

Chapitre 2

Calcul des conduites sous pression

Objectifs

- 1- Savoir appliquer le théorème de Bernoulli et connaître les hypothèses sous-jacentes.
- 2- Généraliser le théorème de Bernoulli pour tenir compte des pertes de charge et de la présence de pompes et de turbines.
- 3- Savoir tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique le long de l'écoulement.
- 4- Calculer le débit, le diamètre, le coefficient de frottement et la perte de charge dans une conduite.
- 5- Trouver les caractéristiques de la conduite équivalente pour des conduites placées en série et en parallèle.
- 6- Savoir tracer et utiliser la courbe caractéristique d'une conduite ou d'un ensemble de conduites.

2.1 Définitions

On définit la *hauteur de charge totale* d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle, de la pression et de l'énergie cinétique par unité de poids, soit :

$$H_t = Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \quad (2.1)$$

- où H_t est la hauteur de charge totale en mètres de liquide,
 Z est la cote du point considéré par rapport à un niveau de référence, en mètres,
 P est la pression au point considéré, en pascals,
 ρ est la masse volumique du liquide, en kg par mètre cube,
 g est l'accélération due à la gravité, en mètres par seconde²,
 V est la vitesse du liquide en mètres par seconde.

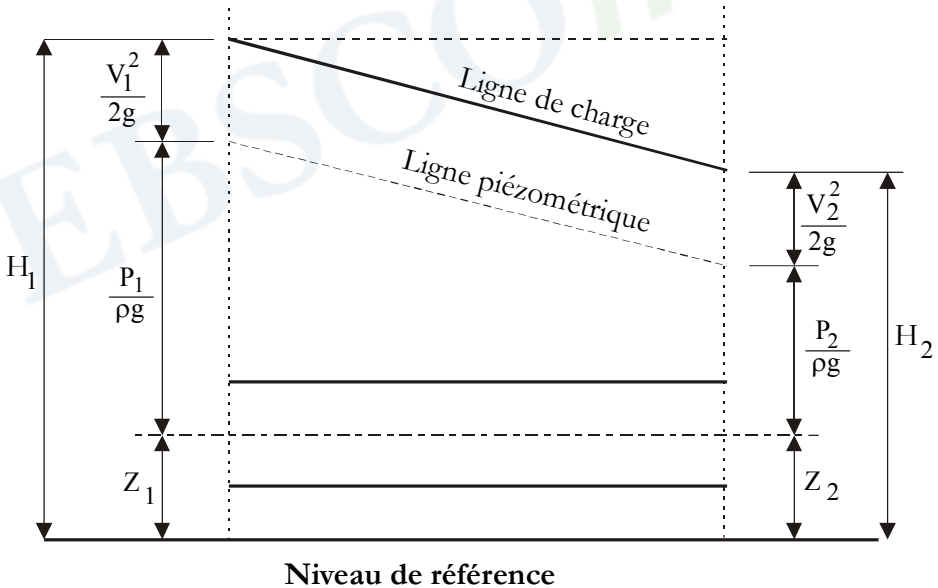


Fig. 2.1 Charges hydrauliques

On appelle *ligne de charge* le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H_t(x) = Z(x) + \frac{P(x)}{\rho g} + \frac{V^2(x)}{2g} \quad (2.2)$$

où (x) indique que les quantités sont des fonctions de la distance mesurée le long de la direction générale de l'écoulement.

On définit la *hauteur piézométrique* d'un écoulement comme la somme de l'énergie potentielle et de la pression par unité de poids :

$$H = Z + \frac{P}{\rho g} \quad (2.3)$$

On appelle *ligne piézométrique* le lieu des points décrits par la fonction suivante :

$$H(x) = Z(x) + \frac{P(x)}{\rho g} \quad (2.4)$$

En pratique, on travaille le plus souvent avec la ligne piézométrique plutôt qu'avec la ligne d'énergie pour les raisons suivantes :

- La ligne piézométrique a une signification plus matérielle que la ligne d'énergie. Pour les écoulements à surface libre, la ligne piézométrique est confondue avec la surface libre de l'eau. Pour les écoulements en charge, la ligne piézométrique représente le niveau qu'atteint l'eau grâce à sa pression quand elle réussit à se frayer un chemin. À titre d'exemple, lorsqu'un réseau d'égout se met en charge, la ligne piézométrique indique la hauteur des eaux dans les regards et permet d'identifier les régions problématiques où l'eau peut pénétrer dans les sous-sols des maisons. Pour un réseau de distribution d'eau potable, la ligne piézométrique indique en chaque point la pression résiduelle disponible chez le consommateur.
- Dans la plupart des applications en hydraulique et en géotechnique, le terme $V^2/2g$ est faible comparativement aux autres termes de la charge totale. En effet, pour différentes considérations (abrasion, coup de bélier), on fera la conception des installations de telle sorte que la vitesse soit de l'ordre de 1m/s. Avec une vitesse de cet ordre de grandeur, le terme $V^2/2g$ n'est que d'environ 0,05m alors que la charge de pression est de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

- c) Remarquons finalement que dans la plupart des applications la ligne piézométrique et la ligne d'énergie sont parallèles. La connaissance de l'une induit automatiquement la connaissance de l'autre. C'est le cas d'une conduite de diamètre constant.

2.2 Théorème de Bernoulli

Comme pour la masse, la loi de conservation de l'énergie exprime le principe que l'énergie ne peut être ni créée ni anéantie. Elle ne peut être que transformée d'une forme à une autre.

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation d'énergie dans un écoulement permanent, unidimensionnel, incompressible d'un liquide idéal (sans dissipation d'énergie). Il s'écrit entre deux sections quelconques d'une ligne de courant sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 \quad (2.5)$$

ou plus explicitement :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (2.6)$$

Il est important d'avoir à l'esprit les hypothèses de départ qui ont permis d'aboutir à une formule ou à une équation. Si dans un contexte donné une des hypothèses n'est pas vérifiée, l'utilisation d'une telle formule ou équation peut être erronée car la solution obtenue peut devenir aberrante. Examinons les quatre hypothèses qui sont à la base du théorème de Bernoulli.

