c = 2,3\ m/s}$

c) D'après (5.31) $S_c = \left(\frac{nQ}{A_c\ R_{H_c}^{2/3}}\right)^2 = 0,0028$

$\boxed{S_c = 0,0028}$

Exercice 5.9

1) En (3) : $Q = V \cdot A = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50m^3/s$

La charge totale en 3 :

$$E_3 = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 1 + \frac{5^2}{2.9,81} = 2,27m$$

Par la conservation d'énergie entre 2 et 3

$$y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta Z = y_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

L'écoulement est critique en 2 si $\frac{dE_2}{dy} = 0$

$$E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{B^2 y^2 \cdot 2 \cdot g} \quad et \quad \frac{dE_2}{dy} = -\frac{Q^2}{B^2 g y_2^3} = 0$$

$$y_{2c} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 \cdot g}} = \sqrt[3]{\frac{50^2}{10^2 \cdot 9,81}} = 1,366m$$

$$\boxed{y_c = 1,366m}$$

$$E_3 = E_2 + \Delta z = 2,27 = 1,366 + \frac{50^2}{10^2 \cdot 1,366^2 \cdot 2 \cdot 9,81} + \Delta Z$$

$$\Delta Z = 2,27m - 2,049m = 0,221m \qquad \boxed{\Delta z = 0,221m}$$

2) Selon (5.22), le nombre de Froude en 1 est :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gA^3} = \frac{Q^2 \cdot B}{gB^3 \cdot y_1^3} = \frac{Q^2}{g \cdot B^2 \cdot y_1^3}$$

Selon la conservation d'énergie entre 1 et 2 : $E_1 = E_2 = E_3 = 2,27m$

$$Q = V \cdot A = 5,0m/s \cdot 1,0m \cdot 10,0m = 50m^3/s$$

$$y_1 + \frac{Q^2}{B^2 \cdot 2 \cdot g \cdot y_1^2} = y_1 + \frac{50^2}{10^2 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot y_1^2}$$

$$y_1 + \frac{1,274}{y_1^2} = 2,27 \qquad \boxed{y_1 = 1m}$$

$$Fr^2 = \frac{50^2}{9,81 \cdot 10^2 \cdot 1,0^3} = 2,55 \qquad \boxed{F_r = 1,60 \ > \ 1}$$

Régime torrentiel dans la section 1

Exercice 5.10

1) En (1) : $A_1 = B_1 \cdot y_1$ *et du tableau* 5.1: $R_{H1} = \dfrac{B_1 \cdot y_1}{B_1 + 2 \cdot y_1}$

D'après (5.22) : $Fr^2 = \dfrac{Q^2 \ B_1}{g \cdot A^3} = \dfrac{Q^2}{g \cdot B_1^2 \cdot y_1^3}$

Selon (5.13) $Q = \dfrac{1}{n} A R_H^{\ 2/3} S_0^{1/2} = \dfrac{1}{2} B_1 \cdot y_1 \cdot \left(\dfrac{B_1 y_1}{B_1 + 2 \cdot y_1} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$

$$10 = \frac{1}{0,02} \cdot 10 \cdot y_1 \left(\frac{10\, y_1}{10+2y_1} \right)^{2/3} \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-4}}$$

$$1 = y_1 \cdot \left(\frac{10 y_1}{10+2y_1} \right) \quad soit \quad 10y_1^2 - 2y_1 - 10 = 0 \qquad \boxed{y_1 = 1{,}1m}$$

$$Fr_1^2 = \frac{10^2}{9{,}81 \cdot 10^2 \cdot 1{,}1^3} = 0{,}076 \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{l} Fr_1 = 0{,}275 \; < \; 1 \\ écoulement\;\; fluvial\; en\, 1 \end{array}}$$

En 2, il faut que l'écoulement soit critique, donc $Fr_2 = 1$

Comme en 1,

$$\left(Fr_2\right)^2 = \frac{Q^2}{g \cdot B_2^2 \cdot y_2^3} = 1 \quad et \quad Q^2 = g \cdot B_2^2 \cdot y_2^3$$

Selon la conservation de l'énergie :

$$E_1 = y_1 + \frac{Q^2}{2g \cdot B_1^2 \cdot y_1^2} = E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{2g \cdot B_2^2 \cdot y_2^2} = E_c$$

Donc $E_c = 1{,}1m + \dfrac{10^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^2 \cdot 1{,}1^2} = 1{,}142m$

Selon (5.27) : $E_c = \dfrac{3}{2} \cdot y_c \quad donc \quad y_c = \dfrac{2 \cdot 1{,}142}{3} = 0{,}76m \qquad \boxed{y_c = 0{,}76m}$

D'après (5.25) : $y_c = \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\dfrac{Q^2 / B_2^2}{g}} \quad donc \quad B_2 = \sqrt{\dfrac{Q^2}{g y_c^3}}$

$$\boxed{B_2 = 4{,}82m}$$

2) Pour $B_2^1 = \dfrac{B_2}{2} = 2{,}41m$

Selon (5.27) : $E_C^1 = \dfrac{3}{2} y_{2c}^1 = 1{,}81m$

Il faut que

$$E_1^1 = E_C^1 = y_1^1 + \frac{Q^2}{2g\left(B_1\right)^2 \cdot \left(y_1^1\right)^2} = y_1^1 + \frac{10^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 10^2 \cdot \left(y_1^1\right)^2} = 1,81m$$

$$\left(y_1^1\right)^3 - 1,81 \cdot \left(y_1^1\right)^2 + 0,051 = 0 \qquad \boxed{y_1^1 = 1,79m}$$

