Méthodes numériques pour équations différentielles ordinaires

Méthode des différences finies

A. Ramadane, Ph.D.

Résolution numérique d'équations différentielles

Méthodes explicites

Méthodes implicites

Stabilité

Méthode des différences finies

Discrétisation des dérivées

Applications

Méthode des différences finies

Avant-propos

Dans le domaine de l'analyse numérique, on peut être amené à rechercher la solution numérique d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire ayant des conditions limites. Parmi les méthodes de résolutions couramment pratiquées, il y a la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. Cette dernière est la plus facile d'accès, puisqu'elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation qui est assez intuitive d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part.

Définition 3.1. *Un maillage est un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Et on appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage.*

En dimension 1, on représente géométriquement un maillage de la façon suivante.

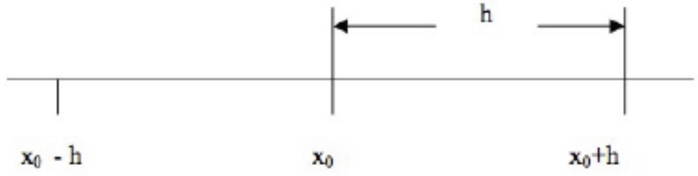

FIG. 3.1 – Points équidistants avec un pas de h

En dimension 2, on représente géométriquement un maillage de la façon suivante.

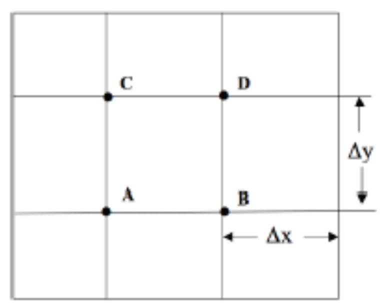

FIG. 3.2 – Maillage en dimension 2

Il est à noter que le **pas** d'un maillage peut être variable quoi qu'en général on le considère comme étant constant. En dimension 2, le **pas** en abcisse peut être différent de celui en ordonné. Et ils sont parfois noté respectivement $\triangle x$ et $\triangle y$.

3.2 Discrétisation des dérivées

Considérons 3 points enlignés tels qu'illustrés à la figure suivante.

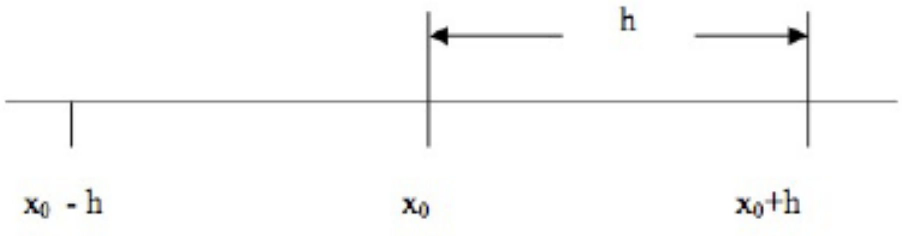

FIG. 3.3 – Points équidistants

En appliquant le développement de Taylor d'une fonction f autour du point x_0, nous obtenons

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)h}{1!} + \frac{f^{(2)}(x_0)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_0)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x_0)h^4}{4!} + \cdots \quad (3.2.1)$$

Et en remplacant h par $-h$ dans cette dernière expression, nous obtenons

$$f(x_0-h)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)h}{1!}+\frac{f^{(2)}(x_0)h^2}{2!}-\frac{f^{(3)}(x_0)h^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(x_0)h^4}{4!}+\cdots \quad (3.2.2)$$

En isolant $f'(x_0)$ de l'équation (3.2.1), nous avons

$$f'(x_0) \quad = \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\underbrace{-\frac{f^{(2)}(x_0)h}{2!}-\frac{f^{(3)}(x_0)h^2}{3!}+\cdots}_{\text{Termes } \mathbf{0}(\text{h})} \quad (3.2.3)$$

En négligeant les termes supérieur à $\mathbf{0}(h)$, nous obtenons

Définition 3.2. *Une approximation de la dérivée première de f au point x_0 est :*

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{(Dérivée avant d'ordre } h\text{)} \tag{3.2.4}$$

