

# Chapitre 7

## Calcul des sections en T en flexion simple

### 7.1 Géométrie et définitions

Comme déjà vu, une poutre en T nous permet d'augmenter le taux de béton comprimée dans une poutre ou plancher. Cela nous permet, quand une section rectangulaire est insuffisante, de prévoir une résistance suffisante tout en optimisant le volume des matériaux en adoptant une poutre en T.

Les poutres en T sont des éléments couramment utilisés dans les différentes applications du génie civil telles que les ponts, bâtiments, ...

Nous présentons dans la figure (7.1) une géométrie simplifiée d'une poutre en T. Les différents éléments constitutifs de la poutre sont définis comme suit :

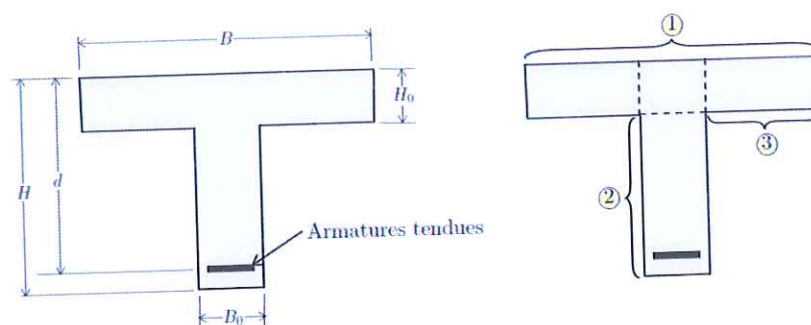


FIGURE 7.1 – Géométrie d'une poutre en T

- La partie ① s'appelle "**Table de compression**";
- La partie ② s'appelle "**Nervure**" ou "**Âme**" de la poutre;
- Les parties ③ s'appellent "**Ailes**" de la table de compression;

Cette forme en T nous permet de réduire le volume de béton tendu et d'augmenter le volume de béton comprimé. Cela est évidemment avantageux puisqu'il permet d'optimiser les matériaux et les coûts des constructions.

Les dimensions de la table de compression ne peuvent pas être quelconques. La largeur à considérer d'une aile de la table de compression ne doit pas dépasser la plus petite des valeurs suivantes (voir figure 7.2) :

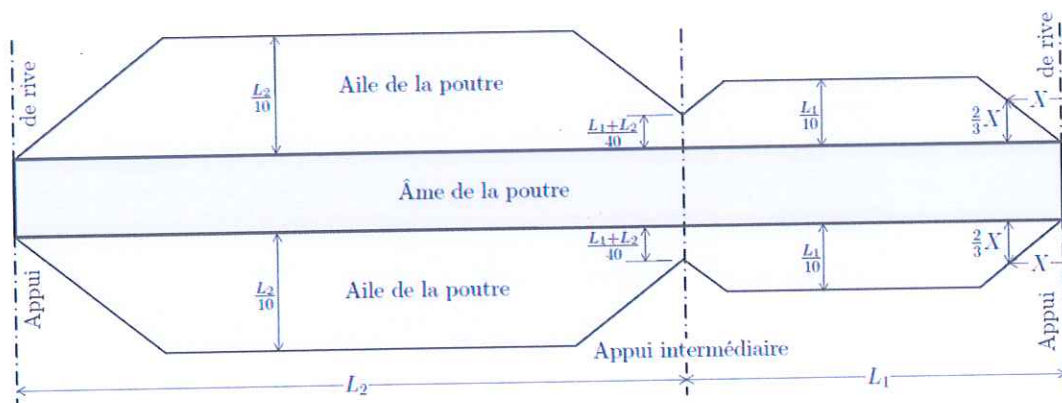


FIGURE 7.2 – Dimensions de calcul de la table de compression

1. La moitié de la distance entre les faces voisines de deux nervures consécutives;
2. Le  $\frac{1}{10}$  de la portée de la travée en cours;
3. Les  $\frac{2}{3}$  de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui de bout le plus proche;
4. Le  $\frac{1}{40}$  de la somme des portées des deux travées adjacentes à l'appui intermédiaire le plus proche plus les  $\frac{2}{3}$  de la distance de la section à l'appui.

Les détails des calculs de dimensionnement sont présentés dans les parties suivantes.

## 7.2 Dimensionnement à l'ELU

Pour calculer une poutre en T à l'ELU, deux cas sont à distinguer (en utilisant les diagrammes de contraintes simplifiés) selon que la zone comprimée de hauteur  $0,8Y_u$  est située complètement dans la table de compression ou s'étend à la nervure de la poutre.

### 7.2.1 Calcul sans armatures comprimées

#### 7.2.1.1 Moment de comparaison

Par définition, le moment de comparaison correspond au moment qui peut être repris par la table de compression en utilisant le diagramme des contraintes simplifié. Ça correspond donc à une hauteur du diagramme de  $0,8Y_u = H_0$ , on a donc :

$$Y_u = \frac{H_0}{0,8} = 1,25H_0 \quad (7.1)$$

$$\rightarrow M_0 = F.Z = 0,8Y_u B f_{bu} (d - 0,4Y_u) = H_0 B f_{bu} \left( d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.2)$$

#### 7.2.1.2 Calcul pour le cas : $M_u \leq M_0$

La compression n'intéresse qu'une partie de la table de compression. On calcule la section comme une section rectangulaire de hauteur utile  $d$  et de largeur  $B$ . Les armatures sont calculées comme pour une section rectangulaire.

#### 7.2.1.3 Calcul pour le cas : $M_u \geq M_0$

La compression intéresse toute la hauteur de la table de compression et une partie de la nervure. On décompose la section en T en deux parties comme schématisé dans la figure (7.3).

Soit  $F_1$  la résultante des efforts de compression développée dans les ailes de la table de compression.  $M_1$  est le moment généré par  $F_1$  et réduit au centre de gravité des aciers tendus.

Soit  $F_2$  la résultante des efforts de compression dans la nervure prolongée jusqu'au nu supérieur de la poutre (voir figure 7.3).  $M_2$  est le moment dû à  $F_2$  et réduit au centre de gravité des aciers tendus.

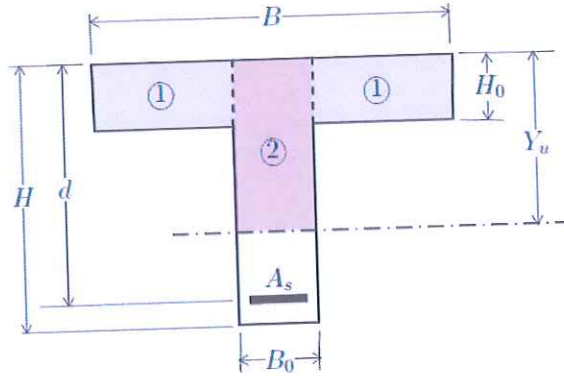


FIGURE 7.3 – Parties comprimées en flexion simple d'une poutre en T

On a donc :

$$F_1 = f_{bu} H_0 (B - B_0) \quad (7.3)$$

$$M_1 = F_1 \left( d - \frac{H_0}{2} \right) = f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$F_2 = 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} \quad (7.5)$$

$$M_2 = F_2 (d - 0, 4 Y_u) = 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0, 4 Y_u) \quad (7.6)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (7.7)$$

L'équilibre de la section est traduit par les équations :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} & = 0 \\ M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0, 4 Y_u) & = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées, on avait obtenu :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} & = 0 \\ M_u - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0, 4 Y_u) & = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

posons :

$$\begin{cases} \bar{M} & = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) \\ \bar{A}_s \bar{\sigma}_s & = A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) \end{cases} \quad (7.10)$$

en remplaçant dans les équations du système (7.8), on obtient le système :

$$\begin{cases} \bar{A}_s \bar{\sigma}_s - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} & = 0 \\ \bar{M} - 0, 8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0, 4 Y_u) & = 0 \end{cases} \quad (7.11)$$



Formellement, on se ramène avec ce système au cas d'une section rectangulaire, sans armatures comprimées, sollicitée par un moment  $\bar{M}$  où l'on doit calculer la section  $\bar{A}_s$ . Une fois le calcul est effectué, la section à adopter réellement est obtenue par :

$$\boxed{A_s = \frac{f_{bu}H_0(B - B_0) + \bar{A}_s\bar{\sigma}_s}{\sigma_s}} \quad (7.12)$$

D'après la définition de  $\bar{M}$ , le moment généré par les contraintes développées dans les ailes est introduit dans  $\bar{M}$ . Le développement réalisé revient à calculer la section rectangulaire constituée par la nervure prolongée jusqu'au nu supérieur par le moment  $\bar{M}$ .

Le moment réduit est défini dans ce cas par :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{B_0 d^2 f_{bu}} \quad (\text{Attention à } B_0 \text{ au lieu de } B) \quad (7.13)$$

Le développement réalisé pour une section sans armatures comprimées correspond évidemment à :  $\mu \leq \mu_e$ . Dans le cas contraire ( $\mu > \mu_e$ ), on a recours à des armatures comprimées et le développement est présenté dans la partie suivante.

### 7.2.2 Calcul avec armatures comprimées

L'introduction des armatures comprimées entraîne les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées, on avait obtenu :

$$\begin{cases} A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ M_u - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

posons :

$$\begin{cases} \bar{M} = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) \\ \bar{A}_s \bar{\sigma}_s = A_s \sigma_s - f_{bu} H_0 (B - B_0) \end{cases} \quad (7.16)$$

en remplaçant dans les équations du système (7.14), on obtient le système :

$$\begin{cases} \bar{A}_s \bar{\sigma}_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} = 0 \\ \bar{M} - 0,8 Y_u B_0 f_{bu} (d - 0,4 Y_u) - A'_s \sigma'_s (d - d') = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

Une fois les sections  $A'_s$  et  $\bar{A}_s$  sont calculées comme pour une section rectangulaire, on adopte les sections de ferrailage  $A'_s$  et  $A_s$  avec :

$$A_s = \bar{A}_s + H_0(B - B_0) \frac{f_{bu}}{f_{su}} \quad (7.18)$$

Comme déjà adopté par le règlement pour les sections rectangulaires, les armatures comprimées ne doivent pas reprendre là aussi plus de 40% du moment extérieur appliqué, soit :

$$f_{su} A'_s (d - d') \leq 0,4 M_u \quad (7.19)$$

### 7.3 Dimensionnement d'une section en T à l'ELS

#### 7.3.1 Vérification à l'ELS

On adoptant un diagramme de contraintes linéaire élastique à l'ELS, on obtient le schéma de la figure (7.4).

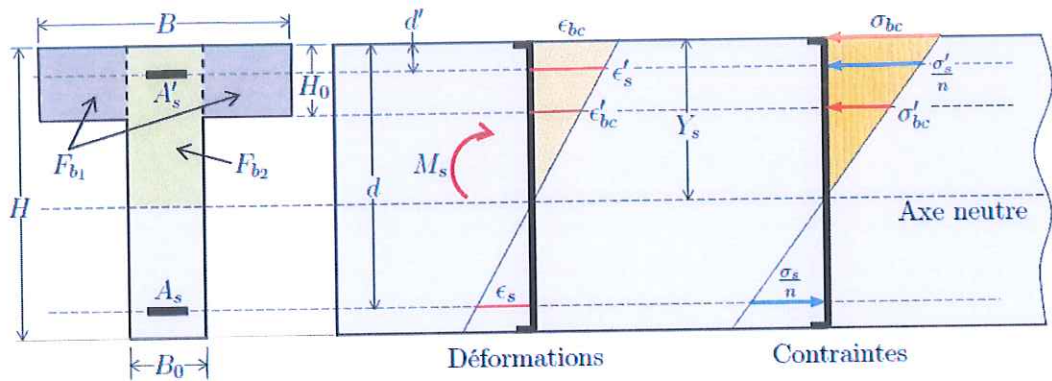


FIGURE 7.4 – Diagrammes des contraintes et déformations à l'ELS d'une poutre en T

On a :

$$\begin{cases} F_{b1} = H_0(B - B_0) \frac{\sigma_{bc} + \sigma'_{bc}}{2} \\ F_{b2} = \frac{B_0 Y_s \sigma_{bc}}{2} \\ F_s = A_s \sigma_s \\ F'_s = A'_s \sigma'_s \end{cases} \quad (7.20)$$

On définit après le moment de comparaison à l'ELS qui représente le moment maximal pouvant être repris par la table de compression seule. Cela correspond à  $Y_s = H_0$ , soit :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left( d - \frac{H_0}{3} \right) \quad (7.21)$$

↳ Cas où  $M_s \leq M_0$  :

Dans ce cas on a :  $Y_s \leq H_0$  et on calculera alors la section en T comme une section rectangulaire de largeur  $B$  et de hauteur  $H$ .

↳ Cas où  $M_s > M_0$  :

On a dans ce cas :  $Y_s > H_0$  et on a une vraie section en T à prendre en compte.

Les démonstrations sont similaires à celles réalisées pour une section rectangulaire et elles ne seront pas présentées ici. Toutefois, les étapes essentielles de vérification sont comme suit :

◆ On cherche la position de l'axe neutre (centre de gravité de la section homogénéisée) en résolvant l'équation :

$$B_0 Y_s^2 + [2H_0(B - B_0) + 2n(A_s + A'_s)] Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + H_0^2(B - B_0)] = 0 \quad (7.22)$$

◆ On calcule ensuite le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre :

$$I = \frac{B_0}{3} Y_s^3 + \frac{(B - B_0) H_0^3}{12} + (B - B_0) H_0 \left( Y_s - \frac{H_0}{2} \right)^2 + n [A_s (d - Y_s)^2 + A'_s (Y_s - d')^2] \quad (7.23)$$

◆ Puis on calcule les contraintes dans le béton et les aciers :

$$K = \frac{M_s}{I} \quad (7.24)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{bc} = KY_s \\ \sigma_s = nK(d - Y_s) \\ \sigma'_s = nK(Y_s - d') \end{cases} \quad (7.25)$$

◆ Enfin, on vérifie les contraintes admissibles à l'ELS :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} \\ \sigma_s \leq \bar{\sigma}_s \\ \sigma'_s \leq \bar{\sigma}'_s \end{cases} \quad (7.26)$$



Si ces trois inégalités sont satisfaites, la section passe à l'ELS. Sinon, il faut redimensionner la section à l'ELS.

### 7.3.2 Calcul à l'ELS

On considère les notations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{H_0}{B} \\ \theta = \frac{d}{B} \\ \alpha_s = \frac{Y_s}{d} \end{cases} \quad *** \quad \begin{cases} \mu_s = \frac{M_s}{B_0 d^2 \bar{\sigma}_s} \\ \delta = \frac{d'}{d} \end{cases} \quad (7.27)$$

Pour économiser l'utilisation des armatures, on considère que  $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ .

En utilisant le théorème de THALÈS on a :

$$\frac{\sigma_{bc}}{Y_s} = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s Y_s}{n(d - Y_s)} \quad (7.28)$$

en l'utilisant une deuxième fois, on trouve :

$$\frac{\sigma'_{bc}}{Y_s - H_0} = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{bc} = \frac{\sigma_s (Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.29)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} + \sigma'_{bc} = \frac{\sigma_s Y_s}{n(d - Y_s)} + \frac{\sigma_s (Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} = \frac{\sigma_s (2Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.30)$$

$$(7.20) \quad \rightarrow \quad F_{b1} = H_0 (B - B_0) \frac{\sigma_{bc} + \sigma'_{bc}}{2} \quad (7.31)$$

$$= \frac{1}{2} \gamma d B_0 (\theta - 1) \frac{\sigma_s (2Y_s - H_0)}{n(d - Y_s)} \quad (7.32)$$

$$= \frac{1}{2} \gamma (\theta - 1) d B_0 \frac{\sigma_s (2\alpha_s d - \gamma d)}{n(d - \alpha_s d)} \quad (7.33)$$

sachant que  $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ , on aboutit à l'expression :

$$F_{b1} = \frac{\gamma (\theta - 1) (2\alpha_s - \gamma)}{2n(1 - \alpha_s)} d B_0 \bar{\sigma}_s \quad (7.34)$$

On peut démontrer de la même façon que le bras de levier de  $F_{b1}$  par rapport au centre de gravité des aciers tendus est exprimé par :

$$Z_1 = \frac{3(2\alpha_s - \gamma) - \gamma(3\alpha_s - 2\gamma)}{3(2\alpha_s - \gamma)} d \quad (7.35)$$

on démontre également que :

$$F_{b2} = \frac{\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} B_0 d \bar{\sigma}_s \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{3 - \alpha_s}{3} d \quad (7.36)$$

$$F'_s = \frac{\alpha_s - \delta}{1 - \alpha_s} A'_s \bar{\sigma}_s \quad \text{et} \quad Z' = (1 - \delta) d \quad (7.37)$$



7.3.2.1 Cas où  $A'_s = 0$  :

L'équilibre des moments lorsqu'ils sont réduits par rapport au centre de gravité des armatures tendues permet d'écrire :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90\mu_s + 3\gamma(2 - \gamma)(\theta - 1)]\alpha_s + 90\mu_s - \gamma^2(\theta - 1)(2\gamma - 3) = 0 \quad (7.38)$$

l'unique racine dans l'intervalle ]0; 1[ de l'équation (7.38) permet de déterminer la contrainte du béton :

$$(7.28) \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)} \bar{\sigma}_s \quad (7.39)$$

Si on a  $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ , la section d'armature tendue à disposer est  $A_s$  donnée par :

$$A_s = \frac{F_b}{\bar{\sigma}_s} = \frac{F_{b1} + F_{b2}}{\bar{\sigma}_s} \quad (7.40)$$

$$\rightarrow \quad A_s = \frac{\alpha_s^2 + \gamma(\theta - 1)(2\alpha_s - \gamma)}{2n(1 - \alpha_s)} B_0 d \quad (7.41)$$

dans le cas contraire, une section d'acier comprimée  $A'_s$  doit être prévue en plus d'une section tendue  $A_s$ .