- 1) Hypothèse 1 : écoulement permanent.

L'hypothèse de l'écoulement permanent signifie qu'aucune grandeur qui figure dans l'équation 2.6 ne dépend du temps. Si cette hypothèse n'était plus vérifiée, en totalité ou avec une bonne approximation, un terme additionnel traduisant cette non permanence devrait être pris en considération. L'équation de Bernoulli s'écrirait dans ce cas :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dx \quad (2.7)$$

Le terme additionnel $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dx$ représente le travail par unité de poids des forces d'inertie entre les points 1 et 2 selon la direction x.

- 2) Hypothèse 2 : écoulement unidimensionnel et unidirectionnel.

L'hypothèse de l'écoulement unidimensionnel et unidirectionnel signifie que l'écoulement possède une seule composante de la vitesse V_x qui varie uniquement dans la direction d'écoulement x. En fait, cette deuxième hypothèse n'est jamais strictement vérifiée car la vitesse varie aussi dans la direction transversale de l'écoulement. Au contact des parois, la condition d'adhérence se traduit par une vitesse nulle. La vitesse augmente avec la distance par rapport aux parois pour atteindre une valeur maximale au centre de la conduite. Pour remédier à ce problème, on prend en considération la vitesse moyenne d'écoulement et on introduit un coefficient de correction de l'énergie cinétique α sous la forme suivante :

$$H_t = Z + \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.8)$$

avec

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{AV^3} \quad (2.9)$$

La hauteur piézométrique est calculée au centre de la conduite pour un écoulement en charge et à la surface de l'eau pour un écoulement à surface libre. Comme en pratique les valeurs de α sont comprises entre 1,04 et 1,12, on adopte généralement une valeur de $\alpha = 1$.

- 3) Hypothèse 3 : écoulement incompressible.

En hydraulique, où la matière d'intérêt est principalement l'eau, l'hypothèse de l'écoulement incompressible peut être considérée comme satisfaite dans la plupart des applications

- 4) Hypothèse 4 : liquide idéal.

Le liquide idéal n'existe pas. Tous les liquides, en particulier l'eau, possèdent une viscosité qui génère des forces de frottement.

Ces forces de frottement, qui sont responsables de la dissipation d'énergie, sont toujours présentes dans l'écoulement même si parfois elles peuvent être

considérées comme négligeables. L'examen de la formule de calcul des pertes de charge exposée au paragraphe 2.4 peut confirmer ou infirmer cette hypothèse en fonction de chaque cas.

Application 2.1

On considère le siphon schématisé par la figure 2.2. Le diamètre de la conduite est de 2,0cm. Il s'agit de calculer la vitesse et la pression aux points 1, 2, 3 et 4.

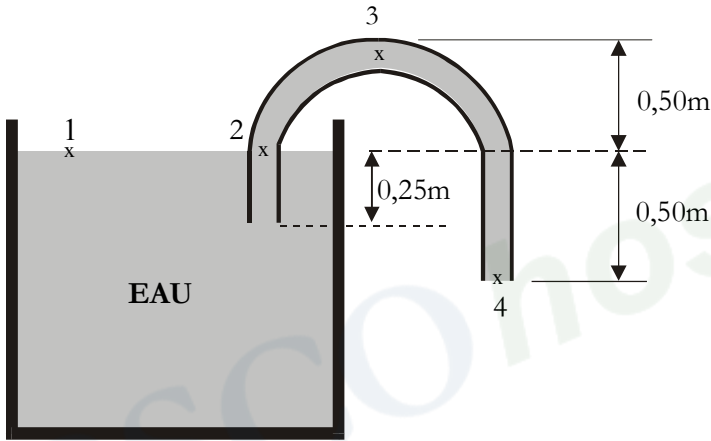


Fig. 2.2. Écoulement dans un siphon

Solution :

Par application du théorème de Bernoulli entre les points 2 et 4 :

$$Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = Z_4 + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g}.$$

Comme le diamètre du siphon est constant, la vitesse aussi est constante (voir paragraphe 1.2.3.1) : $V_2 = V_4$.

Il s'ensuit que $\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g}$. En prenant l'origine des énergies

potentielles au point le plus bas (point 4), on obtient : $Z_2 = 0,5\text{m}$ et $Z_4 = 0$.

Par ailleurs, la pression P_4 égale la pression atmosphérique : $P_4/\rho g = 10,33\text{m}$ (eau).

En utilisant ces résultats, l'équation de Bernoulli donne :

$$\left(\frac{P_2}{\rho g}\right)_{\text{absolue}} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} - 0,5\text{m} = 10,33\text{m} - 0,50\text{m} = 9,83\text{m} \text{ ou}$$

$$\left(\frac{P_2}{\rho g}\right)_{\text{relative}} = -0,50\text{m}.$$

Pour le calcul de P_3 , l'application du théorème de Bernoulli entre les

points 2 et 3 donne : $Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = Z_3 + \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g}$, soit

$$0 + 9,83\text{m} = 0,50\text{m} + \frac{P_3}{\rho g}, \text{ } V_2 \text{ étant égale à } V_3 \text{ (diamètre constant).}$$

$$\text{Donc } \left(\frac{P_3}{\rho g}\right)_{\text{absolue}} = 9,83\text{m} - 0,50\text{m} = 9,33\text{m}.$$

Pour calculer la vitesse V_2 , on applique le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}, \text{ soit } 0 + 0 + 0 = 0 + (-0,50\text{m}) + \frac{V_2^2}{2g}.$$

$$\text{Donc } V_2 = \sqrt{g} = 3,13\text{m/s}.$$

Remarque :

Il serait intéressant d'analyser la validité des quatre hypothèses qui sont à la base du théorème de Bernoulli dans ce cas précis. L'hypothèse d'écoulement permanent peut être valide dans deux cas : 1) le réservoir est de grandes dimensions comparativement au diamètre du siphon, 2) le réservoir est alimenté par une source externe pour compenser le débit soutiré. L'hypothèse de non dissipation d'énergie pourra être validée à l'aide des formules de perte de charge qui sont exposées ultérieurement. On pourra alors comparer les résultats obtenus plus haut avec ceux obtenus en tenant compte des pertes de charge.