De façon similaire, en isolant $f'(x_0)$ de l'équation (3.2.2), nous avons

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + \underbrace{\frac{f^{(2)}(x_0)h}{2!} - \frac{f^{(3)}(x_0)h^3}{3!} + \cdots}_{\text{Termes } \mathbf{0}(\text{h})} \tag{3.2.5}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à $\mathbf{0}(h)$, nous obtenons

Définition 3.3. *Une approximation de la dérivée première de f au point x_0 est :*

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \qquad \text{(Dérivée arrière d'ordre } h\text{)} \tag{3.2.6}$$

En soustrayant l'équation (3.2.2) à l'équation (3.2.1) et en isolant $f'(x_0)$ nous avons

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_0)h^2}{3!} + \cdots}_{\text{Termes } \mathbf{0}(h^2)} \tag{3.2.7}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à $\mathbf{0}(h^2)$, nous obtenons

Définition 3.4. *Une approximation de la dérivée première de f au point x_0 est :*

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad \text{(Dérivée centrée d'ordre 2)} \tag{3.2.8}$$

Il est à noter qu'une dérivée d'ordre élevé sera sera plus précise qu'une dérivée d'ordre inférieur.

En additionnant les équations (3.2.1) et (3.2.2) et en isolant $f''(x_0)$,nous avons

Il est à noter qu'une dérivée d'ordre élevé sera sera plus précise qu'une dérivée d'ordre inférieur.

En additionnant les équations (3.2.1) et (3.2.2) et en isolant $f''(x_0)$,nous avons

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + \underbrace{\frac{2f^{(4)}(x_0)h^2}{4!} + \cdots}_{\text{Termes } \mathbf{0}(h^2)} \tag{3.2.9}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à $\mathbf{0}(h^2)$, nous obtenons

Définition 3.5. *Une approximation de la dérivée seconde de f au point x_0 est :*

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \quad \text{(Dérivée centrée d'ordre 2)} \tag{3.2.10}$$

Considérons une équation différentielle linéaire avec des conditions aux limites

$$\begin{aligned} y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_1(x)y &= a_0(x) \\ y(a) = y_a \quad \text{et} \quad y(b) = y_b \end{aligned}$$

Où $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ sont des fonctions de x. Pour trouver une solution approximative y_i de $y(x_i)$ en certains points x_i de l'intervalle $[a, b]$, subdivisons cet intervalle en n sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Ainsi $x_0 = a, x_i = a + ih$ et $x_n = a + nh = b$. Les conditions aux limites imposent que $y_0 = y_0 = y_a$ et que $y_n = y_b$. Il reste donc à déterminer les $(n-1)$ inconnues $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$.
La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans l' É.D.O. par des formules aux différences finies, et ce, en chaque points x_i pour $i = 1 \ldots (n-1)$. Ainsi l'équation différentielle s'écrit :

$$y''(x_i) + a_2(x_i)y'(x_i) + a_1(x_i)y(x_i) = a_0(x_i) \qquad (3.2.11)$$

En substituant les différences centrées

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \mathbf{0}(h^2) \\ y'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathbf{0}(h^2) \end{aligned}$$

dans (3.3) , nous obtenons :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a_2(x_i)(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}) + a_1(x_i)y_i = a_0(x_i) + \mathbf{0}(h^2)$$

En négligeant le terme d'erreur $\mathbf{0}(h^2)$ et en multipliant par $-2h^2$, on obtient :

$$-(2-ha_2(x_i))y_{i-1}+(4-2h^2a_1(x_i))y_i-(2+ha_2(x_i))y_{i+1}=-2h^2a_0(x_i)$$

En développant cette dernière relation pour $i=1,2,\cdots,(n-1)$ et en constatant que pour $i=1$,
nous avons $y_{i-1}=y_0=y_a$ et que pour $i=n-1$, nous avons $y_{i+1}=y_n=y_b$.
Ainsi sous forme
matricielle, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} (4-2h^2a_1(x_i)) & -(2+ha_2(x_i)) & 0 & 0 & 0 \\ -(2-ha_2(x_2)) & (4-2h^2a_1(x_2)) & -(2+ha_2(x_2)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -(2-ha_2(x_2)) & (4-2h^2a_1(x_{n-1})) & -(2+ha_2(x_2)) \\ 0 & \cdots & 0 & -(2-ha_2(x_2)) & (4-2h^2a_1(x_{n-1})) \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

$$\times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h^2a_0(x_1)+(2-ha_2(x_1))y_a \\ -2h^2a_0(x_2) \\ \vdots \\ -2h^2a_0(x_{n-1})+(2-ha_2(x_{n-1}))y_b \end{bmatrix} \qquad (3.2.13)$$