7.3.2.2 Cas où  $A'_s \neq 0$  :

Malgré que dans ce cas on a théoriquement  $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$ , on doit respecter le non dépassement de la contrainte admissible du béton et la contrainte supplémentaire est à reprendre par des armatures comprimées :

$$\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc} \quad \rightarrow \quad \alpha_s \leq \alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} \quad \rightarrow \quad \mu_s \leq \mu_l \quad (7.42)$$

avec :

$$\mu_l = \frac{\gamma(\theta - 1)[3\alpha_l(2 - \gamma) + \gamma(2\gamma - 3)] + \alpha_l^2(3 - \alpha_l)}{6n(1 - \alpha_l)} \quad (7.43)$$

on pose :  $\alpha_s = \alpha_l$  (pour l'économie  $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$ ). D'où :

$$M_{b1} = \frac{\gamma(\theta - 1)[3(2\alpha_l - \gamma) - \gamma(3\alpha_l - 2\gamma)]}{6n(1 - \alpha_l)} B_0 d^2 \bar{\sigma}_s \quad (7.44)$$

$$M_{b2} = \frac{\alpha_l^2(3 - \alpha_l)}{6n(1 - \alpha_l)} B_0 d^2 \bar{\sigma}_s \quad (7.45)$$

$$\sigma'_s = \frac{\alpha_l - \delta}{1 - \alpha_l} \bar{\sigma}_s \quad (7.46)$$

et les sections d'armatures se calculent par :

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.47)$$

$$A_s = \frac{2n(1 - \alpha_l)(\mu_s - \mu_l) + (1 - \delta)[\alpha_l^2 + \gamma(\theta - 1)(2\alpha_l - \gamma)]}{2n(1 - \alpha_l)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.48)$$

on a  $\mu_s \geq \mu_l$ .

### 7.3.3 Ferrailage minimal

Rappelons les coordonnées du centre de gravité et le moment d'inertie quadratique  $I$  d'une section en T (figure 7.13).

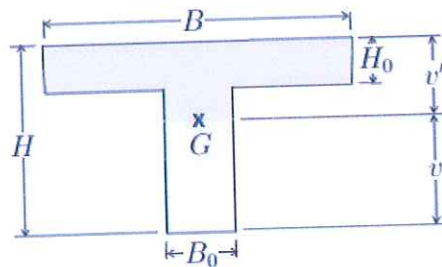


FIGURE 7.5 – Schéma d'une poutre en T

Position du centre de gravité verticalement :

$$v' = \frac{B_0 H^2 + (B - B_0) H_0^2}{2[B_0 H + (B - B_0) H_0]} \quad (7.49)$$

$$v = H - v' \quad (7.50)$$

le moment d'inertie est exprimé par :

$$I = B_0 \frac{H^3}{3} + (B - B_0) \frac{H_0^3}{3} - [B_0 H + (B - B_0) H_0] v'^2 \quad (7.51)$$

Comme pour une section rectangulaire, une section en T doit contenir une section d'armatures minimale capable de reprendre la contrainte de rupture du béton en traction  $f_{t28}$  sans que la contrainte d'acier dépasse  $f_e$ .

En considérant le moment appliqué positif, la contrainte de la fibre la plus tendue du béton est donnée par :

$$\sigma_b = f_{tj} = \frac{Mv}{I} \quad \rightarrow \quad M = f_{tj} \frac{I}{v} \quad (7.52)$$

d'après (7.40), on a :

$$A_{\min} = \frac{F_b}{\bar{\sigma}_s} = \frac{F_b}{f_e} \quad (7.53)$$

on a :

$$M = F_b Z_b \quad \rightarrow \quad A_{\min} = \frac{M}{Z_b f_e} \quad (7.54)$$

pour le ferrailage minimal, on considère que :  $Z_b = 0,9d = 0,81H$

$$\rightarrow \quad A_{\min} = \frac{f_{tj} \frac{I}{v}}{0,81H f_e} \quad (7.55)$$

$$\rightarrow \quad A_{\min} = \frac{I}{0,81Hv} \frac{f_{tj}}{f_e} \quad (7.56)$$

Dans le cas d'un moment négatif, la formule (7.56) reste valable mais en remplaçant  $v$  par  $v'$ .

## 7.4 Exercices

### ◆ Exercice 1 :

Considérons un plancher à poutres comme schématisé dans la figure (7.6). Cet hourdis supporte une charge variable, de durée d'application supérieure à 24 h, de :  $Q = 10 \text{ kN/m}^2$ .

L'enrobage est de 3 cm, la résistance caractéristique du béton est  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et l'acier est de nuance FeE500.

1. Déterminer le moment ultime et le moment de service de dimensionnement des poutres ?
2. En considérant que la dalle participe à la résistance de la poutre, déterminer la largeur des ailes participante à la résistance de la poutre et donner une schématisation de la poutre en T ?
3. Dimensionner les armatures de la poutre à l'ELU fondamental ?

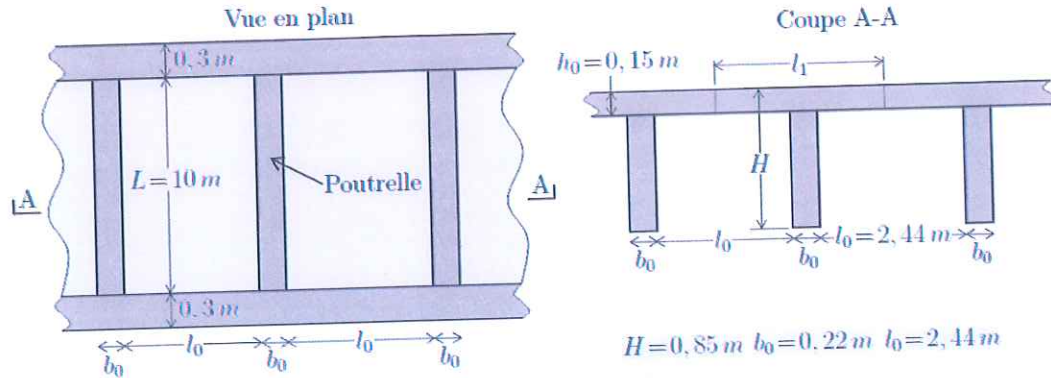


FIGURE 7.6 – Schéma de l'exercice 1

4. Si la dalle de la poutre ne participe à la résistance de celle-ci, dimensionner les armatures de la poutre rectangulaire à l'ELU ?
5. dimensionner la poutre en T à l'ELS en considérant que la fissuration est préjudiciable ?

⇒ **Solution 1 :**

1. La longueur  $l_1$  qui définit la largeur de la charge permanente transmise à chaque poutre est :

$$l_1 = l_0 + b_0 = 2,44 + 0,22 = 2,66 \text{ m} \quad (7.57)$$

la charge d'exploitation appliquée à la poutre par mètre linéaire ( $ml$ ) est :

$$q = l_1 Q = 2,66 \cdot 10 = 26,6 \text{ kN/ml} \quad (7.58)$$

La charge permanente à prendre en compte est composée des deux parties suivantes :

— Poids propre de la dalle :

$$g_d = l_1 h_0 \gamma_b = 2,66 \cdot 0,15 \cdot 25 \quad (7.59)$$

$$= 9,975 \text{ kN/ml} \quad (7.60)$$

— Poids propre de la nervure :

$$g_n = b_0 (H - h_0) \gamma_b = 0,22 \cdot (0,85 - 0,15) \cdot 25 \quad (7.61)$$

$$= 3,85 \text{ kN/ml} \quad (7.62)$$



la charge permanente est donc :

$$g = g_d + g_n = 9,975 + 3,85 = 13,825 \text{ kN/ml} \quad (7.63)$$

Le moment ultime de dimensionnement est donné donc par :

$$M_u = (1,35g + 1,5q) \frac{L^2}{8} \quad (7.64)$$

$$= (1,35 \cdot 13,825 + 1,5 \cdot 26,6) \frac{10^2}{8} \quad (7.65)$$

$$\rightarrow M_u = 732,047 \text{ kN.m} \quad (7.66)$$

Le moment de service est :

$$M_s = (g + q) \frac{L^2}{8} \quad (7.67)$$

$$= (13,825 + 26,6) \frac{10^2}{8} \quad (7.68)$$

$$\rightarrow M_s = 505,313 \text{ kN.m} \quad (7.69)$$

2. La largeur de l'aile de la table de compression qui participe à la résistance de la poutre est définie par :

$$l_a = \min \left( \frac{l_0}{2}; \frac{L}{10}; \frac{2}{3}x \right) \quad (7.70)$$

avec  $x = L/2 + 0,15 = 5 + 0,15 = 5,15 \text{ m}$ . d'où :

$$l_a = \min \left( \frac{2,44}{2}; \frac{10}{10}; \frac{2}{3} \cdot 5,15 \right) = \min (1,22; 1; 3,43) = 1 \text{ m} \quad (7.71)$$

Le schéma de la poutre en T à calculer est présenté dans la figure (7.7).

3. Calculons le moment de comparaison de la section en T :

$$Y_u = 1,25h_0 = 1,25 \cdot 0,15 = 0,1875 \text{ m} \quad (7.72)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (7.73)$$

$$\rightarrow M_0 = h_0 b f_{bu} \left( d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (7.74)$$

$$= 0,15 \cdot 2,22 \cdot 14,17 \left( 0,82 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.75)$$

$$= 3,515 \text{ MN.m} \quad (7.76)$$

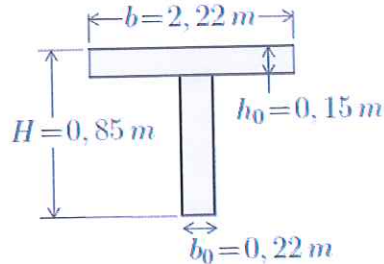


FIGURE 7.7 – Schéma de la poutre en T

On est donc sur le cas où :

$$M_u = 0,732 \text{ MN.m} \leq M_0 = 3,515 \text{ MN.m} \quad (7.77)$$

la section en T considérée peut être donc dimensionnée comme une section rectangulaire de dimensions  $(b \times H)$ . Pour cela on suit les étapes suivantes :

Le moment réduit est :

$$\mu = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} = \frac{0,732}{2,22 \cdot (0,82)^2 \cdot 14,17} = 0,0346 \quad (7.78)$$

on est sur le sous domaine :  $0 \leq \mu \leq 0,1042$  (pivot A)

Le calcul des armatures dans ce cas passe par la recherche de  $\alpha_u$  en résolvant l'équation suivante :

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (7.79)$$

$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + 19,862\alpha_u^2 + 0,2768\alpha_u - 0,1384 = 0 \quad (7.80)$$

en cherchant la solution comprise entre 0 et 0,167 on trouve :

$$\alpha_u = 0,0881 \quad (7.81)$$

on a d'un autre côté :

$$f_{su} = \frac{f_c}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.82)$$

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} = \frac{15 \cdot (0,0881)^2 - 40 \cdot (0,0881)^3}{3(1 - 0,0881)^2} = 0,0357 \quad (7.83)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u b d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,0357 \cdot 2,22 \cdot 0,82 \cdot 14,17}{434,783} \quad (7.84)$$

$$\rightarrow A_s = 21,18 \text{ cm}^2 \quad (7.85)$$

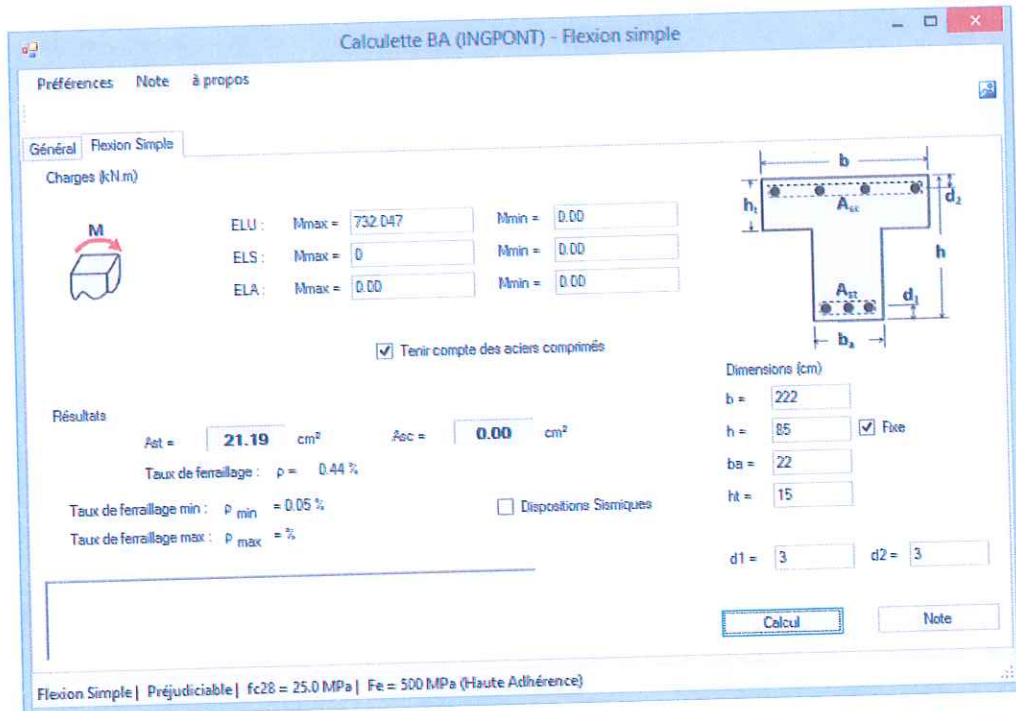


FIGURE 7.8 – Exercice 1 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

4. Dans le cas où la dalle ne participe pas à la résistance de la poutre, on est sur le cas d'une section rectangulaire de largeur  $b' = 0,22 \text{ m}$  et de hauteur  $H' = 0,7 \text{ m}$ .

Moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{b' d^2 f_{bu}} = \frac{0,732}{0,22 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17} = 0,5231 \quad (7.86)$$

cette valeur du moment réduit est supérieure à la valeur limite de dimensionnement en flexion simple qui est de 0,472. On peut recourir à une augmentation de la largeur de la poutre en adoptant par exemple :  $b' = 0,3 \text{ m}$ . Le nouveau moment réduit est :

$$\mu = \frac{0,732}{0,3 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17} = 0,3836 \quad (7.87)$$

on cherche le moment réduit limite :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,002174 = 2,174\% \quad (7.88)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,6168 \quad (7.89)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (7.90)$$

$$= 0,8 \cdot 0,6168(1 - 0,4 \cdot 0,6168) \quad (7.91)$$

$$= 0,372 \quad (7.92)$$

le domaine actif est donc :  $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$  (pivot B)

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e)b'd^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} = \frac{(0,3836 - 0,372) \cdot 0,3 \cdot (0,67)^2 \cdot 14,17}{434,783(0,67 - 0,03)} \quad (7.93)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,8 \text{ cm}^2 \quad (7.94)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e b' d f_{bu}}{f_{su}} = 0,00008 + \frac{0,8 \cdot 0,6168 \cdot 0,3 \cdot 0,67 \cdot 14,17}{434,783} \quad (7.95)$$

$$\rightarrow A_s = 33,12 \text{ cm}^2 \quad (7.96)$$

5. Vérification de la section en T à l'ELS :

Contrainte admissible du béton :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa} \quad (7.97)$$

moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left( d - \frac{H_0}{3} \right) = \frac{2,22 \cdot 0,15}{2} \cdot 15 \cdot \left( 0,82 - \frac{0,15}{3} \right) \quad (7.98)$$

$$\rightarrow M_0 = 1,923 \text{ MN.m} \quad (7.99)$$

on a donc :

$$M_s = 0,505 \text{ MN.m} \leq M_0 = 1,923 \text{ MN.m} \quad (7.100)$$

la section en T est à calculer comme section rectangulaire de dimensions ( $B \times H$ ).