2.3 Équation de Bernoulli généralisée

L'équation de Bernoulli exposée à la section 2.2 peut être appliquée pour un tronçon de conduite très court sur lequel on peut supposer que les pertes de charge par frottement sont faibles.

D'une manière générale, les pertes de charge ne peuvent pas être négligées et il faut par conséquent généraliser l'équation (2.5).

Désignons par h_f la perte de charge par frottement par unité de poids de liquide entre les points 1 et 2 (fig. 2.3). L'équation de Bernoulli corrigée se présente sous la forme suivante :

$$H_1 = H_2 + h_f \quad (2.10)$$

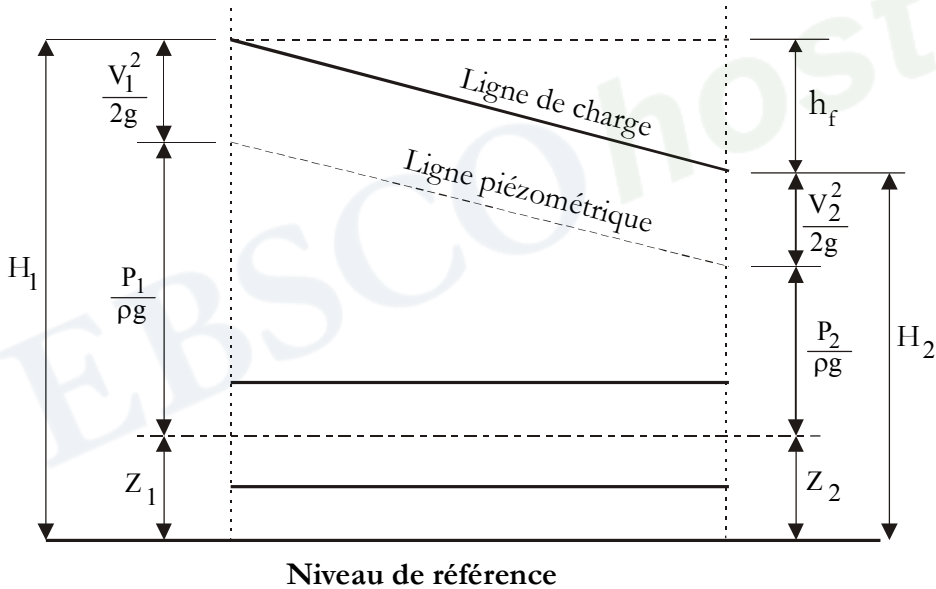


Fig. 2.3. Charges hydrauliques et perte de charge

Par ailleurs, dans tout système hydraulique, il existe un certain nombre de singularités qui produisent des pertes de charge locales par turbulence (coudes, vannes, changements de diamètre...). Afin de prendre en considération ces différentes pertes de charge h_s , l'équation 2.10 se complète comme suit :

$$H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s \quad (2.11)$$

Finalement, la présence de pompes entre les points 1 et 2 fournit au système hydraulique une hauteur manométrique H_p alors que les turbines consomment une hauteur H_T , de telle sorte que l'équation 2.11 se généralise sous l'une des formes :

$$H_p + H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s \quad (2.12a)$$

ou

$$H_1 = H_2 + h_f + \sum h_s + H_T \quad (2.12b)$$

où H_1 est la charge initiale,
 H_p est la charge produite par une pompe,
 H_2 est la charge finale,
 h_f est la charge perdue par frottement,
 $\sum h_s$ est la charge perdue dans les singularités,
 H_T est la charge utile consommée par une turbine.

Soulignons encore que chacun des termes d'énergie dans les équations 2.12a et 2.12b est exprimé en hauteur par unité de poids du liquide. Pour trouver l'énergie fournie par la pompe W_p (joules) ou consommée par la turbine, il faut multiplier H_p ou H_T par le poids mg du liquide déplacé. Ainsi, pour la pompe :

$$W_p = mgH_p = \rho SgH_p \quad (2.13)$$

où ρ est la masse volumique du liquide (kg/m^3),
 S est le volume du liquide pompé (m^3),
 g est l'accélération due à la gravité (m/s^2).

Comme $S = tQ$, on obtient :

$$W_p = \rho g t Q H_p \quad (2.14)$$

où Q est le débit de pompage (m^3/s),
 t est la durée de pompage (s).

La puissance étant énergie/temps, la puissance de la pompe est donc :

$$P_p = \frac{W}{t} = \rho g Q H_p \quad (2.15)$$

Pour une turbine, on trouve d'une manière similaire :

$$P_T = \rho g Q H_T \quad (2.16)$$

L'énergie perdue par frottement se calcule de la même manière en substituant h_f à H_p dans la relation (2.15).

En système SI, l'énergie est en joules (newtons-mètres) et la puissance est en watts (joules/seconde).

2.4 Calcul des pertes de charge par frottement

Les pertes de charge linéaires sont dues principalement aux forces de frottement des molécules d'eau contre une paroi fixe.

2.4.1 Définitions

Un fluide est une substance qui se déforme continuellement sous l'effet d'un effort de cisaillement :

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (2.17)$$

où F est la force tangentielle appliquée, en newtons,
 A est la surface de cisaillement, en m^2 .

Pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement τ est définie par la relation suivante :

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.18)$$

où $\frac{\partial v}{\partial y}$ est le gradient de vitesse.

La viscosité dynamique η (en pascals-secondes) exprime le degré de cohésion entre les particules d'un fluide pour résister à l'écoulement.