Notons que la matrice principale de dimension $((n-1)X(n-1))$ est une matrice tridiagonale.

3.3 Applications

Tige uni-dimentionnelle

Considérons une tige unidimensionnelle de longueur 3 cm. Telle qu'illustrée à la figure ci-jointe.
Subsdivisons cette tige de sorte que chaque segment soit de longueur $\Delta x = 1cm$.

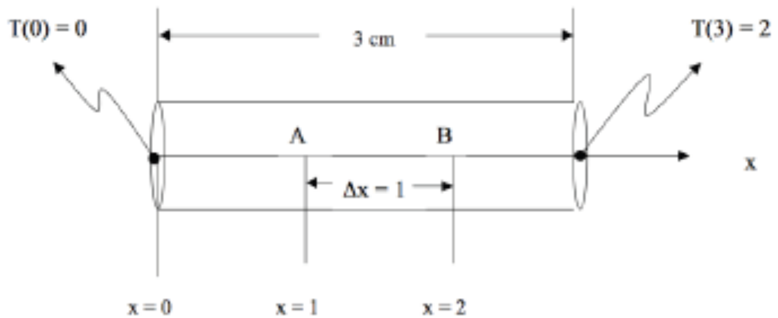

FIG. 3.4 – Tige mince

En supposant que la température $T(x)$ de la tige doit satisfaire le problème de valeurs limites

$$\begin{cases} T''(x) + x^2T(x) = 0 \\ T(0) = 0, \\ T(3) = 2, \end{cases}$$

déterminer la température approximative aux points A et B.
Solution

En substituant l'expression (3.2.10) dans l'équation différentielle nous obtenons

$$\frac{T(x+\Delta x) - 2T(x) + T(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + x^2T(x) = 0 \qquad (3.3.14)$$

En évaluant l'expression (3.3.14) aux points A et B, qui correspond à x=1 et 2 respectivement, nous obtenons

$$\frac{T(2) - 2T(1) + T(0)}{1^2} + 1^2 T(1) = 0 \tag{3.3.15}$$

$$\frac{T(3) - 2T(2) + T(1)}{1^2} + 2^2 T(2) = 0 \tag{3.3.16}$$

En écrivant ce système d'équations sous forme matricielle, compte tenu des conditions limites $T(0) = 0, T(3) = 2$nous obtenons, une forme tridiagonale

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(1) \\ T(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.17)$$

En résolvant ce système compte tenu des conditions limites $T(0) = 0, T(3) = 2$, nous obtenons :

pour le point A : $T(1) = -0,6666$ (Valeur théorique : -3,59)

pour le point B : $T(2) = -0,6666$ (Valeur théorique : -3,52)

Les valeurs approximées peut être renduent plus précise en prenant un nombre de subdivisions
plus élevé.

Plaque bi-dimentionnelle

Considérons une plaque carrée bi-dimensionnelle de longueur $\frac{\pi}{2}$ mètre. Telle qu'illustrée à la figure ci-jointe.