Détermination de la position de la fibre neutre :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (7.101)$$

$$\rightarrow 2,22Y_s^2 + 2.15.0,002118Y_s - 2.15.0,002118.0,82 = 0 \quad (7.102)$$

$$\rightarrow 2,22Y_s^2 + 0,06354Y_s - 0,0521 = 0 \quad (7.103)$$

$$\rightarrow Y_s = 0,14 \text{ m} \quad (7.104)$$

moment d'inertie :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (7.105)$$

$$= \frac{2,22.0,14^3}{3} + 15.0,002118.(0,82 - 0,14)^2 \quad (7.106)$$

$$\rightarrow I = 0,0167 \text{ m}^4 \quad (7.107)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,505}{0,0167} = 30,24 \quad (7.108)$$

$$\rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.30,24.(0,82 - 0,14) = 308,45 \text{ MPa} \quad (7.109)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 30,24.0,14 = 4,234 \text{ MPa} \quad (7.110)$$

contrainte admissible des armatures :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[ \frac{2}{3}f_e; \max \left( \frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.111)$$

$$= \min \left[ \frac{2}{3}.500; \max \left( \frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (7.112)$$

$$= \min [333,33; \max(250; 201,63)] \quad (7.113)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \quad (7.114)$$

on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 4,234 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 308,45 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7.115)$$

La section doit être donc redimensionnée à l'ELS.

Dimensionnement à l'ELS :

Moment réduit à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,505}{2,22.0,82^2.250} = 0,001353 \quad (7.116)$$

déterminons le paramètre  $\alpha_s$  :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (7.117)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90.0,001353\alpha_s + 90.0,001353 = 0 \quad (7.118)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 0,122\alpha_s + 0,122 = 0 \quad (7.119)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,188 \quad (7.120)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,188}{15.(1-0,188)} .250 = 3,86 \text{ MPa} \quad (7.121)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 3,86 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (7.122)$$

Une section tendue  $A_s$  est suffisante dans ce cas :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{2,22.0,82.0,188^2}{2.15.(1-0,188)} = 0,00264 \text{ m}^2 \quad (7.123)$$

$$\rightarrow A_s = 26,4 \text{ cm}^2 \quad (7.124)$$

Ferraillage minimal :

Position du centre de gravité de la section en T :

$$v' = \frac{B_0H^2 + (B - B_0)H_0^2}{2(B_0H + (B - B_0)H_0)} = \frac{0,22.0,85^2 + 2.0,15^2}{2.(0,22.0,85 + 2.0,15)} \quad (7.125)$$

$$\rightarrow v' = 0,2094 \text{ m} = 20,94 \text{ cm} \quad (7.126)$$

$$v = H - v' = 0,85 - 0,2094 = 0,6406 \text{ m} = 64,06 \text{ cm} \quad (7.127)$$

le moment d'inertie est exprimé par :

$$I = B_0\frac{H^3}{3} + (B - B_0)\frac{H_0^3}{3} - (B_0H + (B - B_0)H_0)v'^2 \quad (7.128)$$

$$\rightarrow I = 0,22.\frac{0,85^3}{3} + 2.\frac{0,15^3}{3} - (0,22.0,85 + 2.0,15).0,2094^2 \quad (7.129)$$

$$\rightarrow I = 0,02593 \text{ m}^4 \quad (7.130)$$

la section d'armatures minimales est :

$$A_{\min} = \frac{I}{0,81Hv} \frac{f_{tj}}{f_e} = \frac{0,02593}{0,81.0,85.0,6406} \frac{2,1}{500} = 0,000247 \text{ m}^2 \quad (7.131)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 2,47 \text{ cm}^2 \quad (7.132)$$

La section d'armatures à disposer est donc :

$$A_s = 26,4 \text{ cm}^2 \quad (7.133)$$

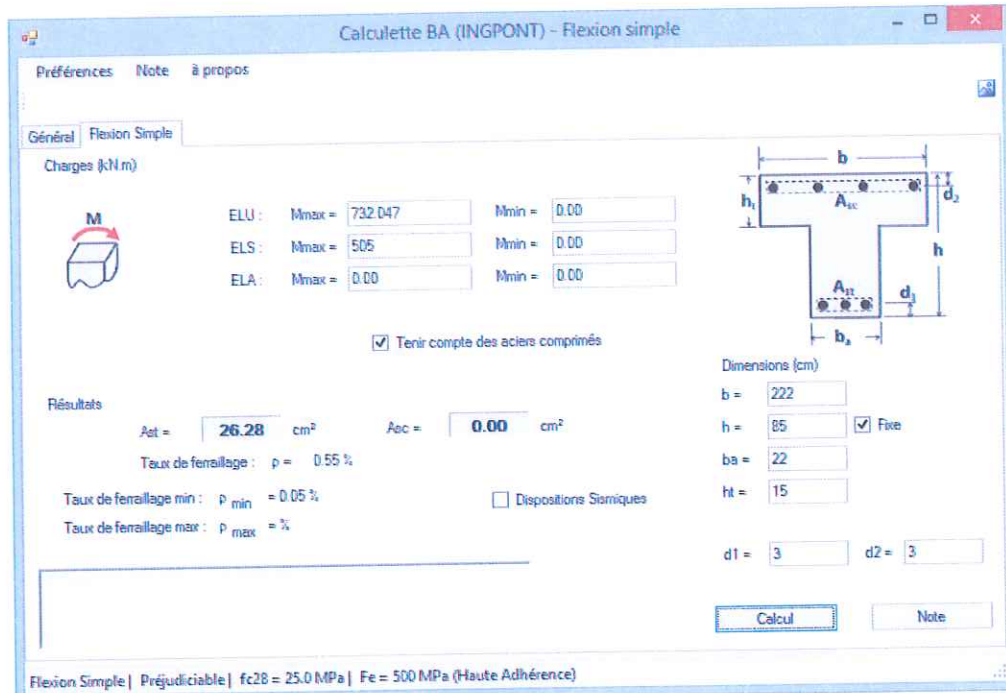


FIGURE 7.9 – Exercice 1 : Résultats de la calcul BA INGPONT

### •• Exercice 2 :

Soit une section d'une poutre en T réalisée en béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et armée par des aciers de nuance FeE500 (voir figure 7.10).

On prend une hauteur utile  $d = 59 \text{ cm}$  et un enrobage supérieur  $d' = 4 \text{ cm}$ .

1. Dimensionner la section à l'ELU avec un moment  $M_u = 0,5 \text{ MN.m}$  ?
2. Même chose avec un moment  $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$  ?

### ⇒ Solution 2 :

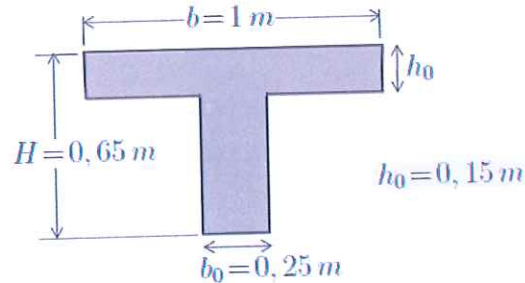


FIGURE 7.10 – Schéma de l'exercice 2

1. Calcul avec :  $M_u = 0,5 \text{ MN.m}$

Moment de comparaison :

$$Y_u = 1,25h_0 = 1,25 \cdot 0,15 = 0,1875 \text{ m} \quad (7.134)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (7.135)$$

$$\rightarrow M_0 = h_0 b f_{bu} \left( d - \frac{h_0}{2} \right) = 0,15 \cdot 1 \cdot 14,17 \cdot \left( 0,59 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.136)$$

$$\rightarrow M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.137)$$

d'où pour ce cas :

$$M_u = 0,5 \text{ MN.m} \leq M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.138)$$

La section en T peut être dimensionnée comme une section rectangulaire de dimensions  $(b \times H)$  :

$$\mu = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} = \frac{0,5}{1 \cdot 0,59^2 \cdot 14,17} = 0,1014 \quad (7.139)$$

on est dans le sous domaine :

$$0 \leq \mu \leq 0,1042 \quad (\text{Pivot A}) \quad (7.140)$$

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (7.141)$$

$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4 \cdot 0,1014)\alpha_u^2 \quad (7.142)$$

$$+ 8 \cdot 0,1014\alpha_u - 4 \cdot 0,1014 = 0 \quad (7.143)$$



$$\rightarrow 15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + 19,594\alpha_u^2 + 0,811\alpha_u - 0,406 = 0 \quad (7.144)$$

la solution de l'équation appartenant à  $[0; 0,167]$  est :

$$\alpha_u = 0,164 \quad (7.145)$$

calcul de la section d'armature :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.146)$$

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} = \frac{15 \cdot 0,164^2 - 40 \cdot 0,164^3}{3(1 - 0,164)^2} = 0,1083 \quad (7.147)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u b d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,1083 \cdot 1.0 \cdot 59.14,17}{434,783} = 0,002082 \text{ m}^2 \quad (7.148)$$

$$\rightarrow A_s = 20,82 \text{ cm}^2 \quad (7.149)$$

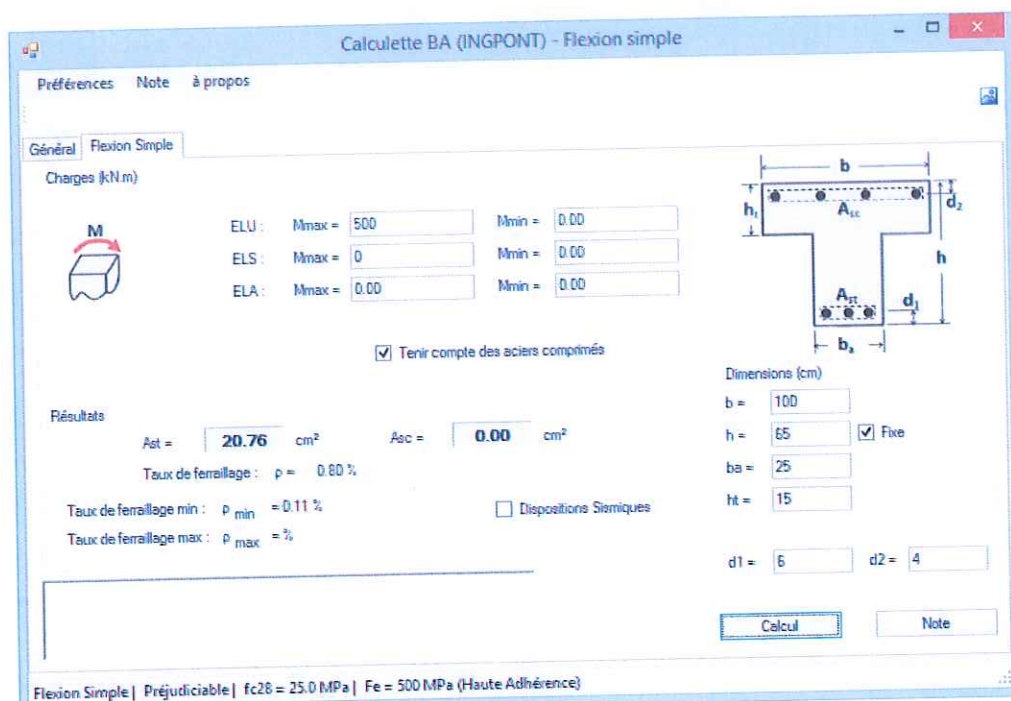


FIGURE 7.11 – Exercice 2 : Résultats de la calculatrice BA INGPONT

2. Calcul avec :  $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$  :

On a :

$$M_u = 1,2 \text{ MN.m} > M_0 = 1,095 \text{ MN.m} \quad (7.150)$$

On a donc une vraie section en T.

$$\bar{M} = M_u - f_{bu} h_0 (b - b_0) \left( d - \frac{h_0}{2} \right) \quad (7.151)$$

$$= 1,2 - 14,17 \cdot 0,15 \cdot (1 - 0,25) \cdot \left( 0,59 - \frac{0,15}{2} \right) \quad (7.152)$$

$$\rightarrow \bar{M} = 0,379 \text{ MN.m} \quad (7.153)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{\bar{M}}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{0,379}{0,25 \cdot 0,59^2 \cdot 14,17} = 0,307 \quad (7.154)$$

calcul de  $\mu_e$  :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,002174 = 2,174 \text{‰} \quad (7.155)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,617 \quad (7.156)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8 \alpha_e (1 - 0,4 \alpha_e) = 0,8 \cdot 0,617 (1 - 0,4 \cdot 0,617) \quad (7.157)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,372 \quad (7.158)$$

on a donc :

$$\mu = 0,307 \leq \mu_e = 0,372 \quad (7.159)$$

d'où une section tendue  $A_s$  est suffisante.

Calcul de  $\bar{A}_s$  :

On est sur :  $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$  (Pivot B)

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,307}) = 0,4734 \quad (7.160)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8 \alpha_u = 0,8 \cdot 0,4734 = 0,379 \quad (7.161)$$

$$\rightarrow \bar{A}_s = \frac{\beta_u b_0 d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,379 \cdot 0,25 \cdot 0,59 \cdot 14,17}{434,783} = 0,001822 \text{ m}^2 \quad (7.162)$$

la section théorique est :

$$A_s = \frac{f_{bu} h_0 (b - b_0) + \bar{A}_s \bar{\sigma}_s}{\sigma_s} \quad (\sigma_s = \bar{\sigma}_s = f_{su}) \quad (7.163)$$

$$= \frac{f_{bu} h_0 (b - b_0)}{f_{su}} + \bar{A}_s \quad (7.164)$$

$$= \frac{14,17,0,15(1 - 0,25)}{434,783} + 0,001822 \quad (7.165)$$

$$= 0,005488 \text{ m}^2 \quad (7.166)$$

$$\rightarrow A_s = 54,88 \text{ cm}^2 \quad (7.167)$$

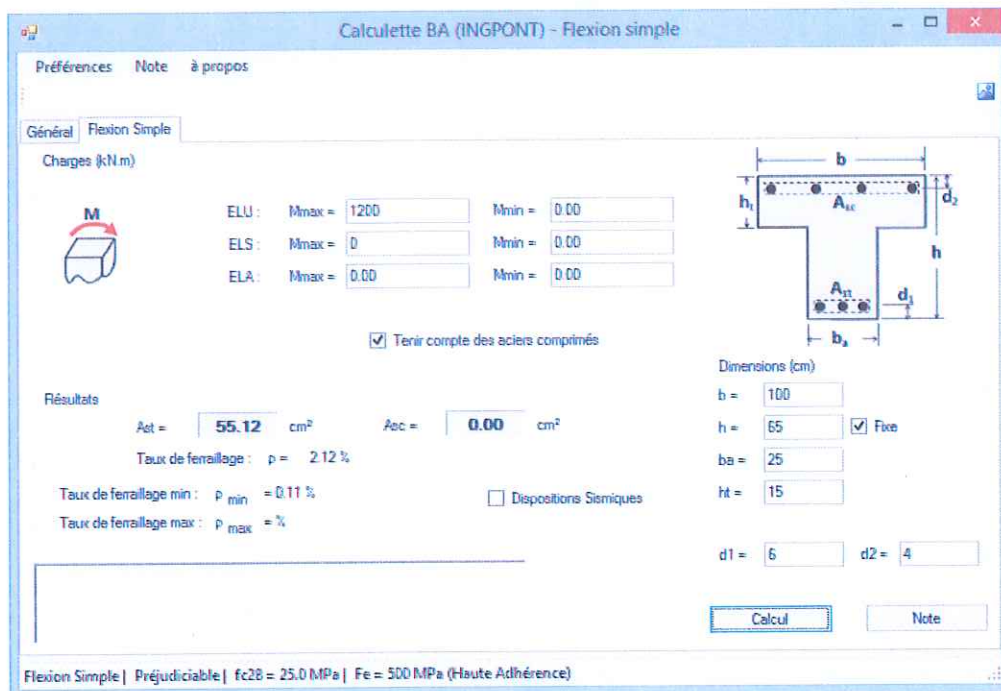


FIGURE 7.12 – Exercice 2 : Résultats de la calcul BA INGPONT

### ⇨ Exercice 3 :

Reprenons le même exemple de l'exercice 2 en supposant que le calcul a été réalisé pour un moment ultime  $M_u = 1,2 \text{ MN.m}$ .

On prend en compte l'application d'un moment de service  $M_s = 0,7 \text{ MN.m}$  et on considère que la fissuration est préjudiciable.

Vérifier à l'ELS la section déjà calculée à l'ELU et redimensionner la section à l'ELS si nécessaire ?

⇒ **Solution 3 :**

Vérification de la section en T à l'ELS :

Contrainte admissible du béton :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa} \quad (7.168)$$

moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{bh_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left( d - \frac{h_0}{3} \right) = \frac{1,0 \cdot 15}{2} \cdot 15 \cdot \left( 0,59 - \frac{0,15}{3} \right) \quad (7.169)$$

$$\rightarrow M_0 = 0,608 \text{ MN.m} \quad (7.170)$$

on a donc :

$$M_s = 0,7 \text{ MN.m} > M_0 = 0,608 \text{ MN.m} \quad (7.171)$$

On a donc une vraie section en T.