Le rapport de la viscosité dynamique η à la masse volumique ρ est appelé viscosité cinématique ν (en m^2/s):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.19)$$

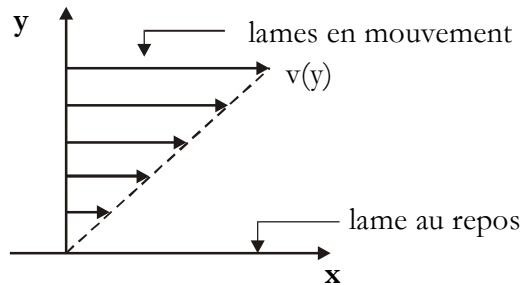


Fig. 2.4 Écoulement d'un fluide visqueux

Le tableau 2.1 fournit, pour différentes températures, la viscosité cinématique et la densité de l'eau par rapport à la masse volumique de 1000kg/m^3 à 4°C .

Temp $^\circ\text{C}$	Densité	ν m^2/s
5	1,000	$1,520 \times 10^{-6}$
10	1,000	$1,308 \times 10^{-6}$
15	0,999	$1,142 \times 10^{-6}$
20	0,998	$1,007 \times 10^{-6}$
25	0,997	$0,897 \times 10^{-6}$
30	0,995	$0,804 \times 10^{-6}$
35	0,993	$0,727 \times 10^{-6}$
40	0,991	$0,661 \times 10^{-6}$
50	0,990	$0,556 \times 10^{-6}$
65	0,980	$0,442 \times 10^{-6}$

Tableau 2.1 Densité et viscosité cinématique de l'eau

2.4.2 Formulation générale de la perte de charge

Nous proposons de calculer la perte de charge par frottement h_f à l'aide de la formule générale suivante :

$$h_f = KL \frac{Q^n}{D^m} \quad (2.20)$$

où K , n et m sont des constantes,
 L est la longueur de la conduite (m),
 D est le diamètre de la conduite (m),
 Q est le débit (m^3/s).

2.4.3 Formule de Darcy-Weissbach

En utilisant dans la formule 2.20 les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} K &= 0,0827 f \\ n &= 2 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

on obtient la forme suivante de la formule de Darcy-Weissbach :

$$h_f = 0,0827 f L \frac{Q^2}{D^5} \quad (2.21)$$

Lorsqu'on doit travailler avec la vitesse d'écoulement plutôt qu'avec le débit, on peut substituer $V^2/2g$ à $0,0827Q^2/D^4$ et on obtient l'équation traditionnelle de Darcy :

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

Le coefficient de frottement f dépend de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds Re qui est défini comme suit :

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu} \quad (2.22)$$

où ε est la hauteur moyenne des aspérités de la surface intérieure de la conduite (voir tableau 2.2),
 D est le diamètre de la conduite,
 V est la vitesse moyenne d'écoulement,
 ρ est la masse volumique du liquide,
 μ est la viscosité dynamique du liquide,
 ν est la viscosité cinématique du liquide ($\nu = \mu/\rho$, voir tab. 2.1)

Rappelons que l'ordre de grandeur de Re est un indicateur du type d'écoulement. Lorsque $Re < 2400$, l'écoulement est laminaire. Lorsque $Re > 5000$, l'écoulement est turbulent. Entre ces deux limites, l'écoulement est transitoire.

Lorsque l'écoulement est turbulent, la formule générale de Colebrook (1939) fournit le coefficient de frottement f en fonction de ε/D et Re :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (2.23)$$

Matériaux	RUGOSITÉ ABSOLUE ϵ (millimètres)
Métal étiré non ferreux : aluminium, laiton, cuivre	0,003
Conduites non métalliques : verre, plastique	0,003
Matériaux vitrifiés	0,03
Amiante-ciment, PVC	0,015
Bois	0,07
Enrobé d'asphalte centrifugé	0,03
Enrobé de béton centrifugé	0,03
Fer forgé	0,06
Fer forgé rouillé	0,6
Acier non protégé	0,03
Acier enduit	0,06
Acier galvanisé	0,15
Fonte enduite	0,16
Fonte non protégée	0,3

Tableau 2.2 Valeurs indicatives de la rugosité absolue

Remarquons que la formule 2.23 est implicite (par opposition à explicite) car l'inconnue f se trouve dans les membres de gauche et de droite de cette équation. Une méthode de résolution itérative, disponible sur calculatrice programmable, est donc nécessaire pour obtenir la solution.

Le calcul du coefficient de frottement f peut devenir explicite par l'utilisation de la formule suivante :

$$f = 0,0055 \left[1 + \left(2 \cdot 10^4 \frac{\epsilon}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (2.23a)$$

Cette formule approchée donne une erreur maximale de $\pm 1\%$ par rapport à Colebrook tant que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$10^{-6} < \frac{\epsilon}{D} < 10^{-2} \quad \text{et} \quad 5 \cdot 10^3 < Re < 10^8$$

Le diagramme de Moody (1944) présenté à la figure 2.5, en coordonnées logarithmiques, permet d'obtenir directement le coefficient de frottement f en fonction de la rugosité (ϵ/D) et du nombre de Reynolds.

Lorsque le régime d'écoulement est laminaire, on peut démontrer que le coefficient de frottement f ne dépend que du nombre de Reynolds par la relation :

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (2.24)$$

Par ailleurs, soulignons qu'en hydraulique le régime d'écoulement n'est pratiquement jamais laminaire.

En effet, en adoptant une vitesse raisonnable de 1m/s et une viscosité cinématique aux conditions courantes de l'ordre de $10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, il faut que le diamètre de la conduite soit inférieur à 2,4mm pour avoir $\text{VD}/\nu < 2400$. Ce n'est jamais le cas pour les installations hydrauliques de génie civil.

La formule de Darcy-Weissbach est précise mais du fait que le coefficient de frottement f dépend du diamètre et du débit (ε/D , $4Q/\pi Dv$), elle présente certains inconvénients liés au caractère implicite des calculs hydrauliques. En effet, examinons les différents types de problèmes qui peuvent se poser à l'ingénieur.

