ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Département des génies civil, géologique et des mines

CIV4340 - **HYDRAULIQUE DES COURS D'EAU**

TP #2

02 septembre 2008

Exercice 1

Démontrez que la célérité d'une onde de faible amplitude peut être exprimée par $c^2 = gh$.

Considérons une onde simple, d'amplitude $A \equiv \eta$, se propageant dans un liquide au repos. U est la vitesse du liquide dans la section juste au dessous de la crête et c est la célérité de l'onde. Étudions le phénomène entre les sections 1 (à gauche de l'onde) et 2 (au droit de l'onde) (Fig. 1(a)). Si l'on immobilise le front par la pensée, l'écoulement devient stationnaire et les vitesses s'apparentent plutôt à celles de la figure 1(b).

L'équation de continuité entre les sections 1 et 2 s'écrit :

$$ch = (c - U)(h + \eta) \tag{1}$$

On isole ensuite U.

$$U = \frac{c\eta}{(h + \eta)} \tag{2}$$

Si $\eta \ll h$, l'onde est infinitésimale et l'on obtient :

$$U = c\left(\frac{\eta}{h}\right) \tag{3}$$

L'équation d'énergie s'écrit :

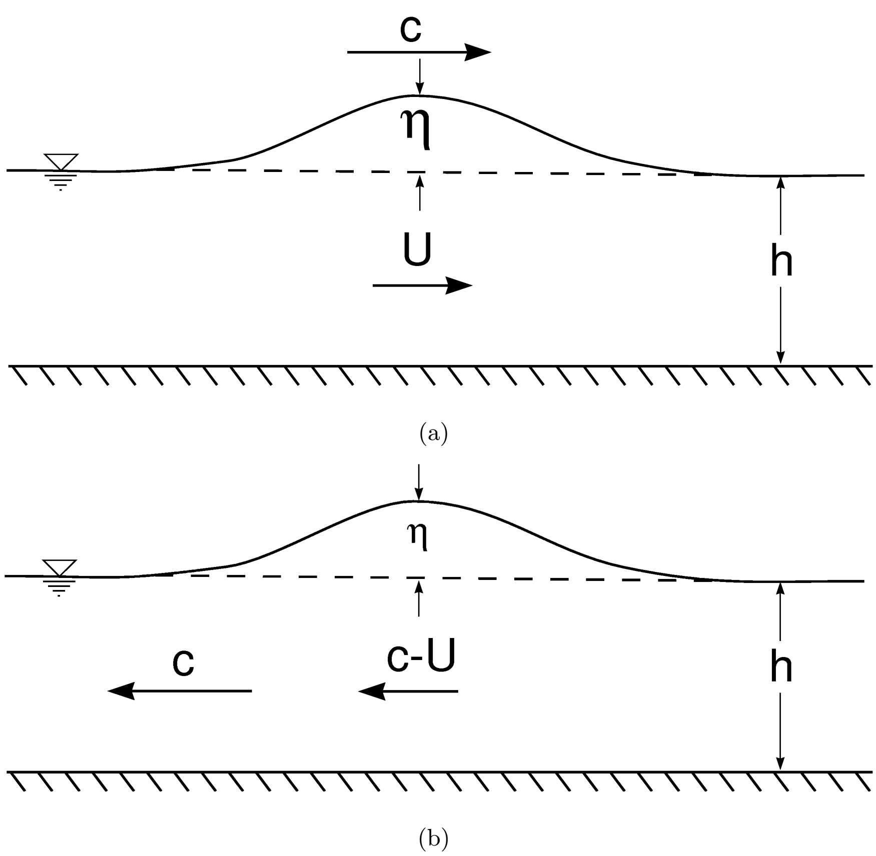

FIG. 1 – Onde simple - (a) Diagramme non-stationnaire, (b) Diagramme stationnaire

$$h + \frac{c^2}{2g} = (h + \eta) + \frac{(c - U)^2}{2g} \tag{4}$$

On isole η.

$$\eta = \frac{(c\,U)}{g}\left(1 - \frac{U}{2c}\right) \tag{5}$$

Si l'on néglige le terme $U/2c$ dans l'équation 5 on obtient :

$$\eta = \frac{(c\,U)}{g} \tag{6}$$

Finalement on substitue l'équation 6 dans l'équation 3 on l'on obtient l'expression finale suivante :

$$\mathbf{c^2 = gh} \tag{7}$$

ou

$$\mathbf{c} = \sqrt{\mathbf{gh}} \tag{8}$$

Cette relation est valable pour un canal rempli d'eau au repos. Cependant, si l'eau est en mouvement, l'onde se superpose au courant de vitesse moyenne, U, et la célérité absolue, c_w, s'exprime alors :

$$c_w = U \pm \sqrt{gD_h} \tag{9}$$

ou, pour un canal rectangulaire :

$$c_w = U \pm \sqrt{gh} = U \pm c \tag{10}$$

Cette relation nous permet de classer les écoulements en trois catégories.