Détermination de la position de la fibre neutre :

$$b_0 Y_s^2 + [2h_0(b-b_0) + 2n(A_s + A'_s)] Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + h_0^2(b-b_0)] = 0 \quad (7.172)$$

$$\rightarrow 0,25 Y_s^2 + [2,0 \cdot 15 \cdot (1 - 0,25) + 2 \cdot 15 \cdot 0,005488] Y_s - [2 \cdot 15 \cdot 0,005488 \cdot 0,59 + 0,15^2 \cdot (1 - 0,25)] = 0 \quad (7.173)$$

$$\rightarrow 0,25 Y_s^2 + 0,3896 Y_s - 0,114 = 0 \quad (7.174)$$

$$\rightarrow Y_s = 0,252 \text{ m} \quad (7.175)$$

moment d'inertie :

$$I = \frac{b_0}{3} Y_s^3 + \frac{(b-b_0)h_0^3}{12} + (b-b_0)h_0 \left( Y_s - \frac{h_0}{2} \right)^2 + n[A_s(d-Y_s)^2 + A'_s(Y_s-d')^2] \quad (7.176)$$

$$= \frac{0,25}{3} \cdot 0,252^3 + \frac{(1-0,25) \cdot 0,15^3}{12} + (1-0,25) \cdot 0,15 \cdot \left( 0,252 - \frac{0,15}{2} \right)^2 + 15 \cdot 0,005488 \cdot (0,59 - 0,252)^2 \quad (7.177)$$



$$\rightarrow I = 0,01447 m^4 \quad (7.178)$$

calcul des contraintes :

$$K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,7}{0,01447} = 48,376 \quad (7.179)$$

$$\rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.48,376.(0,59 - 0,252) = 245,27 MPa \quad (7.180)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 48,376.0,252 = 12,19 MPa \quad (7.181)$$

contrainte admissible des armatures :

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[ \frac{2}{3}f_e; \max \left( \frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.182)$$

$$= \min \left[ \frac{2}{3}.500; \max \left( \frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (7.183)$$

$$= \min [333, 33; \max (250; 201, 63)] \quad (7.184)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 250 MPa \quad (7.185)$$

on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 12,19 MPa \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 MPa \\ \sigma_s = 245,27 MPa \leq \bar{\sigma}_s = 250 MPa \end{cases} \quad (7.186)$$

La vérification est satisfaite et le dimensionnement à l'ELS n'est pas nécessaire.

La section  $A_s$  calculée à l'ELU est à garder :

$$A_s = 54,88 cm^2 \quad (7.187)$$

#### •• Exercice 4 :

Considérant une poutre en T comme schématisé dans la figure (7.13) qui subit les moments suivants :  $M_u = 20\,000 kN.m$  et  $M_s = 17\,000 kN.m$ .

on considère qu'on a un béton dont  $f_{c28} = 30 MPa$ , un acier  $f_e = 500 MPa$ , un enrobage  $c = 5 cm$  et la fissuration est jugée préjudiciable.

Réaliser le calcul de ferrailage de la section à l'ELU et à l'ELS ?

#### •• Solution 4 :

Calcul à l'ELU :

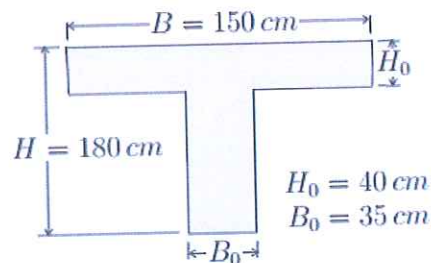


FIGURE 7.13 – Exercice 4 : Géométrie de la section en T

Contraintes limites dans le béton et l'acier :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 30}{1,5} = 17 \text{ MPa} \quad (7.188)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa} \quad (7.189)$$

Le moment de comparaison à l'ELU est :

$$M_0 = H_0 B f_{bu} \left( d - \frac{H_0}{2} \right) = 0,4 \cdot 1,5 \cdot 17 \cdot \left( 1,75 - \frac{0,4}{2} \right) \quad (7.190)$$

$$\rightarrow M_0 = 15,81 \text{ MN.m} \quad (7.191)$$

on a :

$$M_u = 20 \text{ MN.m} > M_0 = 15,81 \text{ MN.m} \quad (7.192)$$

on est donc dans le cas d'une vraie section en T.

On calcule la section en T comme une section rectangulaire de dimensions  $(B_0 \times H)$  sous le moment modifié  $\bar{M}$  :

$$\bar{M} = M_u - f_{bu} H_0 (B - B_0) \left( d - \frac{H_0}{2} \right) \quad (7.193)$$

$$= 20 - 17 \cdot 0,4 (1,5 - 0,35) \left( 1,75 - \frac{0,4}{2} \right) \quad (7.194)$$

$$= 7,879 \text{ MN.m} \quad (7.195)$$

moment réduit :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{B_0 d^2 f_{bu}} = \frac{7,879}{0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 17} = 0,4324 \quad (7.196)$$

calcul du moment réduit limite :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200000} = 0,002174 = 2,174 \text{‰} \quad (7.197)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,6168 \quad (7.198)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,6168(1 - 0,4 \cdot 0,6168) = 0,3717 \quad (7.199)$$

On est donc sur le cas :  $\mu_e = 0,3717 \leq \mu = 0,4324 \leq 0,472$

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B_0 d^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} = \frac{(0,4324 - 0,3717) \cdot 0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 17}{434,783 \cdot (1,75 - 0,05)} \quad (7.200)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,001496 \text{ m}^2 \quad (7.201)$$

$$\bar{A}_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B_0 d f_{bu}}{f_{su}} = 0,001496 + \frac{0,8 \cdot 0,6168 \cdot 0,35 \cdot 1,75 \cdot 17}{434,783} \quad (7.202)$$

$$\rightarrow \bar{A}_s = 0,013313 \text{ m}^2 \quad (7.203)$$

$$A_s = \bar{A}_s + H_0(B - B_0) \frac{f_{bu}}{f_{su}} = 0,013313 + 0,4 \cdot (1,5 - 0,35) \cdot \frac{17}{434,783} \quad (7.204)$$

$$\rightarrow A_s = 0,031299 \text{ m}^2 \quad (7.205)$$

Les sections d'acier à l'ELU sont donc comme suit :

$$A_s = 0,031299 \text{ m}^2 = 312,99 \text{ cm}^2 \quad (7.206)$$

$$A'_s = 0,001496 \text{ m}^2 = 14,96 \text{ cm}^2 \quad (7.207)$$

Vérification à l'ELS :

Contrainte limite du béton à l'ELS :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{c28} = 0,6 \cdot 30 = 18 \text{ MPa} \quad (7.208)$$

Calcul du moment de comparaison :

$$M_0 = \frac{BH_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left( d - \frac{H_0}{3} \right) = \frac{1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 18 \cdot \left( 1,75 - \frac{0,4}{3} \right) = 8,73 \text{ MN.m} \quad (7.209)$$

On est sur le cas :  $M_s = 17 \text{ MN.m} > M_0 = 8,73 \text{ MN.m}$

En conséquence, on est sur le cas d'une vraie section en T.

Calcul de la position de la fibre neutre  $Y_s$  :

$$B_0 Y_s^2 + [2H_0(B - B_0) + 2n(A_s + A'_s)]Y_s - [2n(A_s d + A'_s d') + H_0^2(B - B_0)] = 0 \quad (7.210)$$

$$\rightarrow 0,35 Y_s^2 + [2 \cdot 0,4 \cdot (1,5 - 0,35) + 2 \cdot 15(0,031299 + 0,001496)]Y_s - [2 \cdot 15(0,031299 \cdot 1,75 + 0,001496 \cdot 0,05) + 0,4^2(1,5 - 0,35)] = 0 \quad (7.211)$$

$$\rightarrow 0,35 Y_s^2 + 1,904 Y_s - 1,829 = 0 \quad (7.212)$$

les deux racines de l'équation sont :  $Y_s = 0,833 \text{ m}$  et  $Y_s = -6,273 \text{ m}$   
la solution physique est :  $Y_s = 0,833 \text{ m}$

Le moment d'inertie est :

$$I = \frac{B_0}{3} Y_s^3 + \frac{(B - B_0) H_0^3}{12} + (B - B_0) H_0 \left( Y_s - \frac{H_0}{2} \right)^2 + n[A_s(d - Y_s)^2 + A'_s(Y_s - d')^2] \quad (7.213)$$

$$= \frac{0,35}{3} 0,833^3 + \frac{(1,5 - 0,35) \cdot 0,4^3}{12} + (1,5 - 0,35) \cdot 0,4 \cdot \left( 0,833 - \frac{0,4}{2} \right)^2 + 15[0,031299(1,75 - 0,833)^2 + 0,001496(0,833 - 0,05)^2] \quad (7.214)$$

$$= 0,66643 \text{ m}^4 \quad (7.215)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{17}{0,66643} = 25,509 \quad (7.216)$$

contraintes dans le béton et les aciers :

$$\sigma_{bc} = K Y_s = 25,509 \cdot 0,833 = 21,249 \text{ MPa} \quad (7.217)$$

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15 \cdot 25,509(1,75 - 0,833) = 350,876 \text{ MPa} \quad (7.218)$$

$$\sigma'_s = nK(Y_s - d') = 15 \cdot 25,509(0,833 - 0,05) = 299,603 \text{ MPa} \quad (7.219)$$

On a une fissuration préjudiciable, la contrainte limite de l'acier est définie par :

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}'_s = \min \left[ \frac{2}{3} f_e; \max \left( \frac{f_e}{2}; 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (7.220)$$

$$= \min \left[ \frac{2}{3} \cdot 500; \max \left( \frac{500}{2}; 110 \sqrt{1,6 \cdot 2,4} \right) \right] \quad (7.221)$$

$$= \min [333,333; \max(250; 215,555)] \quad (7.222)$$



$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}'_s = 250 \text{ MPa} \quad (7.223)$$

Comparaison des contraintes développées avec les contraintes limites :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 21,219 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 18 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 350,876 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250 \text{ MPa} \\ \sigma'_s = 299,603 \text{ MPa} > \bar{\sigma}'_s = 250 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7.224)$$

on constate que les contraintes limites des matériaux sont dépassées et la vérification à l'ELS n'est donc pas satisfaite.

Calcul à l'ELS :

On calcule les paramètres :

$$\gamma = \frac{H_0}{d} = \frac{0,4}{1,75} = 0,2286 \quad (7.225)$$

$$\theta = \frac{B}{B_0} = \frac{1,5}{0,35} = 4,286 \quad (7.226)$$

$$\delta = \frac{d'}{d} = \frac{0,05}{1,75} = 0,02857 \quad (7.227)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{B_0 d^2 \bar{\sigma}_s} = \frac{17}{0,35 \cdot 1,75^2 \cdot 250} = 0,06344 \quad (7.228)$$

Recherche du paramètre  $\alpha_s$  :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90\mu_s + 3\gamma(2-\gamma)(\theta-1)]\alpha_s + 90\mu_s - \gamma^2(\theta-1)(2\gamma-3) = 0 \quad (7.229)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - [90 \cdot 0,06344 + 3 \cdot 0,2286 \cdot (2 - 0,2286) \cdot (4,286 - 1)]\alpha_s + 90 \cdot 0,06344 - 0,2286^2 \cdot (4,286 - 1) \cdot (2 \cdot 0,2286 - 3) = 0 \quad (7.230)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 9,7015\alpha_s + 6,1463 = 0 \quad (7.231)$$

la solution de l'équation appartenant à l'intervalle ]0; 1[ est :

$$\alpha_s = 0,5557 \quad (7.232)$$

La contrainte dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,5557}{15 \cdot (1 - 0,5557)} 250 = 20,85 \text{ MPa} \quad (7.233)$$

on est sur le cas :

$$\sigma_{bc} = 20,85 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 18 \text{ MPa} \quad (7.234)$$

Calcul avec armatures comprimées :

$$\alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} = \frac{15.18}{15.18 + 250} = 0,5192 \quad (7.235)$$

$$\mu_l = \frac{\gamma(\theta - 1)[3\alpha_l(2 - \gamma) + \gamma(2\gamma - 3)] + \alpha_l^2(3 - \alpha_l)}{6n(1 - \alpha_l)} \quad (7.236)$$

$$= \{0,2286(4,286 - 1)[3 \cdot 0,5192(2 - 0,2286) + 0,2286(2 \cdot 0,2286 - 3)] + 0,5192^2(3 - 0,5192)\} / \{6 \cdot 15(1 - 0,5192)\} \quad (7.237)$$

$$= 0,0533 \quad (7.238)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.239)$$

$$= \frac{(0,06344 - 0,0533)(1 - 0,5192)}{(0,5192 - 0,02857)(1 - 0,02857)} \cdot 0,35 \cdot 1,75 \quad (7.240)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,006265 \text{ m}^2 = 62,65 \text{ cm}^2 \quad (7.241)$$

$$A_s = \frac{2n(1 - \alpha_l)(\mu_s - \mu_l) + (1 - \delta)[\alpha_l^2 + \gamma(\theta - 1)(2\alpha_l - \gamma)]}{2n(1 - \alpha_l)(1 - \delta)} B_0 d \quad (7.242)$$

$$= \{2 \cdot 15 \cdot (1 - 0,5192)(0,06344 - 0,0533) + (1 - 0,02857)[0,5192^2 + 0,2286 \cdot (4,286 - 1) \cdot (2 \cdot 0,5192 - 0,2286)]\} / \{2 \cdot 15 \cdot (1 - 0,5192)(1 - 0,02857)\} \quad (7.243)$$

$$\rightarrow A_s = 0,043671 \text{ m}^2 = 436,71 \text{ cm}^2 \quad (7.244)$$

Le ferrailage à adopter pour la poutre en T est comme suit :

$$\begin{cases} A_s = 436,71 \text{ cm}^2 \\ A'_s = 62,65 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad (7.245)$$



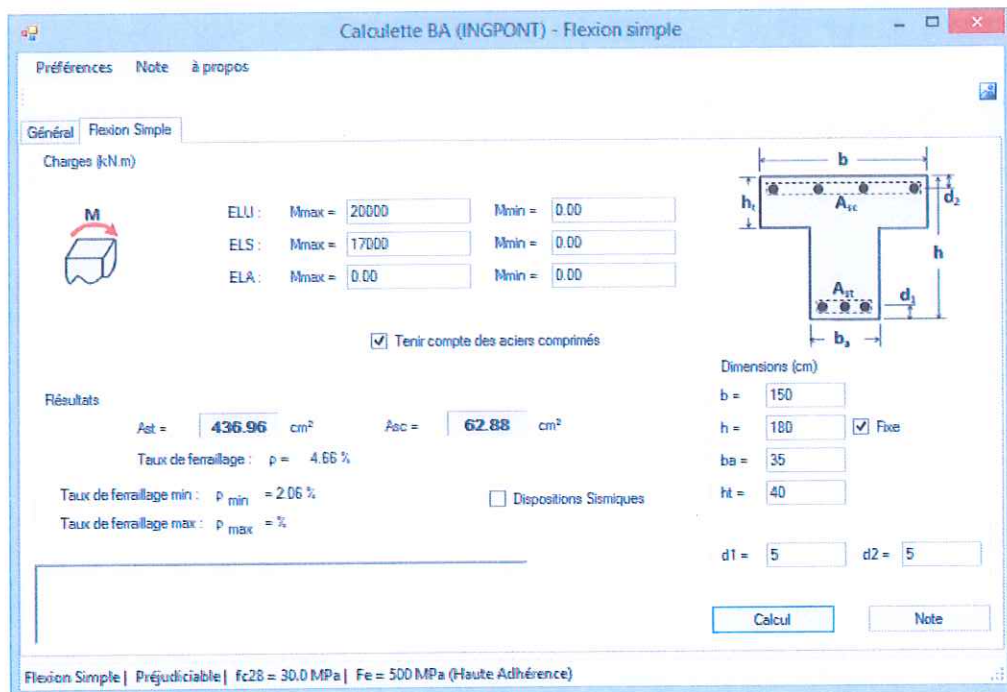


FIGURE 7.14 – Exercice 4 : Résultats du logiciel INGPONT

# Chapitre 8

## Calcul par rapport à l'effort tranchant

### 8.1 Introduction

Dans les structures en béton armé, on a besoin d'une façon général d'un ferrailage transversal (cadres, étriers, épingles, cerces, ...) pour reprendre convenablement les contraintes tangentiels d'efforts tranchants (voir figure 8.1).

Dans ce chapitre on vas se focaliser sur la méthode de calcul du ferrailage transversal, en cas de besoin, pour reprendre les efforts de traction dus à l'effort tranchant.

Des justifications complémentaires des appuis des poutres seront présentées ainsi que les dispositions constructives concernant les armatures transversales.

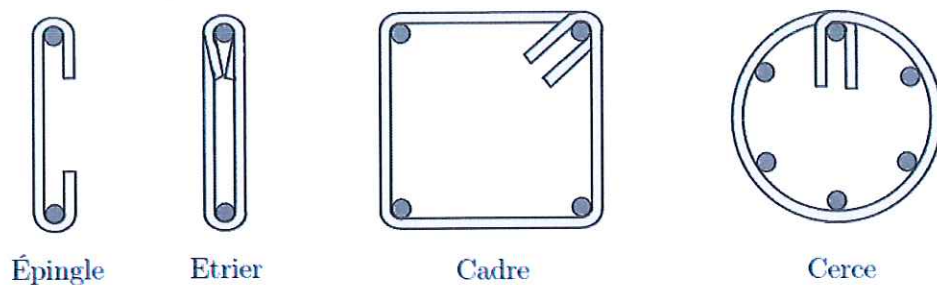


FIGURE 8.1 – Géométries du ferrailage transversal



Théoriquement, le calcul des armatures de coùture doit se faire à l'ELU et l'ELS. Pourtant, en pratique, les phénomènes de fissuration et de déformation dues à l'effort tranchant sont toujours moindres à l'ELS par rapport à l'ELU. Pour cette raison, le calcul des armatures de l'effort tranchant n'est prévu réglementairement qu'à l'ELU.