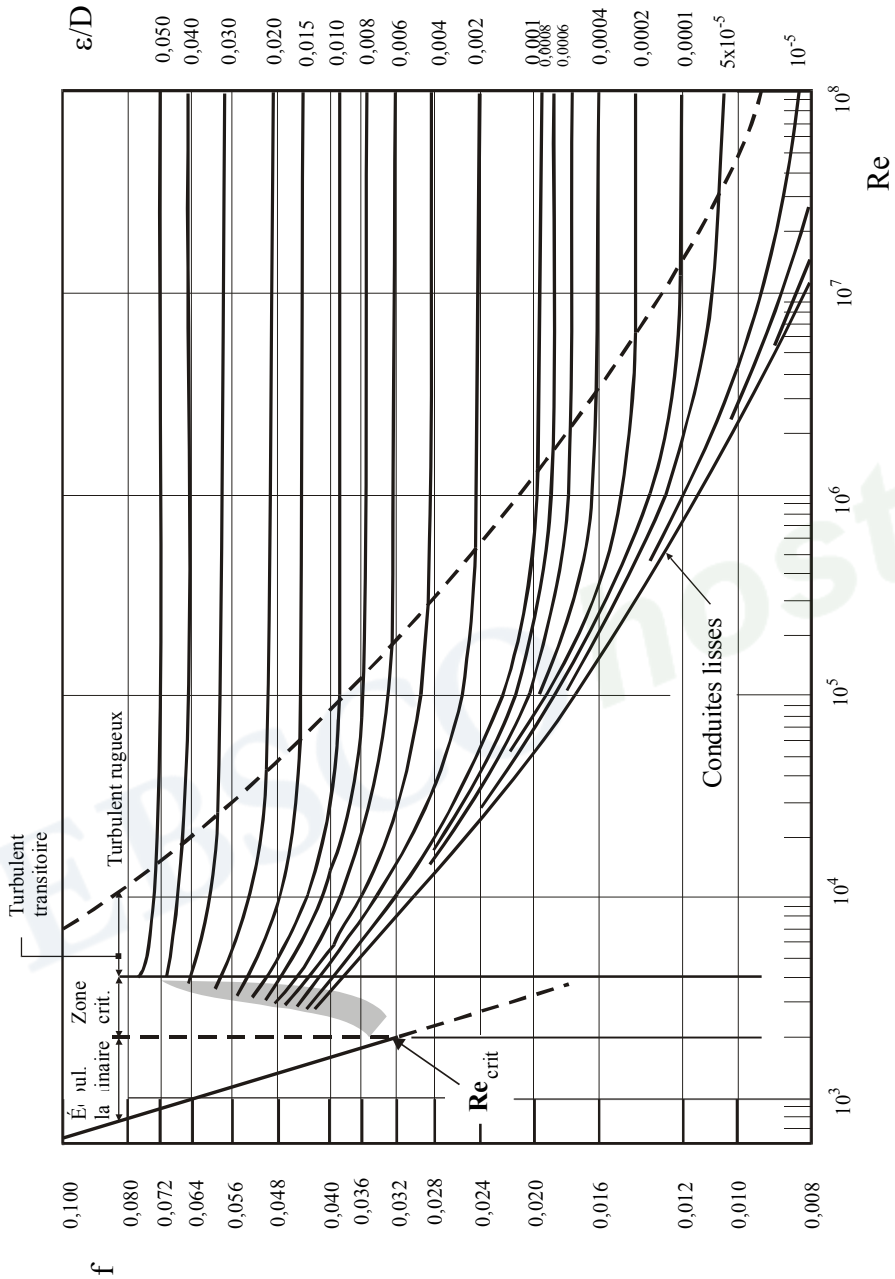


Fig. 2.5 Diagramme de Moody

Application 2.2

1) Calcul de h_f

L'ingénieur a identifié une bonne source d'eau située à une cote $Z_1 = 1000\text{m}$ et ayant une température de 15°C . Il peut faire écouler cette eau d'une manière gravitaire pour remplir un réservoir de stockage (fig. 2.6).

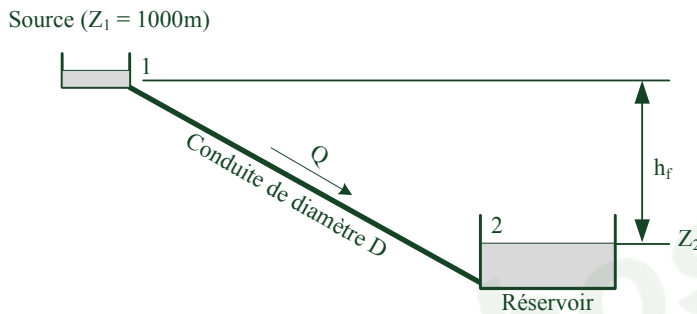


Fig. 2.6 Exemple d'écoulement gravitaire

Supposons que le débit de la source soit limité à une valeur $Q = 1,0\text{m}^3/\text{s}$. À cause de certaines considérations matérielles et techniques, le diamètre de la conduite a été fixé à $0,60\text{m}$, la longueur à $1,0\text{km}$ et le matériau de la conduite est de la fonte ($\epsilon = 0,06\text{mm}$). La question est : à quelle cote Z_2 placer le réservoir de stockage?

Solution :

L'application de l'équation de Bernoulli entre la source (point 1) et la surface libre du réservoir (point 2) donne en négligeant les pertes de charge singulières :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (2.25)$$

Les pressions atmosphériques se neutralisent et les vitesses sont nulles, si bien que l'équation 2.25 s'écrit : $Z_2 = Z_1 - h_f$, soit :

$$Z_2 = Z_1 - 0,0827 f L Q^2 / D^5.$$

Le calcul de la cote Z_2 revient donc à un calcul de pertes de charge.

Le coefficient de frottement $f(\varepsilon/D, 4Q/\pi Dv) = f(10^{-4}, 1,86 \cdot 10^6)$. Le diagramme de Moody permet de trouver $f = 0,0128$. L'altitude Z_2 de la surface libre du réservoir de stockage se calcule par :

$$Z_2 = 1000\text{m} - 0,0827 \cdot 0,0128 \cdot 1000 \cdot 1^2/0,6^5 = 986,38\text{m}.$$

2) Calcul du diamètre

On traite le même problème que précédemment sauf qu'on suppose maintenant que la municipalité a identifié un emplacement stratégique pour le réservoir et par conséquent l'altitude $Z_2 = 986,38\text{m}$ trouvée précédemment est maintenant connue. Les autres paramètres étant par ailleurs inchangés, on demande à l'ingénieur de calculer le diamètre de la conduite qui devient l'inconnue du problème.