Exercice 5.11

$$B = 15m \quad , \quad S_0 = 1.10^{-5}, \quad Q = 50m^3/s$$
$$y_1 = 3m \quad , \quad y_2 = 3,25m$$

Selon l'équation (5,45)

$$\Delta x = \left[\frac{1 - \dfrac{Q^2 B}{g.A^3}}{S_0 - \dfrac{n^2 Q^2}{A^2.R^{4/3}}}\right]\Delta y$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 3m \\ y_2 = 3,25 \end{array}\right\} y = \frac{y_1 + y_2}{2} = 3,125m = \text{valeur moyenne de y}$$

$$A = B.y = 15.3,125 = 46,875m^2 = \text{valeur moyenne de A}$$

$$R_H = \frac{By}{B + 2y} = \frac{46,875}{15 + 2 \cdot 3,125} = 2,205m = \text{valeur moyenne de } R_H$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 0,25m \qquad y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$\Delta x = \left[\frac{1 - \dfrac{50^2 \cdot 15}{9,81 \cdot 46,875^3}}{1 \cdot 10^{-5} - \dfrac{0,025^2 \cdot 50^2}{46,875^2 \cdot 2,205^{4/3}}}\right] \cdot 0,25 = -1012,36m$$

$$\boxed{\Delta x = 1012,36m}$$

b) Pour trouver la forme du profil (tableau 5.26), il faut connaître y, y_n et y_c.

Utilisant (5.13) :

$$\frac{nQ}{S^{0,5}} = A \cdot R_H^{\ 2/3} = B \cdot y_n \cdot \left(\frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3}$$

$$\frac{0,025 \cdot 50}{\sqrt{1,0 \cdot 10^{-5}} \cdot 15} = y_n \cdot \left(\frac{15 \cdot y_n}{15 + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3} \qquad \boxed{y_n = 10m}$$

Pour y_c, Fr = 1,0

Selon (5.22) :

$$F_r^2 = 1 = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot (B \cdot y_c)^3}$$

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{g \cdot B^3} \right)^{1/3} = \left(\frac{50^2}{9,81 \cdot 15^2} \right)^{1/3} = 1,04m \qquad \boxed{y_c = 1,04m}$$

$y_n \;>\; y \;> y_c$: il s'agit du profil M_2 sur le tableau 5.26

$$\boxed{y_2 \text{ est donc vers l'amont}}$$

Exercice 5.12

Géométrie du fond du canal :

$Z_2 = 25m$
$Z_j = Z_2 + S_2 \times L_2 = 25 + 0,001 \times 1500 = 26,5m$
$Z_1 = X_j + S_1 \times L_1 = 26,5 + 0,005 \times 300 = 28,0m$

Valeurs connues :

$y_1 = 30,0m - 28,0m = 2,0m$
$y_2 = 27,5m - 25,0m = 2,5m$

L'écoulement est critique à l'entrée du canal :

$$y_c = y_1 = 2,0m$$

Selon (5.25) : $y_c = \left[\dfrac{q^2}{g}\right]^{1/3}$ d'où $q = \left(g \cdot y_c^3\right)^{1/2} = \left(9,81 \cdot 2^3\right)^{1/2}$

$$Q = B \cdot q = 9,0 \cdot \left(9,81 \cdot 2^3\right)^{1/2} = 79,73 m^3 / s$$

La figure 5.14 donne y/b en fonction de $AR_H^{2/3} / b^{8/3}$.

De (5.13) : $A = nQ / \left(R_H^{2/3} S^{1/2}\right)$. Donc $AR_H^{2/3} / b^{8/3} = nQ / \left(b^{8/3} S^{1/2}\right)$

Dans la section 1, $\dfrac{nQ}{b^{8/3} \cdot S_1^{1/2}} = \dfrac{0,015 \cdot 79,73}{9,0^{8/3} \cdot 0,005^{1/2}} = 0,048$

De la figure 5.14, y/b = 0,17. Donc $y_{N_1} = 1,53m$

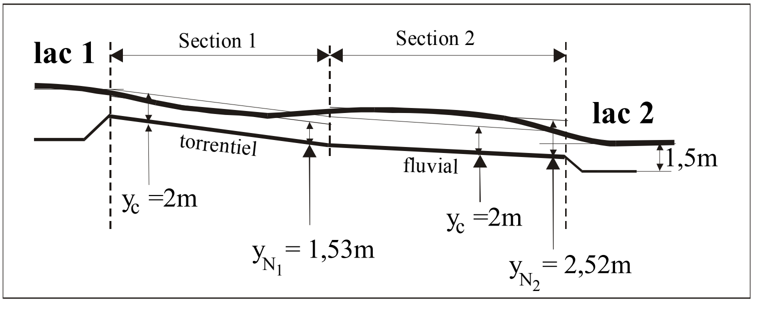
Donc, l'écoulement est torrentiel dans la section 1.