La vérification à l'ELS se traduit uniquement par des dispositions constructives à respecter.

## 8.2 Contrainte de cisaillement (tangente) conventionnelle

Prenons une section droite d'une poutre contenant une section d'armatures tendues  $A_s$  et qui subit un moment fléchissant  $M_u$  (8.2). La section de la poutre est composée d'une partie supérieure comprimée et d'une partie inférieure tendue.

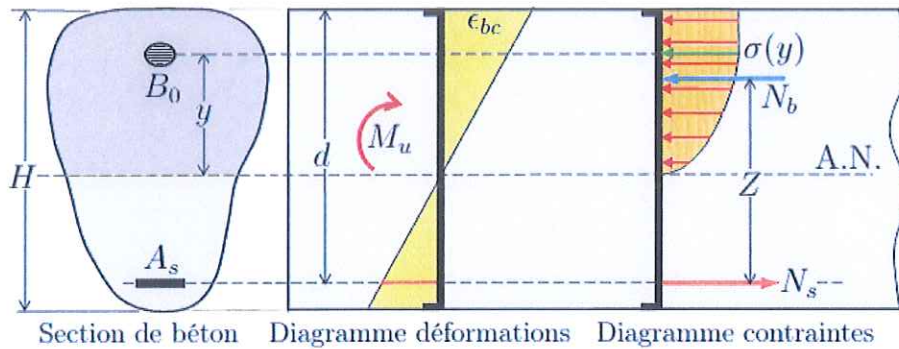


FIGURE 8.2 – Section d'une poutre sollicitée en flexion

### 8.2.1 Contraintes de cisaillement dans la partie comprimée de la section

On peut écrire :

$$\sigma(y) = \frac{M_u y}{I} \tag{8.1}$$

$y$  étant l'ordonnée d'une fibre de matière choisie arbitrairement dans la zone comprimée du béton (8.2) et  $I$  étant le moment d'inertie quadratique de la

section homogène du béton.

La résultante s'exerçant sur la fibre de section  $B_0$  est :

$$N_0 = \int_{B_0} \sigma(y) dB = \frac{M_u}{I} \int_{B_0} y dB = \frac{M_u}{I} S_0 \quad (8.2)$$

L'effort  $N_0$  tend à faire glisser la fibre  $B_0$  par rapport à la fibre neutre.

Par unité de longueur  $dx$ , l'effort de glissement  $g$  est donné par :

$$g = \frac{dN_0}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{M_u}{I} S_0 \right) = \frac{S_0}{I} \frac{dM_u}{dx} \quad (8.3)$$

$$\rightarrow g = \frac{V_u}{I} S_0 \quad (8.4)$$

Sous l'effort  $g$ , le prisme défini par la section  $B_0$  et de longueur élémentaire  $dx$  a tendance à se déplacer le long d'une surface de glissement donnée par :

$$S_{gliss} = u dx \quad (8.5)$$

où  $u$  est le périmètre de la section de la fibre  $B_0$ .

En supposant la contrainte tangentielle  $\tau_u$  uniformément répartie, on peut écrire :

$$\tau_u = \frac{dN_0}{u dx} = \frac{g}{u} = \frac{V_u S_0}{I u} \quad (8.6)$$

Si on prend pour  $B_0$  toute la largeur de la section  $b_0$ , le périmètre  $u$  qui subit des contraintes est égal à  $b_0$ , d'où dans ce cas :

$$\tau_u = \frac{V_u S_0}{I b_0} \quad (8.7)$$

Si on prend en plus toute la section comprimée homogène et d'après la formule (8.2), on a :

$$N_b = \frac{M_u}{I} S_1 \quad (8.8)$$

où  $S_1$  est le moment statique de la section homogène comprimée.

On a également :

$$M_u = N_b Z \rightarrow N_b = \frac{M_u}{I} S_1 = \frac{M_u}{Z} \quad (8.9)$$

$$\rightarrow Z = \frac{I}{S_1} \quad (8.10)$$

en considérant (8.7), on obtient donc :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.11)$$

### 8.2.2 Contraintes de cisaillement dans la partie tendue de la section

Dans la zone tendue, l'effort normal est annulé à cause de la fissuration du béton. Il y a donc cisaillement pur et l'effort de glissement doit équilibrer dans ce cas toute la section comprimée du béton.

D'une part, on a :

$$dM_u = Z dN_b \quad (8.12)$$

d'autre part, on a sur une longueur  $dx$  de la poutre :

$$dN_b = \tau_u b_0 dx \quad (8.13)$$

$$\rightarrow dN_b = \frac{dM_u}{Z} = \frac{dM_u}{dx} \frac{dx}{Z} = V_u \frac{dx}{Z} = \tau_u b_0 dx \quad (8.14)$$

$$\rightarrow \tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.15)$$

### 8.2.3 Récapitulatif des deux cas

A la fin des deux dernières parties, on a justifié que :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 Z} \quad (8.16)$$

on considère en général que :  $Z \approx 0,9d$ . D'où :

$$\tau_u = \frac{V_u}{0,9b_0 d} \quad (8.17)$$

Réglementairement, pour la justification de l'âme d'une poutre, le BAEL prend pour la contrainte tangente :

$$\boxed{\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d}} \quad (8.18)$$

avec :

$V_u$  : valeur de l'effort tranchant dans la section considérée ;  
 $b_0$  : largeur de l'âme (largeur tout court dans le cas d'une section rectangulaire ; largeur de la nervure dans le cas d'une section en T) ;  
 $d$  : hauteur utile ;  
 $\tau_u$  : contrainte tangente conventionnelle (dite de comparaison).

### 8.3 Effort tranchant à prendre en compte dans les calculs

Pour tenir compte des effets de transmission des charges sur les appuis, l'effort tranchant à prendre en compte dans le calcul est détaillé ci après.

#### 8.3.1 Charges réparties

La charge répartie est négligée sur une longueur  $\frac{H}{2}$  à partir de l'appui et celles situées entre  $\frac{H}{2}$  et  $\frac{3H}{2}$  développent un effort tranchant égal à  $\frac{2q_u}{3H}x$  (voir figure 8.3).

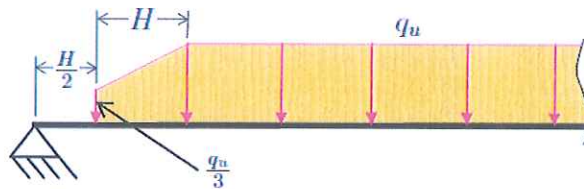


FIGURE 8.3 – Distribution à prendre en compte pour une charge répartie

Soit  $V_{u_{\max}}$  l'effort tranchant au niveau de l'appui donné par la distribution  $q_u$  non réduite au niveau de l'appui. On a donc :

$$V_{u_{\max}} = \frac{q_u L}{2} \quad (8.19)$$

l'effort tranchant maximal de calcul est donné, selon le schéma de la figure



(8.3), par :

$$V_{u0} = V_{u_{\max}} - q_u \frac{H}{2} - \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{3H}{2}} \left( q_u - \frac{2q_u}{3H}x \right) dx \quad (8.20)$$

$$= V_{u_{\max}} - q_u \frac{H}{2} - q_u H + \frac{2q_u}{3H} \cdot \frac{1}{2} \left( \left( \frac{3H}{2} \right)^2 - \left( \frac{H}{2} \right)^2 \right) \quad (8.21)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2}q_u H + \frac{q_u}{3H} \left( \frac{9H^2}{4} - \frac{H^2}{4} \right) \quad (8.22)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2}q_u H + \frac{q_u}{3H} \cdot 2H^2 \quad (8.23)$$

$$= V_{u_{\max}} - \frac{3}{2}q_u H + \frac{2}{3}q_u H \quad (8.24)$$

$$\rightarrow V_{u0} = \frac{q_u L}{2} - \frac{5}{6}q_u H \quad (8.25)$$

La réduction de l'effort tranchant est de  $\frac{5}{6}q_u H$  et cela nous permet de tenir compte du phénomène de transmission des charges (parce qu'une partie passe directement dans l'appui et n'affecte pas l'effort tranchant dans la poutre).

### 8.3.2 Charges concentrées

Pour une charge concentrée  $Q_u$  située à une distance  $a$  de l'appui, on adopte la réduction suivante :

$$Q_u = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \frac{H}{2} \\ \frac{2a}{3H}Q_u & \text{si } \frac{H}{2} \leq a \leq \frac{3H}{2} \end{cases} \quad (8.26)$$

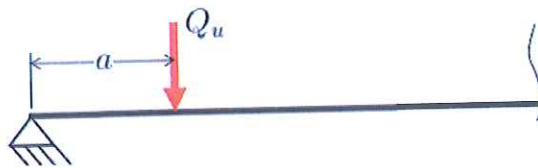


FIGURE 8.4 – Charge concentrée

## 8.4 Contrainte tangente limite ultime

Le BAEL considère pour la détermination de l'état limite ultime du béton de l'âme d'une section courante les deux cas suivants :

- Armatures transversales droites ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ );
- Armatures transversales inclinées à  $45^\circ$  ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ).

#### 8.4.1 Armatures transversales droites ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ )

- Fissuration peu préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 20 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.27)$$

- Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 15 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.28)$$

#### 8.4.2 Armatures transversales inclinées à $45^\circ$ ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$ )

On adopte dans ce cas l'expression suivante indépendamment de la préjudiciabilité du milieu :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 27 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 7 \text{ MPa} \right\} \quad (8.29)$$

#### 8.4.3 Pièces dont toutes les sections droites sont comprimées (poteaux)

Dans ce cas on adopte pour  $\bar{\tau}_u$  :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0, 06 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 1,5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.30)$$

#### *Remarque :*

*Pour les armatures inclinées avec un angle  $\alpha \in [45^\circ; 90^\circ]$ , on procède par interpolation sur les valeurs précédentes.*

## 8.5 Vérification du cisaillement du béton de l'âme

La contrainte du béton  $\tau_u$  doit simplement vérifier, dans tous les cas, la condition suivante :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.31)$$

## 8.6 Calcul des armatures transversales d'une poutre

### 8.6.1 Comportement local de l'âme sous l'action de l'effort tranchant

On considère un parallélépipède élémentaire de la poutre dont les faces sont parallèles aux axes principaux de la poutre et dont la longueur est égale à la largeur de la section (figure 8.5).

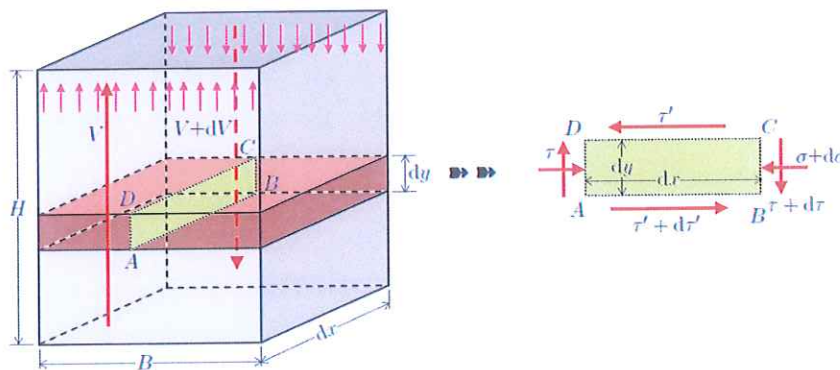


FIGURE 8.5 – État des contraintes en effort tranchant

Lorsqu'on choisit  $dy = dx$ , l'équilibre du domaine  $ABCD$  en rotation permet de retrouver le principe de réciprocité des contraintes tangentes :  $\tau = \tau'$ .

Exprimons les contraintes principales associées à un état de contrainte de pur cisaillement en supposant  $\sigma = 0$  (voir figure 8.6).

Il est facile de remarquer, en projetant les contraintes sur les diagonales, que :

- La diagonale  $BD$  subit des contraintes de compression ;
- La diagonale  $AC$  subit des contraintes de traction.

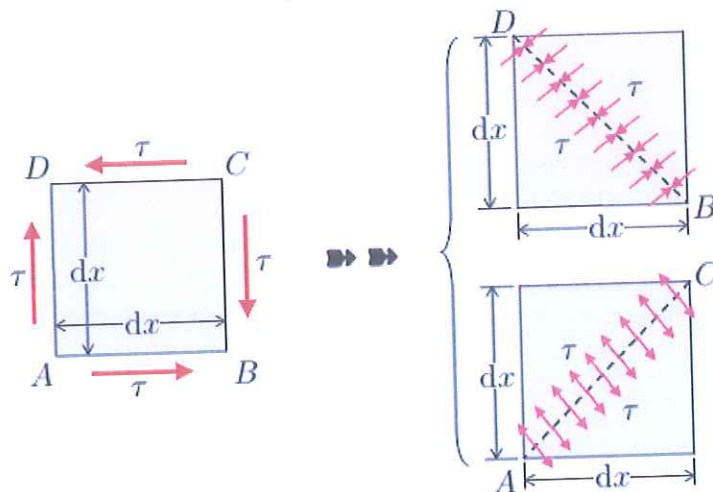


FIGURE 8.6 – Contraintes principales générées par un cisaillement

### 8.6.2 Théorie de la poutre de RITTER-MORSH

Après fissuration résultant de l'action de l'effort tranchant, la poutre est assimilée à un treillis de RITTER-MORSH (figure 8.7) constitué par :

- Une membrure comprimée ❶ correspondant à la zone du béton comprimé avec éventuellement des aciers comprimés ;
- Une membrure tendue ❷ correspondant aux aciers tendus ;
- Des diagonales tendues ❸ correspondant aux cours ou aux barres relevées inclinées d'un angle  $\alpha$  à partir de l'horizontale ;
- Des diagonales comprimées ❹ qui correspondent aux bielles de béton d'angle  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale.

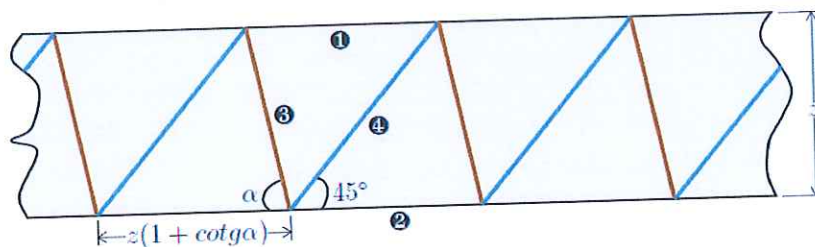


FIGURE 8.7 – Poutre treillis de RITTER-MORSH



Détermination de la largeur d'une maille (figure 8.8) :

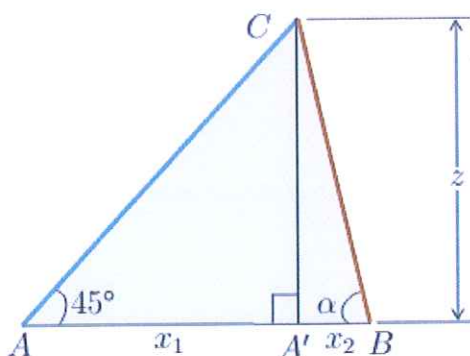


FIGURE 8.8 – Dimensions d'une maille du modèle

Le triangle (AA'C) étant isocèle de sommet A', la longueur  $x_1$  est donc :  
 $x_1 = z$ .  
 on a également :

$$\tan \alpha = \frac{z}{x_2} \rightarrow x_2 = \frac{z}{\tan \alpha} = z \cot \alpha \quad (8.32)$$

la largeur de la maille  $L$  est :

$$L = x_1 + x_2 = z + z \cot \alpha = z(1 + \cot \alpha) \quad (8.33)$$

Prenons une maille du treillis (figure 8.9) et introduisons une coupure fictive selon  $y'y$ . Les équations d'équilibre donnent :

$$V_u = N_t \sin \alpha \rightarrow N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha} \quad (8.34)$$

où  $N_t$  est l'effort de traction dans les cours généré par l'application de l'effort tranchant  $V_u$ .

Soit  $S_t$  l'espacement des cours d'armatures transversales entre  $A$  et  $B$ . Le nombre de cours est :

$$n = \frac{z(1 + \cot \alpha)}{S_t} \quad (8.35)$$

Soit  $A_t$  l'aire de la section droite d'un cours placé entre  $A$  et  $B$  et  $\sigma_s$  la contrainte de traction dans les aciers, alors :

$$N_t = n A_t \sigma_s \quad (8.36)$$

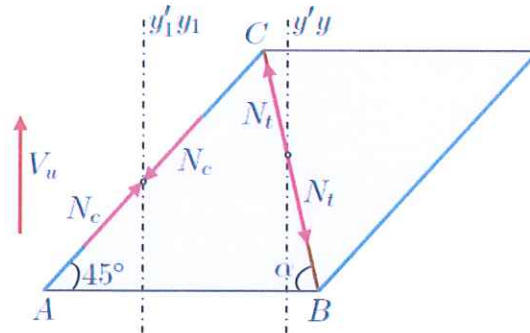


FIGURE 8.9 – Schématisation d'une maille du treillis de RITTER-MORSH

$$\rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{N_t}{n S_t} \quad (8.37)$$

$$(8.34) \text{ et } (8.35) \rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{V_u}{n \sin \alpha \frac{z(1+\cot \alpha)}{n}} \quad (8.38)$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_s A_t}{S_t} = \frac{V_u}{z(\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.39)$$

En introduisant l'expression de  $\tau_u$  dans cette expression, on trouve la formule suivante permettant le dimensionnement des cours d'acier :

$$(8.39) \rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{V_u}{z \sigma_s B_0 (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.40)$$

$$\tau_u = \frac{V_u}{B_0 d} \rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{B_0 d \tau_u}{z \sigma_s B_0 (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.41)$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{B_0 S_t} = \frac{\tau_u}{\frac{z}{d} \sigma_s (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad (8.42)$$

où  $B_0$  est la largeur de l'âme de la section.