Solution :

L'équation de Bernoulli écrite pour les mêmes points 1 et 2 fournit

$$Z_1 - Z_2 = h_f = 0,0827 f L Q^2/D^5$$

$$\text{soit } 1000\text{m} - 986,38\text{m} = 0,0827 f \{[(6 \cdot 10^{-5}/D), (1,11 \cdot 10^6/D)] \cdot 1000\} \cdot 1^2/D^5.$$

On voit que la formule de calcul du diamètre D n'est pas explicite et que le recours à une calculatrice programmable est nécessaire pour retrouver $D = 0,6\text{m}$.

3) Calcul du débit

On suppose cette fois que les altitudes de la source et du réservoir du problème précédent sont imposées et que le diamètre de la conduite a été fixé a priori. La seule inconnue du problème est maintenant le débit d'écoulement. L'équation de Bernoulli entre la source et le réservoir s'écrit comme précédemment

$$Z_1 - Z_2 = h_f = 0,0827 f L Q^2/D^5.$$

Avec les données du problème on obtient :

$$1000\text{m} - 986,38\text{m} = 0,0827 f \{[(6 \cdot 10^{-5}/0,6), (1,86 \cdot 10^6 \cdot Q)]\} \cdot 1000 \cdot Q^2/0,6^5.$$

Encore une fois on trouve une formule qui n'est pas explicite pour calculer le débit et on doit recourir à des calculs itératifs supportés par une calculatrice programmable. On trouve ainsi la solution :

$$Q = 1\text{m}^3/\text{s}.$$

Remarque :

Le lecteur intéressé par la valeur de la rugosité ε pour d'autres matériaux, peut consulter Lencastre (1999). Il est cependant difficile d'avoir une bonne estimation de cette rugosité autrement que par la mesure.

2.4.4 Formule de Hazen-Williams

La formule de Darcy-Weissbach pour le calcul des pertes de charge s'applique à tous les liquides quelle que soit leur température. Cependant cette formule, bien que précise, présente l'inconvénient des calculs itératifs dus au fait que le coefficient de frottement f dépend du diamètre et du débit (ε/D , $4Q/\pi Dv$).

Ces calculs deviennent beaucoup plus laborieux lorsqu'il s'agit par exemple de calculer les débits et les pressions dans un réseau de distribution d'eau comptant quelques centaines, voire des milliers, de tronçons de conduites.

C'est la raison pour laquelle les ingénieurs préfèrent utiliser la formule de Hazen-Williams qui est obtenue de l'équation 2.20 quand $K = 10,675/(C_{HW})^{1,852}$, $n = 1,852$ et $m = 4,87$. La formule de Hazen-Williams s'écrit alors :

$$h_f = 10,675 L \left(\frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.26)$$

C_{HW} est une constante qui ne dépend ni du débit ni du diamètre. Elle dépend seulement du matériau et du type de recouvrement utilisé pour la protection intérieure de la conduite. Il ne faut cependant pas perdre de vue que cette formule n'est valable que pour l'eau à une température ordinaire (15°C). Le tableau 2.3 fournit les ordres de grandeur du coefficient C_{HW} pour les matériaux usuels.

Il est évident que le coefficient C_{HW} diminue généralement avec l'âge de la conduite. L'agressivité de l'effluent, son potentiel hydrogène (pH), sa dureté ainsi que les phénomènes d'érosion, d'abrasion et de corrosion affectent aussi significativement la valeur du coefficient C_{HW} .

Les valeurs fournies au tableau 2.3 le sont à titre indicatif car il est impossible de connaître pour une vieille conduite, autrement que par la mesure, la valeur exacte du coefficient C_{HW} .

Matériau	C_{HW}
PVC	150
Amiante-ciment	140
Béton lissé	130
Acier soudé, neuf	120 - 140
Fonte neuve	130 - 140
Fonte âgée (10 ans)	110
Fonte âgée (20 ans)	100
Fonte âgée (30 ans)	85
Fonte âgée (40 ans)	75
Fonte âgée (50 ans)	70

Tableau 2.3 Valeurs du coefficient C_{HW}

Adapté de Brière (1997)

Application 2.3

Reprenons les mêmes problèmes que ceux vus dans l'application 2.2 en utilisant cette fois la formule de Hazen-Williams. On donne la constante $C_{HW} = 140$ pour la fonte.

1) Calcul de h_f

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1 - h_f = Z_1 - 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} 1/D^{4,87} \\ &= 1000 - 10,675 \cdot 1000 (1/140)^{1,852} 1/(0,6)^{4,87} \\ &= 986,38\text{m} \end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui trouvé par la formule de Darcy-Weissbach. Mais la concordance n'est pas toujours parfaite car la formule de Hazen-Williams est moins précise.

2) Calcul du diamètre

$$Z_1 - Z_2 = 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} / D^{4,87}$$

Soit

$$D = \left[\frac{10,675 \times L \left(\frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852}}{Z_1 - Z_2} \right]^{1/4,87} = \left[\frac{10,675 \cdot 1000 \left(\frac{1}{140} \right)^{1,852}}{13,62} \right]^{1/4,87} = 0,6\text{m}$$

Cette valeur était la donnée de départ.

3) Calcul du débit

$$Z_1 - Z_2 = 10,675 L (Q/C_{HW})^{1,852} / D^{4,87}$$

$$Q = C_{HW} \left(\frac{(Z_1 - Z_2) D^{4,87}}{10,675 \cdot L} \right)^{1/1,852} = 140 \left(\frac{13,62 \cdot (0,6)^{4,87}}{10,675 \cdot 1000} \right)^{1/1,852} = 1\text{m}^3/\text{s}$$

Soit exactement la valeur de départ.