Dans la section 2, $\dfrac{nQ}{b^{8/3} \cdot S_2^{1/2}} = \dfrac{0,015 \cdot 79,73}{9,0^{8/3} \cdot 0,001^{1/2}} = 0,108$

De la figure 5.14, y/b = 0,28. Donc $y_{N_2} = 2,52m$

Donc l'écoulement est fluvial dans la section 2.

L'allure de la surface libre est montrée schématiquement sur la figure ci-jointe.



Exercice 5.13

La profondeur normale peut être calculée à partir de l'équation (5.13) en substituant

$$A = B \cdot y_n \quad et \quad R_H = \frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n}$$

Ainsi : $$Q = \frac{B \cdot y_n}{n} \cdot \left(\frac{B \cdot y_n}{B + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3} \cdot S_f^{1/2}$$

(a) Supposant $S_f = S_0 = 0{,}009$ et groupant les termes connus à gauche, (a) donne :

$$\frac{15 \cdot 0{,}025}{10 \cdot \sqrt{0{,}009}} = y_n \cdot \left(\frac{10 \cdot y_n}{10 + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3}$$
$$= 0{,}39528$$

(b) On résout (b) par essais successifs et on obtient $y_n = 0{,}60m$

Selon l'équation (5.25), la profondeur critique est:

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{(15/10)^2}{9{,}81} \right)^{1/3} = 0{,}612m$$

Selon les données, $y_{ref} = y_0 = y_n + 4{,}0m = 4{,}60m$ (voir paragraphe 5.7.3.3).
Donc $y_n = y_c$: pente critique;
$y_{ref} > y_c$: courbe de remous de type C1 (figure 5.27)

Suivant la procédure pour y_{ref} connu à l'aval (au contact avec le lac), avec $\Delta y = 0{,}50m$

1- $y_1 = y_{ref} = 4{,}60m$, pour $x = 0$
2- $y_2 = y_1 - 0{,}50m = 4{,}10m$
3- $y_m = (y_1 + y_2)/2 = 4{,}35m$
4- $A_m = By_m = 10m \cdot 4{,}35m = 43{,}50m^2$
5- $R_{Hm} = A_m/B+2y_m = 2{,}326m$
6- On calcule Δx par (5.45) :

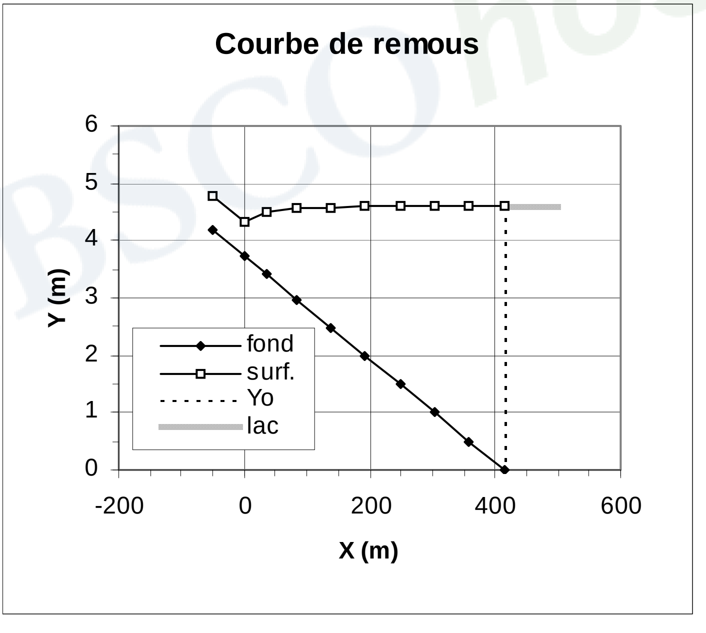
$$\Delta x_1 = 0{,}5 \cdot \left[\frac{1 - \dfrac{15^2 \cdot 10}{9{,}81 \cdot 43{,}5^3}}{0{,}009 - \dfrac{0{,}025^2 \cdot 15^2}{43{,}5^2 \cdot 2{,}326^{4/3}}} \right] = 55{,}401m$$

7- $x = x + \Delta x = 0 + 55{,}401m = 55{,}401m$
8- $y_2 = y_1 = 4{,}10m$
9- on recommence à l'étape 2 jusqu'à de qu'on atteigne $y = y_n$

Le tableau suivant montre les étapes de calcul :

y_1	y_2	y_m	A_m	RH_m	Δ_x	x
4,6	4,1	4,35	43,5	18,7	55,401	55,401
4,1	3,6	3,85	38,5	17,7	55,332	110,733
3,6	3,1	3,35	33,5	16,7	55,217	165,950
3,1	2,6	2,85	28,5	15,7	55,005	220,955
2,6	2,1	2,35	23,5	14,7	54,574	275,529
2,1	1,6	1,85	18,5	13,7	53,543	329,072
1,6	1,1	1,35	13,5	12,7	50,377	379,449
1,1	0,6	0,85	8,5	11,7	34,808	414,258

La figure suivante montre la courbe de remous (Note : les valeurs des x ont été ajustées de manière à représenter le lac à droite)



Exercice 5.14

Conduite 4-3

Débit pour conduite pleine, selon l'équation (5.17) :

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 2,44^{8/3} \cdot 0,0025^{1/2} = 12,94 m^3 / s$$

$\dfrac{Q}{Q_p} = \dfrac{15,0}{12,94} = 1,16$, donc il y a mise en charge

Selon l'équation (5.15b) :

$$S_f = \left(\frac{n \cdot Q}{0,3117 \cdot D^{8/3}} \right)^2 = \left(\frac{0,013 \cdot 15}{0,3116 \cdot 2,44^{8/3}} \right)^2 = 0,003361$$

$$\Delta H = L \cdot S_f = 500,0 m \cdot 0,003361 = 1,68 m$$

Niveau d'eau en 3 : 27,0m + 1,68m = 28,68m (pas d'inondation en 3).