Ainsi, en fixant par exemple à priori  $S_t$  (il est préférable que cette valeur soit la plus petite possible pour assurer une meilleure répartition des armatures sans toutefois empêcher le bon bétonnage), il est possible de calculer la valeur théorique de la section des armatures transversales correspondant au modèle de comportement défini par le treillis de RITTER-MORSH.

L'introduction d'une autre coupure  $y'_1 y_1$  au niveau de la bielle comprimée permet d'écrire à l'équilibre :

$$V_u = \frac{\sqrt{2}}{2} N_c = \frac{1}{\sqrt{2}} N_c \quad \rightarrow \quad N_c = \sqrt{2} V_u \quad (8.43)$$

où  $N_c$  est l'effort de compression dans la bielle.

L'aire de la section totale de la bielle comprimée est :

$$S_b = B_0 L \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} B_0 z (1 + \cotg \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 z (1 + \cotg \alpha) \quad (8.44)$$

La contrainte de compression dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{N_c}{S_b} = \frac{\sqrt{2} V_u}{\frac{1}{\sqrt{2}} B_0 z (1 + \cotg \alpha)} = \frac{2 V_u}{B_0 z (1 + \cotg \alpha)} \quad (8.45)$$

cette formule permet la vérification de la compression dans les bielles.

Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on a :  $\sigma_{bc} \approx 2\tau_u$ .

## 8.7 Armatures transversales d'une poutre

La formule de dimensionnement précédente néglige la participation du béton non fissuré à l'équilibre du treillis. Pour tenir compte de ce fait, les règles de calcul introduisant de manière empirique un coefficient  $k$  et la relation à satisfaire devient :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\tau_u - 0,3 f_{t_j}^* k}{z \sigma_s (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.46)$$

soit en prenant  $\sigma_s = \frac{f_{et}}{\gamma_s}$  et  $\frac{z}{d} \approx 0,9$  :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{t_j}^* k)}{0,9 f_{et} (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.47)$$

où  $f_{t_j}^*$  est la contrainte caractéristique de la traction du béton à  $j$  jours, plafonnée toutefois à  $3,3 \text{ MPa}$ .

$$f_{t_j}^* = \min(f_{t_j}; 3,3 \text{ MPa}) \quad (8.48)$$

Le coefficient  $k$  prend les valeurs suivantes :

- $k = 0$  : en cas de reprise de bétonnage ou si la fissuration est jugée très préjudiciable ;  
 $k = 1$  : en flexion simple s'il n'y a pas de reprise de bétonnage ou s'il y a reprise mais avec indentation qui dépasse 5 mm ;  
 $k = 1 + \frac{3(N_u/B)}{f_{c28}}$  : en flexion composée où  $N_u > 0$  (compression) ;  
 $B$  étant la section totale du béton ;  
 $k = 1 - \frac{10(N_u/B)}{f_{c28}}$  : en flexion composée où  $N_u < 0$  (traction).

Dans le cas le plus courant où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (armatures transversales droites) pour la flexion simple sans reprise de bétonnage ( $k = 1$ ), la formule de dimensionnement des cours devient :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3f_{tj}^*)}{0,9f_{ct}} \rightarrow S_t \leq \frac{0,9A_t f_{ct}}{\gamma_s B_0(\tau_u - 0,3f_{tj}^*)} \quad (8.49)$$

## 8.8 Ferrailage transversal minimal

Le règlement exige un ferrailage de coût minimal défini par :

$$\frac{A_t f_{ct}}{B_0 S_t \sin \alpha} \geq \max\left(\frac{\tau_u}{2}; 0,4 \text{ MPa}\right) \quad (8.50)$$

## 8.9 Règle d'ALBERT CAQUOT pour la détermination pratique des espacements

### 8.9.1 Conditions d'application

Les trois conditions suivantes doivent être satisfaites pour pouvoir appliquer la règle d'ALBERT CAQUOT :

- Charges uniformément réparties ;
- Section constante de la poutre ;
- Cas de flexion simple et  $k = 1$  (voir ci-haut).

### 8.9.2 Démarche à suivre

1. Choix d'un cours d'acier ;
2. Calcul de l'espacement  $S_t$  à l'appui par :

$$S_t = \frac{0,9A_t f_{ct}}{\gamma_s B_0(\tau_u - 0,3f_{tj})} \quad (8.51)$$



3. Positionner le premier cours à une distance  $\frac{S_t}{2}$  de l'appui ;
4. Les espacements suivants sont choisis dans la suite des valeurs : 7 cm, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 40 cm. Chaque valeur d'espacement doit être répétée autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi portée de la poutre (prendre la partie entière du rapport).

## 8.10 Dispositions constructives minimales

### 8.10.1 Espacement et diamètre des cours d'acier

Selon le BAEL, la valeur maximale suivante doit être respectée :

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) \quad (8.52)$$

la condition de non fragilité doit être également respectée :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{et}}{0,4B_0} \quad (8.53)$$

dans cette formule, les dimensions sont exprimées en *cm* et la contrainte en *MPa*.

Le diamètre des armatures transversales  $\phi_t$  doit vérifier la condition :

$$\phi_t \leq \min\left(\frac{H}{35}; \phi_{l_{\min}}; \frac{B_0}{10}\right) \quad (8.54)$$

où  $\phi_l$  est le diamètre des armatures longitudinales.

## 8.11 Résistance du béton de la bielle

La contrainte dans le béton doit respecter la condition :

$$(8.45) \rightarrow \sigma_{bc} = \frac{2V_u}{0,9B_0d(1 + \cotg \alpha)} \leq f_{bu} \quad (8.55)$$

## 8.12 Justifications aux appuis : appui simple d'about

### 8.12.1 Profondeur minimale d'appui

Dans la figure (8.10),  $a$  représente la largeur de la bielle d'about et est calculée selon que l'armature inférieure est droite ou en crochet. Dans le cas

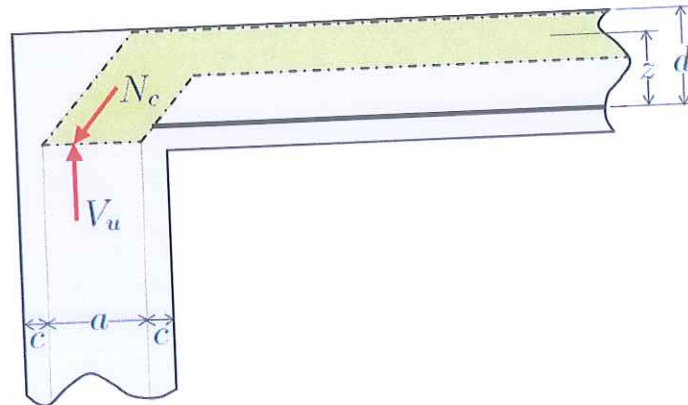


FIGURE 8.10 – Schématisation de la bielle d'about au niveau d'un appui

d'un crochet, il faut satisfaire 2 mm à droite au lieu de l'enrobage  $c$ .

Dans tous les cas, la bielle d'about a une largeur  $a$  qui vérifie :  $a \leq 0,9d$

Selon la figure (8.10), l'équilibre des efforts verticalement nous donne :

$$V_u = \frac{\sqrt{2}}{2} N_c \rightarrow N_c = \sqrt{2} V_u \quad (8.56)$$

la contrainte générée par  $N_c$  sur la section droite de la bielle d'about est :

$$\sigma_{bc} = \frac{N_c}{\frac{a}{\sqrt{2}} B_0} = \frac{\sqrt{2} V_u}{\frac{a}{\sqrt{2}} B_0} = \frac{2 V_u}{a B_0} \quad (8.57)$$

la contrainte de la bielle d'about doit vérifier la condition :

$$\sigma_{bc} \leq f_{bu} \rightarrow \frac{2 V_u}{a B_0} \leq \frac{0,8 f_{cj}}{\gamma_b} = \frac{0,8 f_{cj}}{1,5} \quad (8.58)$$

$$\rightarrow a \geq \frac{1,5 \cdot 2 V_u}{0,8 B_0 f_{cj}} \quad (8.59)$$

La vérification de la bielle sur appui en compression impose donc :

$$V_u \leq 0,267 B_0 a f_{cj} \quad (8.60)$$

ou encore :

$$a \geq \frac{3,75 V_u}{B_0 f_{cj}} \quad (8.61)$$

### 8.12.2 Sections minimales d'armatures inférieures sur appui

L'équilibre de la bielle est satisfaite si la section d'armatures respecte la condition suivante :

$$A_s f_{su} \leq V_u \rightarrow A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} V_u \quad (8.62)$$

## 8.13 Justifications aux appuis : Appui intermédiaire

Posons :  $V_u = \max(V_{ug}; V_{ud})$  et  $R_u = |V_{ug}| + |V_{ud}|$ .  
avec l'indice  $g$  qui désigne à gauche de l'appui et  $d$  à droite de l'appui.

### 8.13.1 Profondeur minimale d'appui

Le paramètre  $a$  déjà défini (figure 8.10) doit satisfaire :

$$a \geq \frac{3,75 V_u}{B_0 f_{cj}} \quad (8.63)$$

### 8.13.2 Contrainte moyenne de compression sur l'appui (poinçonnement)

On doit satisfaire la condition :

$$\frac{R_u}{B_0 a} \leq \frac{1,3 f_{c28}}{\gamma_b} \quad (8.64)$$

$$\rightarrow a \geq \frac{\gamma_b R_u}{1,3 B_0 f_{c28}} \quad (8.65)$$

### 8.13.3 Section minimale d'armatures inférieures sur appui

Sur un appui intermédiaire, d'après le principe de réciprocité des efforts, l'effort tranchant  $V_u$  développé sur l'appui génère un effort normal dans les armatures longitudinales inférieures égal à  $V_u$ . De plus, on a sur un appui intermédiaire un moment fléchissant  $M_u$ , ce moment génère un effort normal

dans les dites armatures égal à  $\frac{M_u}{Z}$ .

L'effort normal appliqué sur les armatures inférieures est donc :

$$N_s = V_u + \frac{M_u}{Z} \quad (8.66)$$

l'effort normal de résistance doit être supérieur à l'effort appliqué :

$$A_s f_{su} \geq N_s = V_u + \frac{M_u}{Z} \quad (8.67)$$

$$\rightarrow A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \left( V_u + \frac{M_u}{Z} \right) \quad (8.68)$$

La section d'armatures doit avoir une valeur minimale en vérifiant la condition :

$$A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \left( V_u + \frac{M_u}{0,9d} \right) \quad (8.69)$$

sachant que le moment  $M_u$  sur appui est négatif.

## 8.14 Cas des dalles

Aucune armature d'effort tranchant n'est requise si cette condition est remplie :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.70)$$

avec  $\bar{\tau}_u = \frac{0,07f_{c28}}{\gamma_b}$  et la pièce est bétonnée sans reprise de bétonnage sur toute son épaisseur.

Dans le cas général des dalles, on remarque que  $\tau_u$  prend des valeurs faibles. Toutefois, si la condition n'est pas vérifiée, on procède habituellement à une augmentation de l'épaisseur dans l'objectif de faire respecter la condition.



## 8.15 Exercices

### ◆ Exercice 1 :

Soit une section rectangulaire soumise à un effort tranchant  $V_u = 92,4 \text{ kN}$  comme schématisé dans la figure (8.11). On prend en compte un béton de



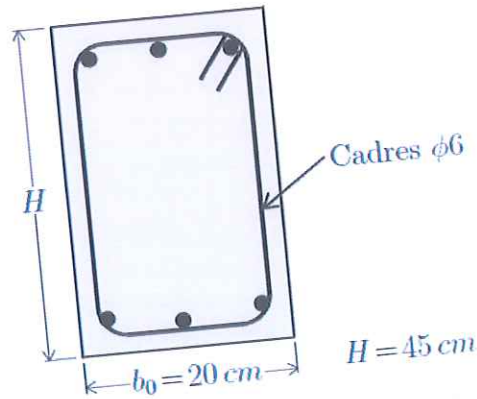


FIGURE 8.11 - Schéma de l'exercice 1

résistance caractéristique  $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE215.

On considère qu'on a pas de reprise de bétonnage et la fissuration est peu préjudiciable.

1. Justifier l'âme de la poutre ?
2. Calculer l'espacement des armatures transversales ?

⇒ **Solution 1 :**

1. La contrainte tangente dans la section est :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = \frac{92,4 \cdot 10^{-3}}{0,20 \cdot 41} = 1,13 \text{ MPa} \quad (8.71)$$

Pour des armatures droites ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) et en fissuration peu préjudiciable, la contrainte tangente limite ultime du béton est :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0,2 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.72)$$

$$= \min \left\{ 0,2 \frac{30}{1,5}; 5 \text{ MPa} \right\} \quad (8.73)$$

$$= 4 \text{ MPa} \quad (8.74)$$

on a :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.75)$$

on peut prendre donc :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (8.76)$$

2. Calcul de l'espacement des armatures transversales sachant que le diamètre est de  $6 \text{ mm}$  :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{t28}^*)}{0,9 f_{ct} (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad (8.77)$$

En peu préjudiciable et sans reprise de bétonnage on a :  $k = 1$ . On a également :

$$f_{t28}^* = \min\{f_{t28}; 3,3 \text{ MPa}\} = 2,4 \text{ MPa} \quad (8.78)$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{S_t} \geq \frac{1,15 \cdot 0,2(1,13 - 0,3 \cdot 1 \cdot 2,4)}{0,9 \cdot 2,15} = 0,0487 \text{ cm} \quad (8.79)$$

sachant que  $A_t = 0,56 \text{ cm}^2$  puisqu'on a deux sections  $\phi 6$  qui travaille (cadres  $\phi 6$ ), on obtient :

$$S_t \leq \frac{A_t}{0,0487} = \frac{0,56}{0,0487} = 11,5 \text{ cm} \quad (8.80)$$

On peut adopter donc l'espacement :

$$S_t = 11 \text{ cm} \quad (8.81)$$

On vérifie après la condition de non fragilité :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{ct}}{0,4 b_0} = \frac{0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 2,15}{0,4 \cdot 0,2} = 0,1505 \text{ m} \quad (8.82)$$

$$\rightarrow S_t \leq 15,05 \text{ cm} \quad (8.83)$$

cette condition est bien vérifiée.

La condition suivante doit être également vérifiée :

$$S_t \leq \inf\{0,9d; 40 \text{ cm}\} = \inf\{0,9 \cdot 40,5; 40 \text{ cm}\} = 36,45 \text{ cm} \quad (8.84)$$

cette condition est également vérifiée.

On peut donc bien adopter l'espacement de :  $S_t = 11 \text{ cm}$ .

⇨ Exercice 2 :

Soit une poutre en T bi-appuyée uniformément chargée par une charge permanente  $G = 13,83 \text{ kN/m}$  et une charge variable  $Q = 26,6 \text{ kN/m}$  comme schématisé dans la figure (8.12). On prend en compte un béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE500.

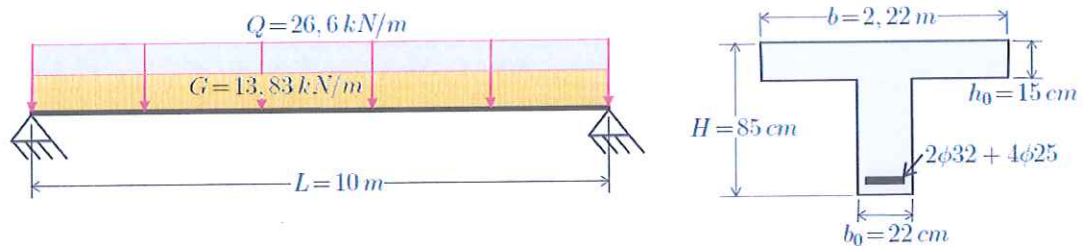


FIGURE 8.12 – Poutre en T uniformément chargée

On considère qu'on a pas de reprise de bétonnage et la fissuration est préjudiciable. La hauteur utile est :  $d = 80 \text{ cm}$ .

Pour le calcul à l'effort tranchant, on considère qu'au niveau des appuis on a :

- une distance de  $\frac{H}{2}$  est considérée comme non chargée à partir de l'appui ;
- une deuxième distance, à partir de la limite de la première, égale à  $H$  est considérée comme chargée par une densité  $\frac{2q}{3H}x$  (avec  $\frac{H}{2} \leq x \leq \frac{3H}{2}$ ).