2.4.5 Relation entre les deux formules de perte de charge

Pour trouver la relation entre le coefficient de frottement f dans la relation de Darcy-Weissbach et le coefficient C_{HW} on égalise les deux formules :

$$h_f = 0,0826 f L \frac{Q^2}{D^5} = 10,675 L \left(\frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.27)$$

Par ailleurs, l'expression du nombre de Reynolds défini par (2.22) peut être réécrite sous la forme :

$$Q = \frac{\pi D}{4} v Re \quad (2.28)$$

En substituant (2.28) dans (2.27) et utilisant la valeur de la viscosité cinématique à la température de l'eau à 15°C, on obtient :

$$f = \frac{1014}{C_{HW}^{1,852} Re^{0,148}} \frac{1}{D^{0,0184}} \quad (2.29)$$

Pour toute la gamme des diamètres standard utilisés en hydraulique, $D^{0,0184}$ est approximativement égal à 1, si bien que (2.29) peut s'écrire :

$$f = \frac{1014}{C_{HW}^{1,852} Re^{0,148}} \quad (2.30)$$

2.5 Calcul des pertes de charge singulières

2.5.1 Généralités

Les singularités hydrauliques sont présentes dans tous les réseaux. Il peut s'agir de coudes, clapets, vannes, chutes, changements de pente ou de section, entrée ou sortie d'un réservoir, grilles, branchements et bifurcations, regard... Toutes ces singularités sont responsables d'une dissipation d'énergie par turbulence qui affecte l'écoulement. Dans beaucoup de situations où le système hydraulique analysé est très étendu et les singularités hydrauliques sont modérées, les pertes de charge singulières peuvent être négligées par rapport aux pertes de charge linéaires par frottement. Dans d'autres situations, les pertes de charge singulières

deviennent très importantes, voire même prépondérantes par rapport aux pertes de charge linéaires et ne peuvent plus être négligées.

En tout état de cause, les méthodes de calcul de ces pertes de charge singulières seront exposées. Une formule simple permettra de mesurer l'importance des pertes de charge singulières par rapport aux pertes de charge linéaires.

D'une manière générale, les pertes de charge singulières peuvent être estimées à l'aide de la formule suivante :

$$h_s = K \frac{V^2}{2g} \quad (2.31)$$

ou encore, en remplaçant V par $4Q/\pi D^2$:

$$h_s = 0,0827 \cdot K \frac{Q^2}{D^4} \quad (2.32)$$

où V est la vitesse moyenne dans la conduite,
 D est le diamètre de la conduite,
 K est une constante qui dépend du type de singularité.

Les valeurs de K sont indiquées dans les paragraphes qui suivent pour donner des ordres de grandeur. Il existe parfois des différences notables entre les valeurs de K déclarées dans les différents ouvrages et manuels pour la même singularité. Ces différences peuvent s'expliquer principalement par la variation des dimensions et les variantes de fabrication.

2.5.2 Pertes de charge dans un élargissement brusque

Ces pertes de charge sont dues à l'expansion du fluide dans un espace plus grand s'accompagnant d'une diminution de vitesse et d'une augmentation de la pression. Borda (1733-1799) est le premier à avoir établi la formule de perte de charge dans un élargissement brusque. Par application de l'équation de quantité de mouvement au volume compris entre les sections 1 et 2 de la figure 2.7, on trouve :

$$h_s = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{V^2}{2g} \quad (2.33)$$

Le coefficient de perte de charge singulière vaut par conséquent :

$$K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (2.34)$$

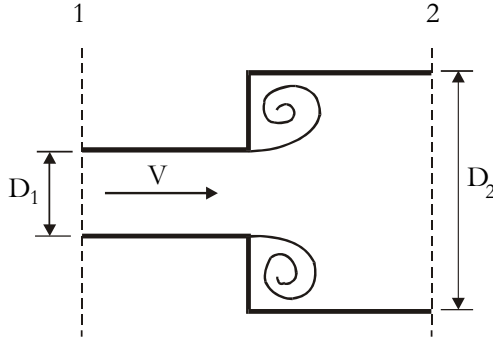


Fig. 2.7 Élargissement brusque

Remarques :

- 1) La vitesse V à prendre en considération dans les calculs est celle qui prévaut avant l'élargissement (Fig. 2.7).
- 2) Lorsqu'une conduite débouche dans un réservoir, D_1/D_2 tend vers 0 et $K=1$. Cela signifie que toute l'énergie cinétique $V^2/2g$ que possède l'eau dans la conduite s'annule totalement et instantanément par effet de choc contre la masse d'eau stagnante dans le réservoir.

2.5.3 Pertes de charge dans un rétrécissement

Ce phénomène est similaire à celui de l'élargissement brusque. Le décollement de la veine liquide au niveau du rétrécissement provoque une contraction de la section d'écoulement qui passe de A_1 à A_c (Fig. 2.8). La section d'écoulement augmente ensuite comme dans un élargissement progressif pour atteindre A_2 .

Au niveau de la section contractée A_c , la vitesse augmente et la pression diminue avec un risque de cavitation.

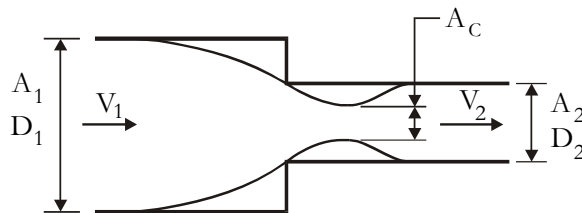


Fig. 2.8 Rétrécissement brusque

Le tableau 2.4 fournit des valeurs de K en fonction de D_2/D_1 . Notons que pour une prise d'eau dans un réservoir, la constante K est 0,50. Quand cette prise d'eau est bien profilée, la constante K peut descendre jusqu'à 0,04 (figure 2.9).