Conduite 3-1

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 1,37^{8/3} \cdot 0,0015^{1/2} = 2,15 m^3 / s$$

$\dfrac{Q}{Q_p} = \dfrac{6,0}{2,15} = 2,8$, donc il y a mise en charge

$$S_f = \left(\frac{0,013 \cdot 6,0}{0,3117 \cdot 1,37^{8/3}} \right)^2 = 0,0168$$

$$\Delta H = 100,0 m \cdot 0,0168 = 1,68 m$$

Niveau de l'eau en 1 : 18,68m + 1,68m = 30,36m (pas d'inondation en 1)

Conduite 3-2

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 0,915^{8/3} \cdot 0,004^{1/2} = 1,197 m^3 / s$$

$\dfrac{Q}{Q_p} = \dfrac{4}{1,197} = 3,35$, donc il y a mise en charge

$$S_f = \left(\frac{0,013 \cdot 4,0}{0,3117 \cdot 0,915^{8/3}} \right)^2 = 0,0447$$

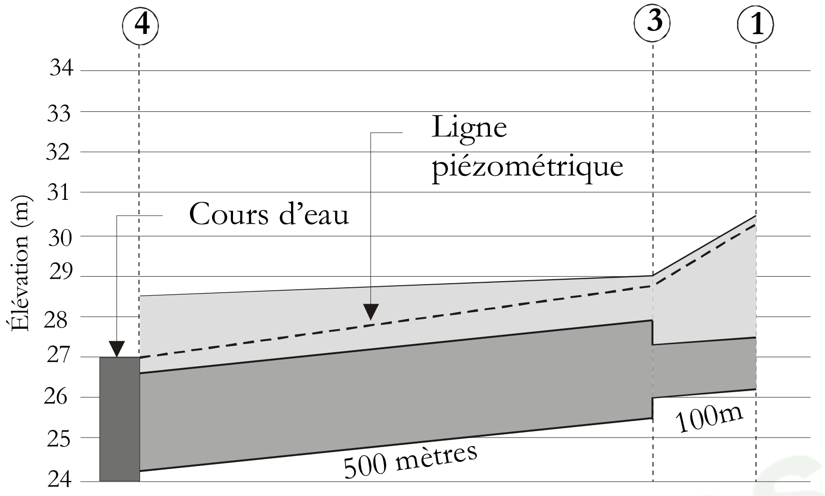
$$\Delta H = 100,0m \cdot 0,0447 = 4,47m$$

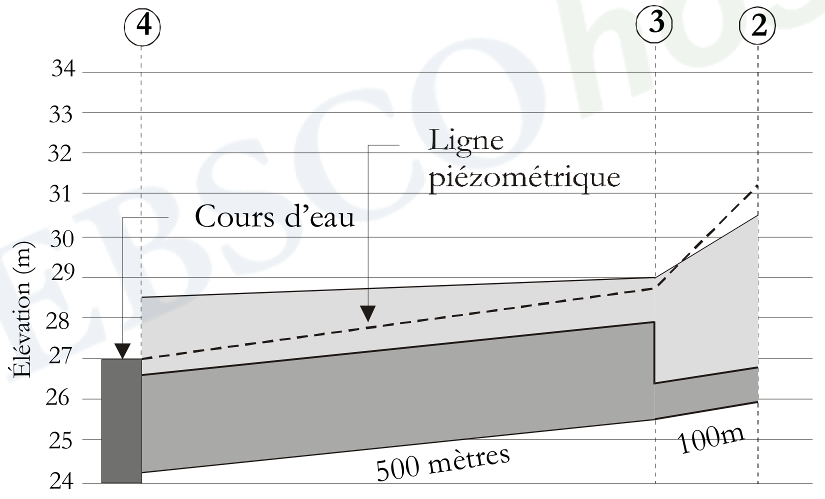
Niveau de l'eau en 2 : 26,68m + 4,47m = 31,15m

Le niveau du sol en 2 étant 30,5m, il y a une inondation de 0,65m.

Les profils piézométriques sont montrés sur la figure ci-jointe :

Échelle horizontale = 100 fois échelle verticale





Choix des diamètres pour éliminer les mises en charge et l'inondation. On suppose $S_f = S_0$.