1. Calculer le chargement ultime à prendre en compte dans le calcul de l'effort tranchant et tracer sa distribution ?
2. Déterminer l'effort tranchant de calcul maximal au niveau des appuis ?
3. Vérifier l'âme du béton et justifier la prise en compte d'armatures d'effort tranchant verticales ?
4. Dimensionner le ferrailage transversal ?

⇒ Solution 2 :

1. La densité de charge à prendre en compte à l'ELU est :

$$q_u = 1,35G + 1,5Q \quad (8.85)$$

$$= 1,35.13,83 + 1,5.26,6 \quad (8.86)$$

$$= 58,57 \text{ kN/m} \quad (8.87)$$

En prenant en compte les règles citées dans l'énoncé de l'exercice, la distribution de la charge ultime à prendre en compte est donnée dans la figure (8.13). La valeur à  $x = \frac{H}{2}$  est donnée par :

$$q(0,5H) = \frac{2q_u H}{3H} = \frac{q_u}{3} \quad (8.88)$$

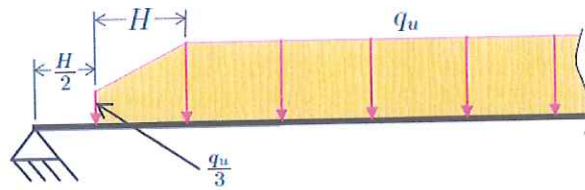


FIGURE 8.13 – Distribution à prendre en compte

2. Soit  $V_{u_{\max}}$  l'effort tranchant au niveau de l'appui donné par la distribution  $q_u$  non réduite au niveau de l'appui. On a donc :

$$V_{u_{\max}} = \frac{q_u L}{2} \quad (8.89)$$

l'effort tranchant maximal de calcul est donné, selon le schéma de la figure (8.13), par :

$$V_{u_0} = \frac{q_u L}{2} - \frac{5}{6} q_u H \quad (8.90)$$

$$= 58,57 \left( 5 - \frac{5}{6} \cdot 0,85 \right) \quad (8.91)$$

$$\rightarrow V_{u_0} = 251,36 \text{ kN} \quad (8.92)$$

3. La contrainte tangente conventionnelle est :

$$\tau_u = \frac{V_{u_0}}{b_0 d} = \frac{0,25136}{0,22 \cdot 0,8} = 1,43 \text{ MPa} \quad (8.93)$$



la contrainte tangente limite est :

$$\bar{\tau}_u = \min \left\{ 0,15 \frac{f_{c_j}}{\gamma_b}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.94)$$

$$= \min \left\{ 0,15 \cdot \frac{25}{1,5}; 4 \text{ MPa} \right\} \quad (8.95)$$

$$\rightarrow \bar{\tau}_u = 2,5 \text{ MPa} \quad (8.96)$$

on a donc :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u \quad (8.97)$$

et on peut adopter des armatures transversales droites ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

4. La section d'armature et son espacement doivent respecter la condition suivante :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{t_j}^*)}{0,9 f_{et}} \quad (8.98)$$

Nous pouvons choisir  $\phi_t = 6 \text{ mm}$  et calculer l'espacement donc par la formule :

$$S_t \leq \frac{0,9 A_t f_{et}}{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0,3k f_{t_j}^*)} \quad (8.99)$$

En fissuration préjudiciable et sans reprise de bétonnage, on a  $k = 1$ . on a également :

$$f_{t_j}^* = \min \{ f_{t_j}; 3,3 \text{ MPa} \} = 2,1 \text{ MPa} \quad (8.100)$$

$$\rightarrow S_t \leq \frac{0,9 \cdot 0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 500}{1,15 \cdot 0,22 \cdot (1,43 - 0,3 \cdot 1 \cdot 2,1)} = 0,125 \text{ m} = 12,5 \text{ cm} \quad (8.101)$$

Vérifions la condition de non fragilité :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{et}}{0,4 b_0} = \frac{0,56 \cdot 10^{-4} \cdot 500}{0,4 \cdot 0,22} = 0,318 \text{ m} = 31,8 \text{ cm} \quad (8.102)$$

deuxième condition à vérifier :

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) = \inf(0,9 \cdot 80; 40 \text{ cm}) = 40 \text{ cm} \quad (8.103)$$

les deux conditions sont remplies et on peut donc adopter un ferrailage transversal de diamètre  $\phi_t = 6 \text{ mm}$  avec un espacement  $S_t = 12 \text{ cm}$ .

⇨ **Exercice 3 :**

Soit une poutre rectangulaire ( $B_0 = 30\text{ cm} \times H = 60\text{ cm}$ ) sollicitée par un moment ultime  $M_u = 500\text{ kN.m}$  et un effort tranchant  $V_u = 330\text{ kN}$ .

Données du problème :

Béton : $f_{c28} = 25\text{ MPa}$	Acier long. : $f_e = 500\text{ MPa}$
Acier transv. : $f_{et} = 235\text{ MPa}$	Enrobages : $c = 5\text{ cm}$
Portée de la poutre : $L = 6\text{ m}$	Fissuration peu nuisible
Pas de reprise de bétonnage	

Calculer le ferrailage longitudinal et transversal de la poutre ?

⇒ **Solution 3 :**

Ferrailage longitudinal :

D'après la méthodologie développée dans le chapitre de calcul des sections rectangulaires en flexion simple, on obtient les résultats suivants (Logiciel INGPONT) :

$$A_s = 27,89\text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A'_s = 1,05\text{ cm}^2 \quad (8.104)$$

On peut adopter pour la section tendue 6HA25 (section réelle :  $29,45\text{ cm}^2$ ) et pour les armatures de montage 3HA8 (section réelle :  $1,51\text{ cm}^2$ ). Le ferrailage est disposé comme montré dans la figure (8.14).

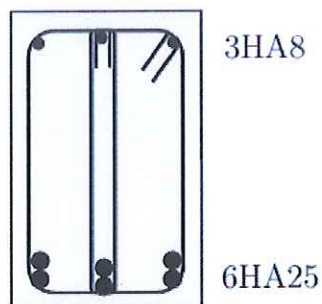


FIGURE 8.14 – Disposition du ferrailage

Puisqu'on a sur un lit trois positions de barres, on peut adopter pour le ferrailage transversal un cadre et un étrier comme schématisé dans la figure (8.14).

Ferrailage transversal :

Contrainte tangente conventionnelle :

$$\tau_u = \frac{V_u}{B_0 d} = \frac{0,33}{0,3,0,55} = 2 \text{ MPa} \quad (8.105)$$

contrainte tangente limite :

$$\bar{\tau}_u = \min\left(0,2 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}; 5 \text{ MPa}\right) = \min\left(0,2 \frac{25}{1,5}; 5 \text{ MPa}\right) \quad (8.106)$$

$$\rightarrow \bar{\tau}_u = \min(3,333; 5 \text{ MPa}) = 3,333 \text{ MPa} \quad (8.107)$$

on a donc :

$$\tau_u = 2 \text{ MPa} \leq \bar{\tau}_u = 3,333 \text{ MPa} \quad (8.108)$$

en conséquence, on peut adopter des armatures de coùture droite ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

Le diamètre des aciers transversaux doit satisfaire la condition :

$$\phi_t \leq \min\left(\frac{H}{35}; \phi_{t_{\min}}; \frac{B_0}{10}\right) = \min\left(\frac{60}{35}; 0,8; \frac{30}{10}\right) = \min(1,7; 0,8; 3) \quad (8.109)$$

$$\rightarrow \phi_t \leq 0,8 \text{ cm} = 8 \text{ mm} \quad (8.110)$$

on peut donc prendre  $\phi_t = 8 \text{ mm}$ .

Calcul de l'espacement des aciers de coùture :

$$\frac{A_t}{B_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3 f_{tj}^* k)}{0,9 f_{et}(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\gamma_s(\tau_u - 0,3 f_{tj}^* k)}{0,9 f_{et}} \quad (8.111)$$

$$\rightarrow S_t \leq \frac{0,9 f_{et} A_t}{\gamma_s B_0 (\tau_u - 0,3 f_{tj}^* k)} \quad (8.112)$$

On a une poutre qui travaille en flexion simple et on a pas de reprise de bétonnage, on a donc :  $k = 1$ .

On a également :

$$f_{tj}^* = \min(f_{tj}; 3,3 \text{ MPa}) = \min(2,1 \text{ MPa}; 3,3 \text{ MPa}) = 2,1 \text{ MPa} \quad (8.113)$$

pour l'espacement :

$$S_t \leq \frac{0,9 \cdot 235 \cdot 4,0 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{1,15 \cdot 0,3(2 - 0,3 \cdot 2,1 \cdot 1)} = 0,0894 \text{ m} = 8,94 \text{ cm} \quad (8.114)$$

Au final, on peut adopter des  $\phi 6$  espacement 8 cm.

Pour faciliter le bétonnage de la poutre, on peut augmenter l'espacement en adoptant un diamètre  $\phi 10$  mais il faut augmenter également le diamètre minimal du ferrailage longitudinal.

Dans notre cas, on va se contenter des résultats obtenus auparavant ( $\phi 6$  esp. 8 cm).

Vérification des espacements maximales :

$$S_t \leq \frac{A_t f_{et}}{0,4 B_0} = \frac{4,0 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 235}{0,4 \cdot 0,3} = 0,3917 \text{ m} = 39,17 \text{ cm} \quad (8.115)$$

$$S_t \leq \inf(0,9d; 40 \text{ cm}) = \inf(0,9 \cdot 55; 40) = \inf(49,5 \text{ cm}; 40 \text{ cm}) \quad (8.116)$$

$$\rightarrow S_t \leq 40 \text{ cm} \quad (8.117)$$

les deux conditions précédentes sont vérifiées.

Pour la disposition du ferrailage transversal, on adopte la méthode de CAQUOT (figure 8.15).

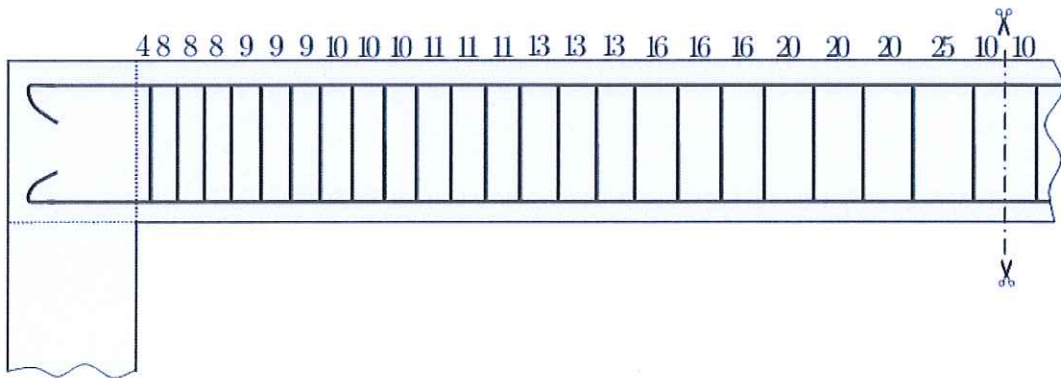


FIGURE 8.15 – Répartition du ferrailage transversal (Méthode de CAQUOT)



Vérification des distances :

$$4 + 3 \cdot (8 + 9 + 10 + 11 + 13 + 16 + 20) + 25 + 10 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m} = \frac{L}{2} \quad (8.118)$$

Le ferrailage doit être disposé d'une façon symétrique des deux cotés de la poutre.



# Chapitre 9

## Calcul des sections en flexion composée

### 9.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer les sections de béton armé subissant une flexion composée. Un tel cas correspond aux éléments chargés par un effort normal  $N$  et un moment fléchissant  $M$  appliqué sur l'un des plans principaux de la section droite de l'élément.

Selon les signes de l'effort normal et du moment fléchissant, on a à traiter trois situations possibles : section entièrement tendue, section partiellement comprimée et section entièrement comprimée.

### 9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène

On considère une section droite d'un élément en BA chargé par un système de chargement  $(M; N)$  appliqué au niveau du centre de gravité  $G$  (figure 9.1).

#### 9.2.1 Effort normal équivalent et centre de pression

Le système de chargement appliqué  $(M; N)$  est équivalent à un effort normal  $N$  appliqué en dehors du centre de gravité au niveau d'un point  $C$  qu'on appelle **Centre de pression** (voir figure 9.1).

## 9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène 187

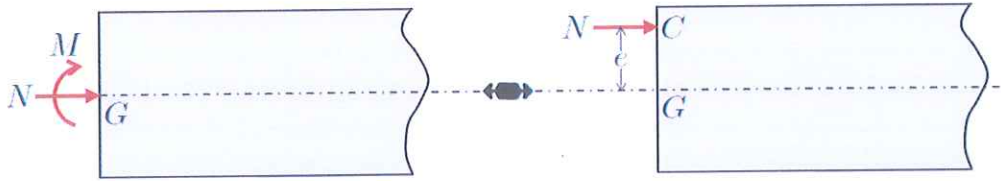


FIGURE 9.1 – Equivalence des efforts

L'ordonnée du centre de pression par rapport au centre de gravité  $G$  est défini par :

$$e = \frac{M}{N} \quad (9.1)$$

L'excentrement  $e$  est donné en valeur algébrique.

La position de la section tendue d'armatures dépend du signe du moment  $M$ . Toutefois, on a une exception dans le cas où on a un effort normal de compression qui rend la section entièrement comprimée.

### 9.2.2 Noyau central

Le noyau central d'une section donnée est constitué de l'ensemble des points qui vérifient la condition suivante : si un effort normal est appliqué sur l'un de ces points, cela engendre des contraintes de même signe sur toute la section.

La détermination du noyau central est relativement simple pour les sections simples géométriquement. Toutefois, dans certains cas, ce calcul devient relativement lourd !

Ce calcul peut être fait en analysant les contraintes au niveau des fibres extrêmes de la section (figure 9.2).

Dans le cas d'une poutre plane à plan moyen et chargée dans ce plan, la contrainte à une ordonnée  $y$  est donnée par :

$$\sigma(y) = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \quad (9.2)$$

où  $S$  est l'aire de la section droite;  $y$  est l'ordonnée de la fibre sur laquelle on cherche la contrainte  $\sigma$  et  $I$  est le moment d'inertie de la section.

## 9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène 188

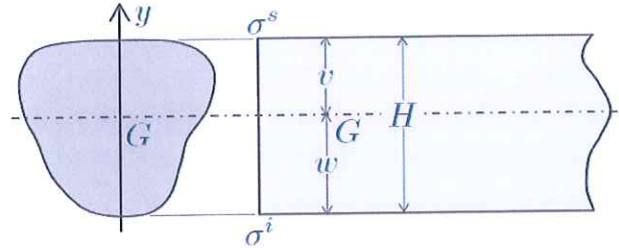


FIGURE 9.2 – Paramétrage d'une section

La fibre extrême supérieure est définie par  $y = v$ , d'où :

$$\sigma^s = \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} \quad (9.3)$$

La fibre extrême inférieure est définie par  $y = -w$  :

$$\sigma^i = \frac{N}{S} - \frac{Mw}{I} \quad (9.4)$$

D'après la définition du noyau central, le centre de pression  $C$  lui appartient si toutes les contraintes générées sont de même signe. Ceci est vrai en particulier pour les fibres extrême, d'où :

$$\sigma^s \sigma^i \geq 0 \quad (9.5)$$

la limite du noyau central correspond à  $\sigma^s \sigma^i = 0$ . On a donc deux cas :

$$\sigma^s = 0 \rightarrow \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} = 0 \quad (9.6)$$

$$\rightarrow N + \frac{Mv}{i^2} = 0 \quad (9.7)$$

$$\rightarrow 1 + \frac{ev}{i^2} = 0 \quad (9.8)$$

$$\rightarrow e = -\frac{i^2}{v} \quad (9.9)$$

$i$  étant le rayon de giration de la section par rapport à l'axe passant par le centre de gravité  $G$ .

De même pour  $\sigma^i = 0$  qui donne :

$$e = \frac{i^2}{w} \quad (9.10)$$



## 9.2 Centre de pression et noyau central d'une section homogène 89

Pour être à l'intérieur du noyau central, on doit être entre les deux valeurs extrêmes de  $e$  calculées, soit :

$$\boxed{-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w}} \quad (9.11)$$

☞ **Exemple :**

Section rectangulaire de dimensions ( $B \times H$ ) et section circulaire de diamètre  $D$ .

Section rectangulaire :

$$i^2 = \frac{I}{S} = \frac{BH^3}{12BH} = \frac{H^2}{12} \quad (9.12)$$

$$v = w = \frac{H}{2} \quad (9.13)$$

on a donc :

$$-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w} \rightarrow -\frac{H^2}{12} \frac{2}{H} \leq e \leq \frac{H^2}{12} \frac{2}{H} \quad (9.14)$$

$$-\frac{H}{6} \leq e \leq \frac{H}{6} \quad (9.15)$$

De même pour un axe vertical passant par le centre de gravité  $G$ , on obtient :

$$-\frac{B}{6} \leq e \leq \frac{B}{6} \quad (9.16)$$

Le noyau central de la section rectangulaire est présenté dans la figure (9.3).