1. $\mathbf{U} < \mathbf{c}$: La célérité d'une onde de faible amplitude est supérieure à le vitesse moyenne d'écoulement et l'onde peut se propager vers l'amont. C'est le régime fluvial.
2. $\mathbf{U} > \mathbf{c}$: La célérité d'une onde de faible amplitude est inférieure à le vitesse moyenne d'écoulement et l'onde ne peut pas se propager vers l'amont. C'est le régime torrentiel.
3. $\mathbf{U} \equiv \mathbf{c}$: La célérité d'une onde de faible amplitude est égale à le vitesse moyenne d'écoulement. Le régime est critique.

Exercice 2

Démontrez que la profondeur critique dans un canal de géométrie donnée peut être obtenue par l'expression suivante :

$$\frac{\mathsf{Q}^2}{\mathsf{g}}\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{S}^3} = \frac{\mathsf{U}^2}{\mathsf{gD_h}} = 1$$

Calculez ensuite la profondeur critique pour les trois cas suivants :

1. **Canal rectangulaire** $(\mathbf{b = 20\ m,\ Q = 100\ m^3/s})$
2. **Canal triangulaire** $(\mathbf{m = 1,\ Q = 50\ m^3/s})$
3. **Canal trapèze** $(\mathbf{b = 300\ m,\ m = 1,\ Q = 2000\ m^3/s})$

L'évolution de la charge spécifique H_s en fonction de la profondeur d'eau, h, pour un débit donné, Q, se présente sous la forme d'une courbe à deux asymptotes avec un minimum, H_{s_c}. La charge spécifique s'exprime :

$$H_s = \frac{U^2}{2g} + h \tag{11}$$

et passe par un minimum à :

$$
\begin{aligned}
\frac{dH_s}{dh} &= \frac{d}{dh}\left[\frac{U^2}{2g}+h\right]=0 \\
\frac{dH_s}{dh} &= -\frac{Q^2}{gS^3}\frac{dS}{dh}+1=0
\end{aligned}
$$

Comme $\frac{dS}{dh}=B$,

$$\frac{dH_s}{dh}=-\frac{Q^2B}{gS^3}=1 \tag{12}$$

et $D_h=S/B$, on a donc :

$$\mathbf{\frac{Q^2}{g}\frac{B}{S^3}=\frac{U^2}{gD_h}=1} \tag{13}$$

L'équation 13 peut être appliquée à n'importe quelle géométrie à condition d'y substituer les paramètres appropriés. Nous verrons à présent trois cas spécifiques d'application.

1. Canal rectangulaire ($\mathbf{b = 20\ m,\ \ Q = 100\ m^3/s}$)

Pour un canal de section rectangulaire, on sait que $D_h = h$, et après substitution dans l'éq. 13, on obtient une expression simplifiée spécifique aux sections de ce type.

$$\frac{U^2}{gh_c}=1 \tag{14}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
h_c &= \frac{U^2}{g} \\
&= \frac{Q^2}{S^2g} \\
&= \frac{(Q^2)}{g(bh_c)^2} \\
&= \left(\frac{(Q^2)}{gb^2}\right)^{1/3}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\mathbf{h_c = 1,37\ m}. \tag{15}$$

2. Canal triangulaire ($\mathbf{m = 1,\ \ Q = 50\ m^3/s}$)

Pour un canal de section triangulaire, $B = 2mh$ et $S = mh^2$. Après substitution dans l'éq. 13 :

$$\begin{aligned}
\frac{Q^2}{g}\frac{B}{S^3} &= 1 \\
\frac{Q^2}{g}\frac{2mh_c}{(mh_c^2)^3} &= 1 \\
h_c &= \left(\frac{2Q^2}{gm^2}\right)^{1/5}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbf{h_c = 3,48\ m}. \tag{16}$$

3. Canal trapèze ($\mathbf{b = 300\ m},\ \mathbf{m = 1},\ \mathbf{Q = 2000\ m^3/s}$)

Pour un canal de section trapèze :

$$B = b + 2mh_c \tag{17}$$

et

$$S = (b + mh_c)h_c \tag{18}$$

Après substitution dans l'éq. 13 :

$$\begin{aligned}
\frac{Q^2}{g}\frac{B}{S^3} &= 1 \\
\frac{Q^2}{g}\frac{b + 2mh_c}{((b + mh_c)h_c)^3} &= 1
\end{aligned} \tag{19}$$

L'équation obtenue est implicite. La solution est possible via une méthode de substitutions successives telle que la méthode du point fixe. Il faut tout d'abord réarranger la fonction sous la forme $x_{i+1} = g(x)$:

$$h_{ci+1} = \left(\frac{Q^2}{g}\frac{b + 2mh_c}{(b + mh_c)^3}\right)^{1/3} \tag{20}$$

L'équation 20 nous permet de prédire une nouvelle valeur, h_{ci+1} en fonction d'une ancienne valeur h_c. Donc, à condition de fournir une valeur d'essai initiale (ex. 1 m), il est possible de converger iterativement vers la solution en réinjectant la nouvelle valeur de h_c dans la partie droite de l'équation. Un résumé du calcul itératif est présenté au tableau 1. Notez que ϵ_a est l'erreur relative.

La profondeur critique pour la section trapèze est donc de $\mathbf{1,65\ m}$.

$\mathbf{i}$	$\mathbf{h_i}$	$\epsilon_{\mathbf{a}}$ (%)
1	1	-
2	1.6510	39.43
3	1.6486	0.14
4	1.6486	0.00

TAB. 1 – Solution itérative par substitutions successives