Conduite 4-3

Pour une conduite pleine, on a de l'équation (5.17) :

$$D_p = \left(\frac{n \cdot Q_p}{0,3117 \cdot S_f^{\ 1/2}} \right)^{3/8} \qquad \text{(c)}$$

$$D_p = \left(\frac{15,0 \cdot 0,013}{0,3117 \cdot 0,0025^{1/2}} \right)^{3/8} = 2,58m$$

Le diamètre disponible est D = 2,745m pour lequel Q_p est :

$$Q_p = \frac{0,3117}{0,013} \cdot 2,745^{8/3} \cdot 0,0025^{1/2} = 17,71 m^3/s$$

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{15,0}{17,71} = 0,85$$

À l'aide du tableau 5.3, on obtient y/D = 0,707 et donc y = 0,707· 2,745 = 1,94m
La profondeur de l'eau au point 3 dans la nouvelle conduite de diamètre 2,745m est donc de 1,94m. L'écoulement est donc à surface libre au point 3 et il n'y a plus de mise en charge. La conduite sera pleine à partir d'un point entre 3 et 4.

Conduite 3-1

Procédant comme précédemment, D_p = 2,013m.
Diamètre disponible = 2,135m.
Pour ce diamètre Q_p = 7,018m³/s ; Q/Q_p = 0,855; y/D = 0,71
Profondeur de l'eau en 1 : y = 1,52m.
L'écoulement est à surface libre et il n'y a plus de mise en charge.

Conduite 3-2

Comme plus haut, D_p = 1,439m
Diamètre disponible = 1,525m.
Pour ce diamètre Q_p = 4,672m³/s ; Q/Q_p = 0,86; y/D = 0,72
Profondeur de l'eau en 1 : y = 1,1m.
L'écoulement est à surface libre et il n'y a plus de mise en charge.

Exercice 5.15

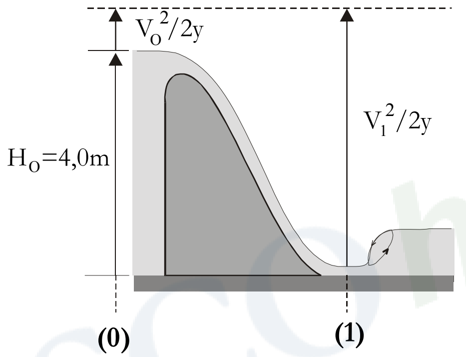
L'équation de Bernoulli s'écrit entre les points 0 et 1, en négligeant les pertes de charge :

$$H_0 + \frac{V_0^2}{2g} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 4 + 0 = 4; \quad donc \quad V_1 = \sqrt{2g\left(4 - y_1\right)} \tag{1}$$

$$Q = V_1 A_1 = V_1 B y_1$$

$$10 = V_1 y_1 \times 10 \tag{2}$$

$$V_1 = \frac{1}{y_1}$$



En substituant (2) dans (1) on obtient :

$$2g\, y_1^3 - 8g\, y_1^2 + 1 = 0$$

$$19.62 y_1^3 - 78.48 y_1^2 + 1 = 0$$

Dont la solution est $y_1 = 0{,}115m$

On trouve y_2 en utilisant (5.51) :

$$0{,}115 y_2 \cdot \left(\frac{0{,}115 + y_2}{2}\right) = \frac{1^2}{9{,}81} = 0{,}10194$$

soit : $\quad y_2^2 + 0{,}115 y_2 - 1{,}773 = 0$

La racine positive de cette équation donne y_2 = 1,275m

EXERCICES DU CHAPITRE 6

Exercice 6.1

Selon la formule de Francis (6.16)

$$Q = 0,415 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \left(L - \frac{H}{5} \right) \cdot H^{3/2}$$

$$Q = 0,415 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \left(5 - \frac{0,30}{5} \right) \cdot 0,30^{3/2} = 1,492 m^3/s$$

Selon la formule de Hégley

On calcule μ par (6.17) :

$$\mu = \left[0,405 + \frac{0,0027}{0,30} - 0,03 \cdot \frac{5-3}{5} \right] \cdot \left[1 + 0,55 \cdot \left(\frac{5 \cdot 0,30}{3 \cdot (0,30 + 1,0)} \right)^2 \right] = 0,448$$

Selon l'équation (6.15) :

$$Q = 0,448 \cdot 5,0 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,30^{3/2} = 1,630 m^3/s$$

Exercice 6.2

Selon la formule de Thomson (6.24) :

$$Q = 1,42 \cdot H^{5/2} \qquad \text{donc : } H = \left(\frac{Q}{1,42} \right)^{2/5}$$

$$H = \left(\frac{0,060}{1,42} \right)^{2/5} = 0,282 m$$

Exercice 6.3

Formule de Francis : $Q = 0.415 L \sqrt{2g}\, H^{3/2}$

Quand Q = 0,15m³/s H= 0,3 m

Comme $\dfrac{\Delta Q}{Q} = \dfrac{3}{2} \times 0.415 L \sqrt{2g}\, \dfrac{\Delta H}{H}$

Donc $$\Delta Q = \frac{3}{2} \times 0.415\, L \sqrt{2g} \left(\frac{\Delta H}{H} \right) \times Q$$

$$= \frac{3}{2} \times 0.415 \times 0.5 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \frac{10^{-2}}{0.30} \times 0.15$$

$$\Delta Q = 0.0068\, m^3\!/_s$$

Soit $$\frac{\Delta Q}{Q} = 4.54\%$$

Exercice 6.4

On calcule C_q selon (6.29) :

$$C_q = \frac{0,65}{1 + \frac{H}{\Delta z}} = \frac{0,65}{1 + \frac{1,0}{2,0}} = 0,433$$