Section circulaire :

$$i^2 = \frac{I}{S} = \frac{\pi D^4}{64} \frac{4}{\pi D^2} = \frac{D^2}{16} \quad (9.17)$$

$$v = w = \frac{D}{2} \quad (9.18)$$

on a donc :

$$-\frac{i^2}{v} \leq e \leq \frac{i^2}{w} \rightarrow -\frac{D^2}{16} \frac{2}{D} \leq e \leq \frac{D^2}{16} \frac{2}{D} \quad (9.19)$$

$$-\frac{D}{8} \leq e \leq \frac{D}{8} \quad (9.20)$$

Le noyau central d'une section circulaire de diamètre  $D$  est un cercle centré sur le centre de gravité  $G$  et qui a un diamètre  $D' = \frac{D}{8}$ .

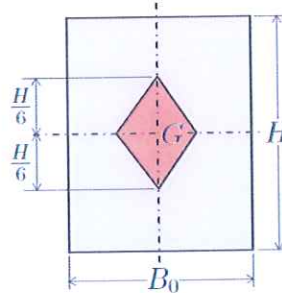


FIGURE 9.3 – Noyau central d'une section rectangulaire

### 9.3 Calcul d'une section rectangulaire à l'ELU

Les développements qui seront présentés correspondent à un moment ultime positif ( $M_u \geq 0$ ). Dans la pratique si on a un moment négatif, il suffit de faire le calcul avec la valeur absolue du moment et de renverser à la fin les positions des armatures calculées.

#### 9.3.1 Calcul d'une section entièrement tendue

Une section en BA est entièrement tendue si elle subit un effort normal de traction dont le centre de pression est compris entre les deux sections d'armatures  $A_1$  et  $A_2$  (figure 9.4). On peut écrire :

$$C \in [A_1; A_2] \rightarrow \frac{H}{2} - d \leq e \leq \frac{H}{2} - d' \quad (9.21)$$

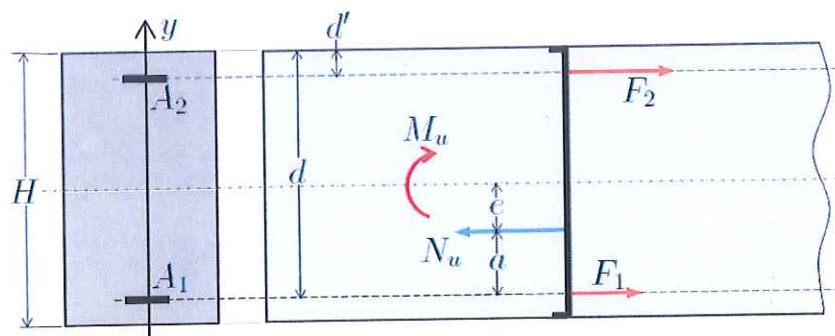


FIGURE 9.4 – Schéma de la section entièrement tendue

Si on suppose que le moment est positif  $M_u \geq 0$  et puisque  $N_u \leq 0$ , on a :  $e \leq 0$ .

La distance entre le centre de pression et la section d'armatures  $A_1$  est :

$$a = d - \frac{H}{2} + e = d - \frac{H}{2} + \frac{M_u}{N_u} \quad (9.22)$$

On peut constater facilement que  $d \geq \frac{H}{2} - e$  d'où :  $a \geq 0$ .

Sachant que le béton d'une section entièrement tendue ne travaille pas, l'équilibre des forces et des moments nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} -N_u + F_1 + F_2 & = 0 \\ -N_u a + F_2(d - d') & = 0 \end{cases} \quad (9.23)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -N_u + A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 & = 0 \\ -N_u a + A_2 \sigma_2 (d - d') & = 0 \end{cases} \quad (9.24)$$

Dans l'objectif d'économiser l'utilisation des aciers, on doit prendre :  $\sigma_1 = \sigma_2 = f_{su}$ . D'où :

$$\begin{cases} A_2 & = \frac{N_u a}{f_{su}(d-d')} \\ A_1 & = \frac{N_u}{f_{su}} - A_2 \end{cases} \quad (9.25)$$

Dans le cas d'une section entièrement tendue avec  $M_u \geq 0$ , le centre de pression  $C$  doit être situé entre le centre de gravité  $G$  et la section d'armatures  $A_1$ . D'où :

$$0 \leq a \leq d - \frac{H}{2} \quad (9.26)$$

$$\rightarrow 0 \leq M_u \leq M_1 = N_u \left( \frac{H}{2} - d \right) \quad (9.27)$$

### 9.3.2 Calcul d'une section partiellement comprimée

Une section est partiellement comprimée dans les deux cas suivants :

- Le centre de pression  $C$  est situé à l'extérieur des sections d'armatures théoriques  $A_1$  et  $A_2$  et cela indépendamment du signe de l'effort normal  $N_u$  (traction ou compression).
- Le centre de pression  $C$  est situé à l'intérieur des sections théoriques d'aciers avec l'application d'un effort normal  $N_u$  de compression et le moment fléchissant  $M_u$  doit être supérieur à  $M_3$  :

$$\begin{cases} N_u & \geq 0 \\ M_u & \geq M_3 = N_u \left( \frac{H}{2} - d \right) - (0,337H - 0,81d')N_0 \end{cases} \quad (9.28)$$

où :

$$N_0 = BHf_{bu} \quad (9.29)$$

On signale que l'équivalence du diagramme des contraintes du béton comprimé avec le diagramme rectangulaire simplifié reste valable puisque la fibre neutre se situe entre les armatures de la section  $A_1$  et  $A_2$  (figure 9.5). Les démonstrations de l'équivalence sont déjà menées auparavant.

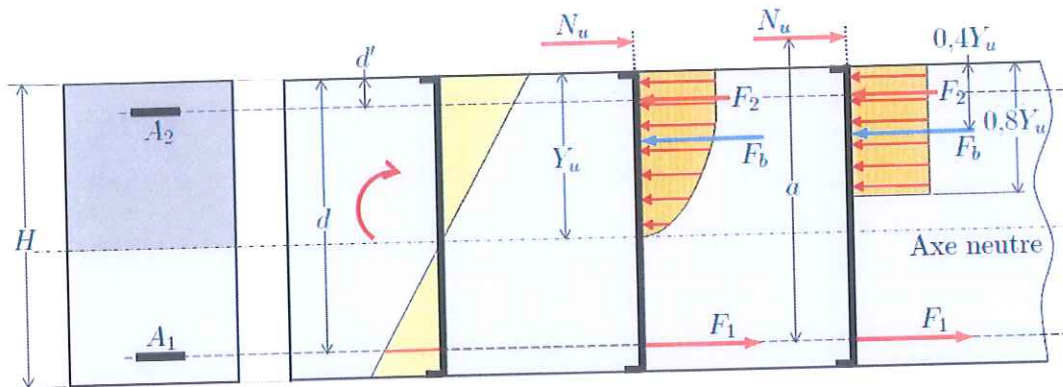


FIGURE 9.5 – État des efforts dans une section partiellement comprimée

Le bras de levier  $a$  de l'effort normal équivalent  $N_u$  par rapport à  $A_1$  est donné par :

$$a = d - \frac{H}{2} + e \quad (9.30)$$

on peut écrire :

$$a \geq 0 \iff d - \frac{H}{2} + e \geq 0 \quad (9.31)$$

$$\iff d - \frac{H}{2} \geq -e \quad (9.32)$$

Géométriquement d'après la figure (9.5), on a :  $|e| \geq d - \frac{H}{2}$   
 En conséquence, la seule solution pour l'inégalité (9.32) est :

$$e \geq 0 \iff \frac{M_u}{N_u} \geq 0 \quad (9.33)$$

$$\iff N_u \geq 0 \quad (9.34)$$

Au final, on peut annoncer que :  $a \geq 0$  si et seulement si  $N_u \geq 0$   
 Ou encore :  $a \leq 0$  si et seulement si  $N_u \leq 0$



Dans tous les cas on a donc :  $N_u a \geq 0$

Les équations d'équilibre des efforts et moments sont :

$$\begin{cases} N_u + F_1 - F_b - F_2 & = 0 \\ N_u a - F_2(d - d') - F_b(d - 0,4Y_u) & = 0 \end{cases} \quad (9.35)$$

$$\rightarrow \begin{cases} (N_u + A_1\sigma_1) - F_b - A_2\sigma_2 & = 0 \\ N_u a - F_b(d - 0,4Y_u) - A_2\sigma_2(d - d') & = 0 \end{cases} \quad (9.36)$$

Posons :

$$\begin{cases} N_u + A_1\sigma_1 & = \bar{A}_1\bar{\sigma}_1 \\ A_2\sigma_2 & = \bar{A}_2\bar{\sigma}_2 \\ \bar{M} & = N_u a \geq 0 \end{cases} \quad (9.37)$$

Les équations d'équilibre deviennent sous la forme :

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1\bar{\sigma}_1 - F_b - \bar{A}_2\bar{\sigma}_2 & = 0 \\ \bar{M} - F_b(d - 0,4Y_u) - \bar{A}_2\bar{\sigma}_2(d - d') & = 0 \end{cases} \quad (9.38)$$

Ces équations correspondent mathématiquement à une section soumise à une flexion simple sous le moment  $\bar{M}$  dont les sections d'armatures sont  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_2$ .

Il suffit donc de faire le calcul en flexion simple sous le moment  $\bar{M} = N_u a$  et une fois les sections  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_2$  sont calculées, on obtient les sections réelles par :

$$\boxed{\begin{cases} A_1 & = \bar{A}_1 - \frac{N_u}{f_{su}} \\ A_2 & = \bar{A}_2 \end{cases}} \quad (9.39)$$

Pour l'utilisation économique des aciers, on a considéré dans tous les calculs que :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = f_{su} \quad (9.40)$$

### 9.3.3 Calcul d'une section entièrement comprimée

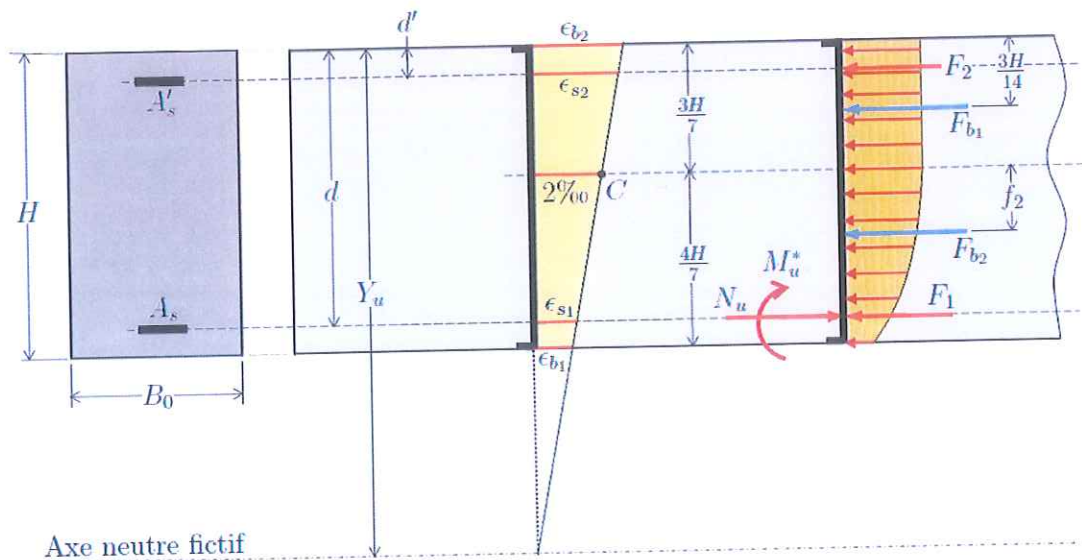


FIGURE 9.6 – État des déformations et des efforts dans une section entièrement comprimée

## 9.4 Exercices

### ◆ Exercice 1 :

Soit une section rectangulaire soumise à un effort normal  $N_u = 849 \text{ kN}$  et un moment fléchissant  $M_u = 243 \text{ kN.m}$  (voir figure 9.7).

On prend en compte un béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE400.

Calculer les armatures de la section considérée ?

### ⇒ Solution 1 :

Sachant que  $\gamma_b = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$  et en prenant  $\theta = 1$ , on a :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 20}{1,5} = 11,33 \text{ MPa} \quad (9.41)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (9.42)$$

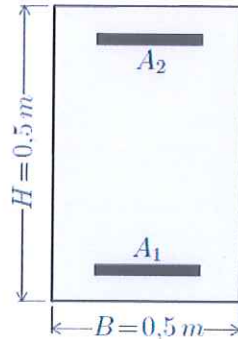


FIGURE 9.7 – Schéma de l'exercice 1

On calcule après les valeurs de  $N_0$  et  $N_1$  comme suit :

$$N_0 = BHf_{bu} = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 11,33 = 2,83\text{ MN} \quad (9.43)$$

$$N_1 = N_0 - 2,8 \frac{M_u}{H} = 2,83 - 2,8 \cdot \frac{0,243}{0,5} = 1,469\text{ MN} \quad (9.44)$$

On a donc :

$$0 \leq N_u \leq N_1 \quad (9.45)$$

la section est donc **partiellement comprimée**.

Cette section peut être calculée comme une section de mêmes dimensions travaillant en flexion simple et sollicitée par le moment  $\bar{M}$  défini ci-après.

$$e = \frac{M_u}{N_u} = \frac{0,243}{0,849} = 0,286\text{ m} \quad (9.46)$$

$$\rightarrow \bar{M} = N_u a \quad (9.47)$$

$$= N_u \left( d - \frac{H}{2} + e \right) \quad (9.48)$$

$$= 0,849(0,9 \cdot 0,5 - 0,25 + 0,286) \quad (9.49)$$

$$= 0,413\text{ MN.m} \quad (9.50)$$

Le moment réduit est donné par :

$$\mu = \frac{\bar{M}}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,413}{0,5 \cdot (0,9 \cdot 0,5)^2 \cdot 11,33} = 0,36 \quad (9.51)$$

on a :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 1,739 \text{‰} \quad (9.52)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (9.53)$$

le moment réduit limite est :

$$\mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) = 0,392 \quad (9.54)$$

On est donc dans le sous-domaine :  $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$  (Pivot B)

$$\alpha_u = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu}\right) = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,36}\right) = 0,589 \quad (9.55)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,589 = 0,471 \quad (9.56)$$

la section d'armature est donc :

$$\bar{A}_1 = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,471 \cdot 0,5 \cdot 0,9 \cdot 5,11 \cdot 33}{347,826} = 0,003452 \text{ m}^2 \quad (9.57)$$

On a donc :  $\bar{A}_1 = 34,52 \text{ cm}^2$  et  $\bar{A}_2 = 0 \text{ cm}^2$ .

d'où :

$$A_2 = \bar{A}_2 = 0 \text{ cm}^2 \quad (9.58)$$

$$A_1 = \bar{A}_1 - \frac{N_u}{f_{su}} = 0,003452 - \frac{0,849}{347,826} = 0,001011 \text{ m}^2 \quad (9.59)$$

Le ferrailage à adopter pour la section en flexion composée est :

$$\boxed{A_1 = 10,11 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A_2 = 0 \text{ cm}^2} \quad (9.60)$$

#### ◆ Exercice 2 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ( $B = 0,3 \text{ m}$ ;  $H = 0,6 \text{ m}$ ). Cette section est soumise aux charges permanentes :

$$\begin{cases} N_g = -200 \text{ kN} \\ M_g = 20 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (9.61)$$

cette section est soumise également aux charges variables suivantes :

$$\begin{cases} N_q = -200 \text{ kN} \\ M_q = 20 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (9.62)$$



## 9.4 Exercices

On prend en compte un béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE500.

On prend :  $d = 55 \text{ cm}$  et  $d' = 5 \text{ cm}$ .

1. Déterminer les sollicitations de calcul à l'ELU ?
2. Dimensionner la section de BA ?

•• Exercice 3 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ( $B = 0,3 \text{ m}$ ;  $H = 0,6 \text{ m}$ ). Cette section est soumise aux charges suivantes :  $N_u = 2548 \text{ kN}$  et  $M_u = 77 \text{ kN.m}$ .

On prend en compte un béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE400.

On prend :  $d = 55 \text{ cm}$  et  $d' = 5 \text{ cm}$ .

Calculer les armatures de la section ?

•• Exercice 4 :

Soit une section rectangulaire de dimensions ( $B = 0,3 \text{ m}$ ;  $H = 0,5 \text{ m}$ ). Cette section est soumise aux charges permanentes :

$$\begin{cases} N_g = 0,805 \text{ MN} \\ M_g = 0,018 \text{ MN.m} \end{cases} \quad (9.63)$$

cette section est soumise également aux charges variables suivantes :

$$\begin{cases} N_q = 0,995 \text{ MN} \\ M_q = 0,022 \text{ MN.m} \end{cases} \quad (9.64)$$

On prend en compte un béton de résistance caractéristique  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$  et un acier de nuance FeE500.

On prend :  $d = 45 \text{ cm}$  et  $d' = 5 \text{ cm}$ .

1. Déterminer les sollicitations de calcul à l'ELU ?

2. Dimensionner la section de BA ?