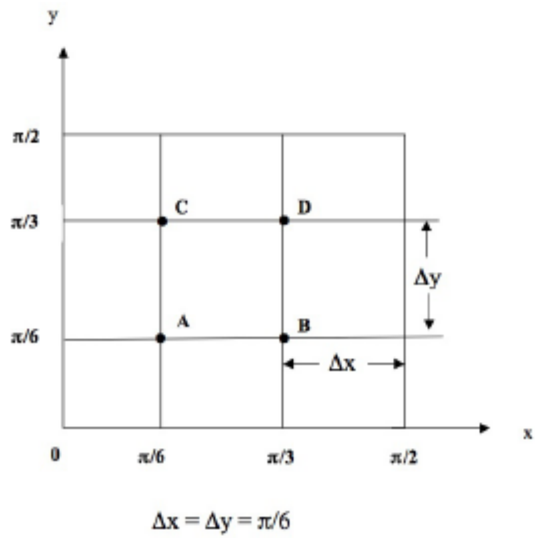

FIG. 3.5 – Plaque mince

À cette plaque, superposons un maillage dont chaque arêtes soit de longueur $\Delta x = \Delta y = \frac{\pi}{6} m$.
En supposant que la température $T(x, y)$ en chaque points de la plaque doit satisfaire le problème de valeurs limites

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}. \\ T(0,y) = & \sin(y) \\ T(\frac{\pi}{2},y) = & \cos(y) \\ T(x,0) = & \sin(x) \\ T(x,\frac{\pi}{2}) = & \cos(x), \end{cases}$$

déterminer la température approximative aux points A, B, C et D.

Solution

En appliquant l'expression (3.2.10) en chacun des points A, B, C et D du maillage et en substituant dans l'équation aux dérivés partielles $T_{xx} + T_{yy} = 0$, nous obtenons :

pour le point A :

$$\left[\frac{T(\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{6}) - 2T(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}) + T(0,\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(\frac{\pi}{6},2\frac{\pi}{6}) - 2T(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}) + T(\frac{\pi}{6},0)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.18)$$

$$\left[\frac{T(B) - 2T(A) + \sin(\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(C) - 2T(A) + \sin(\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.19)$$

$$T(B) - 4T(A) + 1 + T(C) = 0 \quad (3.20)$$

pour le point B :

$$\left[\frac{T(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}) - 2T(\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{6}) + T(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(\frac{2\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) - 2T(\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{6}) + T(\frac{2\pi}{6},0)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.21)$$

$$\left[\frac{cos(\frac{\pi}{6}) - 2T(B) + T(A)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(D) - 2T(B) + \sin(\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.22)$$

$$\sqrt{3} - 4T(B) + T(A) + T(D) = 0 \quad (3.23)$$

pour le point C :

$$\left[\frac{T(\frac{2\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) - 2T(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) + T(0,\frac{2\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}) - 2T(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) + T(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.24)$$

$$\left[\frac{T(D) - 2T(C) + \sin(\frac{2\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{cos(\frac{\pi}{6}) - 2T(C) + T(A)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.25)$$

$$T(D) - 4T(C) + \sqrt{3} + T(A) = 0 \quad (3.26)$$

pour le point D :

$$\left[\frac{T(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{6}) - 2T(\frac{2\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) + T(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6})}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{T(\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{2}) - 2T(\frac{2\pi}{6},\frac{2\pi}{6}) + T(\frac{2\pi}{6},0)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.27)$$

$$\left[\frac{\cos(\frac{2\pi}{6}) - 2T(D) + T(C)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] + \left[\frac{\cos(\frac{2\pi}{6}) - 2T(D) + T(B)}{(\frac{\pi}{6})^2}\right] = 0 \quad (3.28)$$

$$1 - 4T(D) + T(C) + T(B) = 0 \quad (3.29)$$

Ce qui nous donne le système de 4 inconnues avec 4 équations :

$$T(B) - 4T(A) + 1 + T(C) = 0 \quad (3.3.30)$$
$$T(D) - 4T(B) + \sqrt{3} + T(A) = 0 \quad (3.3.31)$$
$$T(D) - 4T(C) + \sqrt{3} + T(A) = 0 \quad (3.3.32)$$
$$1 - 4T(D) + T(C) + T(B) = 0 \quad (3.3.33)$$

En écrivant ce système d'équations sous forme matricielle, nous obtenons, une forme tridiagonale

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(A) \\ T(B) \\ T(C) \\ T(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.3.34)$$

La résolution de ce système nous donne :

$$\begin{cases} T(A) = 0,622, & T(B) = 0,744 \\ T(C) = 0,744, & T(D) = 0,622 \end{cases}$$