Le débit est obtenu de (6.28) :

$$Q = 1,7 \cdot C_q \cdot L \cdot H^{3/2} = 1,7 \cdot 0,433 \cdot 5,0 \cdot 1^{3/2} = 2,17 m^3 / s$$

EXERCICES DU CHAPITRE 7

Exercice 7.1

Méthode de Thiessen, formule (7.4) :

$$P = \frac{\sum S_i P_i}{A}$$

A = 2 · 2 = 4

$$P = \frac{50mm \cdot 3/2 + 10mm \cdot 3/2 + 20mm \cdot 1}{4} = 27,5mm$$

Méthode arithmétique, formule (7.2) :

$$P = \frac{1}{n}\ \Sigma P_i = \frac{1}{3}\left(50+20+10\right) = 26,7mm$$

Exercice 7.2

Selon (7.3) : $$P = \frac{\sum A_i P_i}{A}$$

Intervalle (mm)	Moyenne (mm)	Superficie (km^2)
40 à 60	50	600
20 à 40	30	300
0 à 20	10	200

$$P = \frac{50 \cdot 600 + 30 \cdot 300 + 10 \cdot 200}{1100} = 37,3mm$$

Exercice 7.3

Infiltration selon Horton (7.7) :

$$P = 40mm \times 2 = 80mm$$

$$F(t) = f_\infty t + \frac{(f_0 - f_\infty)}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$F(t) = 2 \cdot 25 + \frac{(40-25)}{3}\left(1 - e^{-3 \cdot 2}\right) = 54{,}8mm; \quad soit \quad 55mm$$

Précipitations nettes = $P - F = 80 - 55 = 25mm$

Exercice 7.4

Utilisant (7.5) et supposant que ϕ < 20 mm/h

$$\left[(20-\phi)+(25-\phi)+2\cdot(50-\phi)+(75-\phi)\right]\cdot\frac{1h}{2} = 30mm$$

Donc ϕ = 32mm/h , en contradiction avec l'hypothèse ϕ < 20 mm/h

Supposant $20 \leq \phi \leq 25$

$$\frac{(25-\phi) + 2\,(50-\phi) + (75-\phi)}{2} = 30$$

Donc ϕ = 35mm/h

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse de départ

Supposant $25 \leq \phi \leq 50$

$$\frac{2\,(50-\phi) + (75-\phi)}{2} = 30$$

Donc ϕ = 38,33 mm/h

Ce résultat est en accord avec l'hypothèse de départ

Exercice 7.5

Pressions de vapeur (tableau 7.2) :

e_{w1} (t = 20°c) = 2,339 kPa (à la surface de l'eau)

e_{w2} (t = 30°c) = 4,244 kPa (à la saturation dans l'air)

Humidité relative $= 0.3 = \dfrac{e_a}{e_{w2}} = \dfrac{e_a}{4.244}$

Donc e_a = 1,2732 kPa

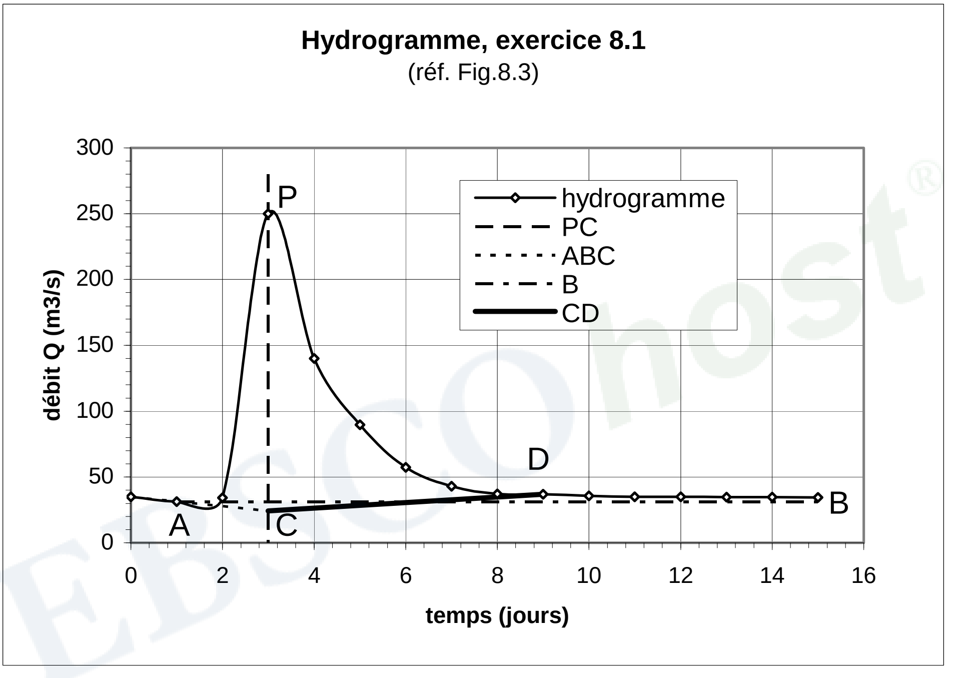
Évaporation journalière :

Avec effet du vent (7.14) E = 3,66 (2,339 - 1,2732) · (1 + 0,062 × 30) = 11,15mm

EXERCICES DU CHAPITRE 8

Exercice 8.1

Les données sont présentées graphiquement sur la figure suivante :



Les deux méthodes utilisées font référence à la figure 8.3.

La « méthode AB » considère comme ruissellement la partie de l'hydrogramme au-dessus de l'horizontale passant par le second point B, à partir de ce point.

Selon la « méthode ACD», le ruissellement est la partie de l'hydrogramme au-dessus de la ligne ACD.

Le point C est défini par l'intersection de la verticale PC passant par le débit de pointe, avec le prolongement de AB.

Le point D est indiqué par une soudaine variation dans la représentation logarithmique des débits dans la partie descendante de l'hydrogramme (voir tableau 2) : il s'agit des valeurs du jour 9.

En calculant les pentes des lignes AC et CD, on peut obtenir les limites inférieures de la portion de ruissellement pour la méthode ACD.

Pente de AC = (31,4 – 35)/1 = -3,6 (pente descendante)
Équation de la ligne AC : $Q = 35 - 3{,}6 \cdot J$
Point C : temps = jour 3 , $Q = 35 - 3{,}6 \cdot 3 = 24{,}2$
Pente de CD = (36,9 – 24,2)/(9 – 3) = 2,1167
Équation de la ligne CD : $Q = 24{,}2 + 2{,}1167 \cdot (J - 3)$

Jour J	Q(m^3/s	méthode AB	Ruissellement (m^3/s) méthode AB	méthode ACD	Ruissellement (m^3/s) méthode ACD
0	35	35	0	35	0
1	31,4	31,4	0	31,4	0
2	34,3	31,4	2,9	27,8	6,5
3	250	31,4	218,6	24,2	225,8
4	140	31,4	108,6	26,32	113,68
5	89,6	31,4	58,2	28,43	61,17
6	57,4	31,4	26	30,55	26,85
7	43	31,4	11,6	32,67	10,33
8	37,3	31,4	5,9	34,78	2,52
9	36,9	31,4	5,5	36,9	0
10	35,7	31,4	4,3	35,7	0
11	35,1	31,4	3,7	35,1	0
12	34,9	31,4	3,5	34,9	0
13	34,8	31,4	3,4	34,8	0
14	34,7	31,4	3,3	34,7	0
15	34,6	31,4	3,2	34,6	0

Tableau 1

Jour	Débit (m^3/s)	Logarithme	Taux de variation
3	250	5,52	
4	140	4,94	0,58
5	89,6	4,49	0,45
6	57,4	4,05	0,44
7	43	3,76	0,29
8	37,3	3,61	0,15
9	36,9	3,608	0,002
10	35,7	3,575	0,033
11	35,1	3,558	0,017
12	34,9	3,552	0,006
13	34,8	3,549	0,002
14	34,7	3,546	0,002

Tableau 2

Exercice 8.2

Selon la méthode rationnelle (8.5), $Q = K \cdot C \cdot i \cdot A$

Scénario 1 : $T_r = 15$ min
$Q_p = 60 \cdot (15/20) \cdot K \cdot C \cdot A = 45 \cdot K \cdot C \cdot A$
$V = (45 \cdot K \cdot C \cdot A) \cdot 20 = 900$ KCA

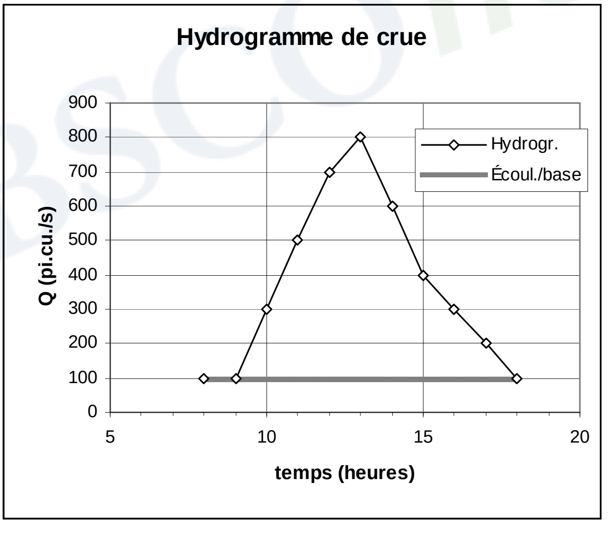
Scénario 2 : $T_r = t_c = 20$min
$Q_p = 50$ KCA
$V = 50$ KCA $\cdot$ 20 = 1000 KCA

Scénario 3 : $T_r = 25$ min $> t_c$
$Q_p = 40$ KCA
$V = 40$ KCA$\cdot$ (20 + 5) = 1000 KCA

1° Scénario 2 a le débit de pointe le plus élevé.

2° Scénario 2 et 3 ont le volume de ruissellement le plus élevé.

Exercice 8.3



L'écoulement de base est $Q_B = 100$pi³/s

a) Ruissellement de surface débute entre 9 h et 10h et finit entre 17h et 18h.

b) Selon la formule (7.5) : ruissellement direct (de surface) = $(i - \phi) \cdot \Delta t$

$$5\,po = \left(2{,}75\,po/h - \phi\right) \cdot 2h$$

Donc, $\phi = 0{,}25$po/h

c) Débit de ruissellement = $Q - Q_{Base}$

Lame de ruissellement en 2 heures = 5po.
Pour l'hydrogramme unitaire de l'averse de 2 heures :

$$HU_2 = (Q - Q_{Base})/5$$

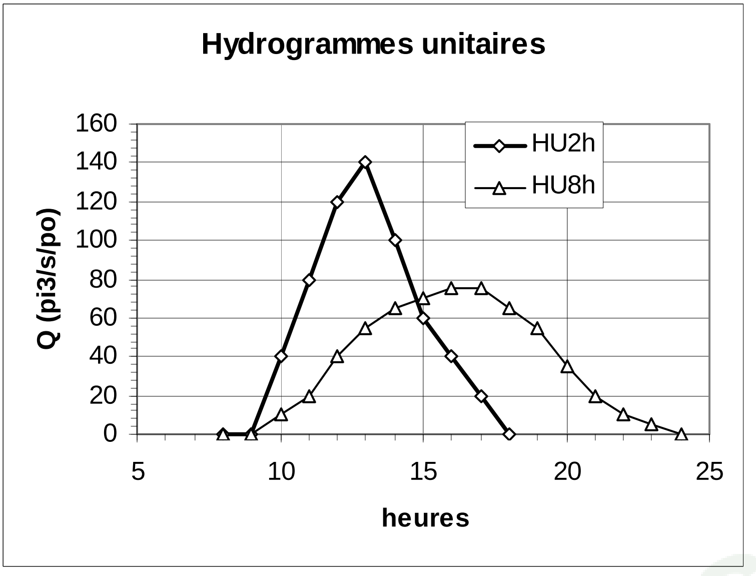
heures	Q(pi.cu./s)	Ruiss.	HU(2h)
8	100	0	0
9	100	0	0
10	300	200	40
11	500	400	80
12	700	600	120
13	800	700	140
14	600	500	100
15	400	300	60
16	300	200	40
17	200	100	20
18	100	0	0

d) Temps de base : $T_B = 9h = \Delta t + t_c$
Où Δt est la durée de la pluie et t_c est le temps de concentration.
Donc $t_c = T_B - \Delta t = 9h - 2h = 7h$.

e) Pour une pluie de $\Delta t = 8h$, $T_B = \Delta t + t_c = 8h + 7h = 15h$
Donc le ruissellement cesserait à 9h + 15h = 24h.

f) En calculant l'hydrogramme unitaire de 8 heures, on constate que le débit de pointe se produit à 16h et a la valeur unitaire de $75pi^3/s$.

Le débit de pointe réel est donc $75pi^3/s \cdot 2{,}5 \cdot 8 + Q_{Base} = 1600pi^3/s$.



Exercice 8.4

1- Q_p = KCIA

0,0028 CIA

$0{,}0028 \times 0{,}6 \times \dfrac{2228}{20+13} \times 50$

5,67 m³/s

2- $Q\ (5\ \text{min.}) = Q_p \times \dfrac{5}{20} = 1{,}42\ \text{m}^3/\text{s}$

3- $Q\ (15\ \text{min.}) = Q_p \times \dfrac{15}{20} = 4{,}25\ \text{m}^3/\text{s}$

4- $Q\ (42\ \text{min.} > 2 \times t_c) = 0\ \text{m}^3/\text{s}$

5- $Q_p\ (T_r = 15\ \text{min.}) = 0{,}0028 \times 0{,}6 \times \dfrac{2228}{15+13} \times 50 \times \dfrac{15}{20}$

$$Q_p = 5{,}01 \text{ m}^3/\text{s}$$

6- $Q\ (5 \text{ min}) = Q_p \times \dfrac{5}{15} = 1{,}67 \text{ m}^3/\text{s}$

7- $Q\ (25 \text{ min}) = \dfrac{10}{15}\ Q_p = 3{,}34 \text{ m}^3/\text{s}$

8- $Q\ (40 \text{ min}) = 0$

9- $Q_p\ (T_r = 25 \text{ min.}) = 0{,}0028 \times 0{,}6 \times 50 \times \dfrac{2228}{25+13} = 4{,}92 \text{ m}^3/\text{s}$

10- $Q\ (20 \text{ min.}) = 4{,}92 \text{m}^3/\text{s}$

11- $Q\ (25 \text{ min.}) = 4{,}92 \text{ m}^3/\text{s}$

12- $Q\ (45 \text{ min.}) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$

Exercice 8.5

Avant :

D'après (8.11)

$$t_c = 3,26\cdot\left(1,1-C\right)\cdot\frac{\sqrt{L}}{S^{0,333}} = 3,26\cdot\left(1,1-0,3\right)\cdot\frac{\sqrt{3250}}{2,5^{0,333}} = 109,58\,\text{min}$$

A = 5km² = 500ha

Selon (8.5), $Q = 0,0028\cdot C\cdot A\cdot i = 0,0028\cdot 0,3\cdot 500\cdot 22,19 = 9,32m^3/s$

Utilisant la formule (5.14) :

$$D = \left(\frac{n\cdot Q}{0.3117\cdot S^{1/2}}\right)^{3/8} = \left(\frac{0,014\cdot 9,32}{0,3117\cdot 0,01^{1/2}}\right)^{3/8} = 1,71m$$

Après :

$$C = 0,3\times 0,5 + 0,5\times 0,9 = 0,6$$