D_2/D_1	K
0,2	0,56
0,4	0,52
0,6	0,43
0,8	0,21

Tableau 2.4 Valeurs de K pour rétrécissement brusque

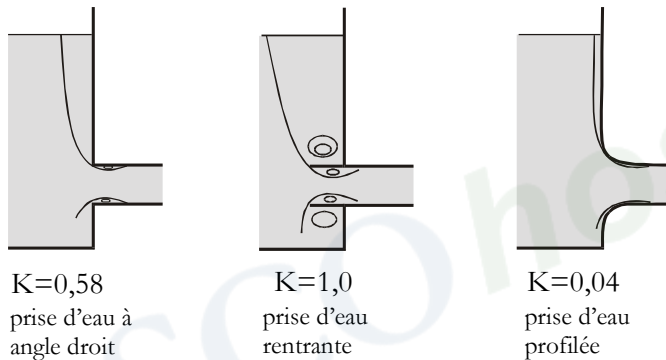


Fig. 2.9 Prises d'eau dans un réservoir

2.5.4 Pertes de charge dans une dérivation latérale

Les valeurs du coefficient de pertes de charge singulières dans la dérivation latérale (figure 2.10) dépendent de l'angle α , tel que montré dans le tableau 2.5.

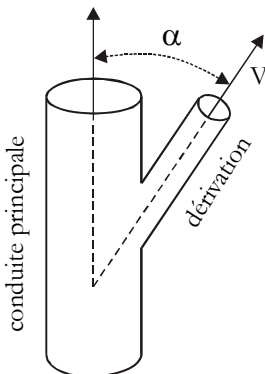


Fig. 2.10 Dérivation latérale

α (degrés)	K
15	0,1
30	0,3
45	0,5
60	0,7
90	1,3

Tableau 2.5 Valeurs de K dans une dérivation

2.5.5 Pertes de charge dans les vannes et les robinets

Ces pertes de charge singulières sont causées principalement par l'élargissement brusque après la restriction causée par la vanne ou le robinet. Pour certaines vannes, la déviation de l'écoulement à travers un chemin sinueux cause une perte d'énergie supplémentaire. Le coefficient de perte de charge singulière K peut être nul quand la vanne est complètement ouverte mais peut atteindre une valeur infinie quand la vanne est complètement fermée. La valeur de K passe par toutes les valeurs entre ces deux extrêmes.

Pour un robinet vanne (figure 2.11), les ordres de grandeur des valeurs de K en fonction du degré de fermeture x/D sont donnés au tableau 2.6.

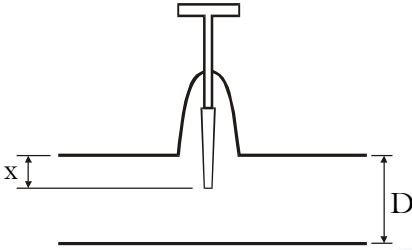


Fig. 2.11 Robinet vanne

x/D	K
1/8	0,1
1/4	0,3
1/2	2
3/4	20
7/8	100

Tableau 2.6 K pour robinet vanne

Le tableau 2.7 fournit les ordres de grandeur du coefficient de perte de charge singulière K pour les vannes papillons (figure 2.12) pour différents angles d'orientation α :

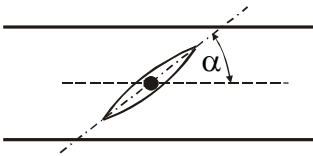


Fig. 2.12 Vanne papillon

α (degrés)	K
0 (100% ouvert)	0,30
10	0,50
20	1,50
30	3,80
40	10,5
50	32
60	105

Tableau 2.7 K pour vannes papillons

Adapté de Carlier (1972)

La vanne papillon a l'avantage de se fermer très rapidement, ce qui la rend efficace pour isoler rapidement un tronçon de conduite en cas de bris. Il faut cependant faire attention au coup de bélier traité dans le chapitre 4.

Les clapets anti-retour (figure 2.13) sont utilisés principalement sur les conduites de refoulement. Ils permettent le passage de l'eau dans un sens prédéterminé sous l'effet de la pression. Quand le courant a tendance à s'inverser à la suite de l'arrêt d'une pompe ou du refoulement d'un réseau d'égout, le clapet se ferme pour empêcher une telle inversion.

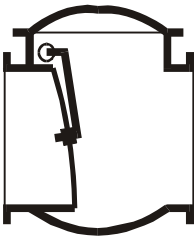


Fig. 2.13 Clapet anti-retour

Pour un clapet complètement ouvert, K peut varier entre 0,5 et 2,5.

2.5.6 Pertes de charge dans les coudes

La déviation de l'écoulement dans un coude s'accompagne de forces centripètes qui modifient localement les champs de pression et de vitesse dans une section transversale à l'écoulement (fig. 2.14). Ainsi, dans un plan horizontal, la pression augmente en direction opposée au centre de courbure O selon la deuxième équation d'Euler :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{r} \quad (2.35)$$

- où
- P est la pression,
 - n est la coordonnée curviligne selon l'axe perpendiculaire,
 - r est le rayon de courbure local,
 - ρ est la masse volumique de l'eau,
 - V est la vitesse d'écoulement.

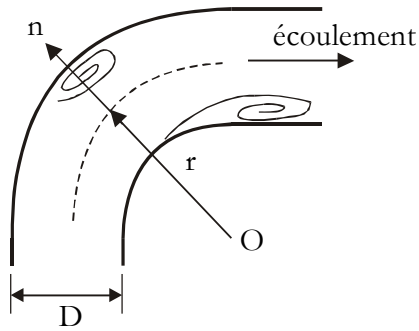


Fig. 2.14 Écoulement dans un coude

Inversement, la vitesse d'écoulement diminue en direction opposée au centre de courbure O . Cette perturbation locale de l'écoulement se manifeste par la formation de deux régions séparées qui sont le siège de mouvements tourbillonnaires consommateurs d'énergie.

Pour un coude à 90 degrés arrondi (figure 2.14), la valeur de K dépend directement du rapport r/D selon le tableau 2.8.

r/D	0,5	0,75	1	1,5	2	4	10	20
K	0,90	0,45	0,35	0,25	0,20	0,16	0,32	0,42

Tableau 2.8 K pour coude arrondi

Adapté de Carlier (1972)

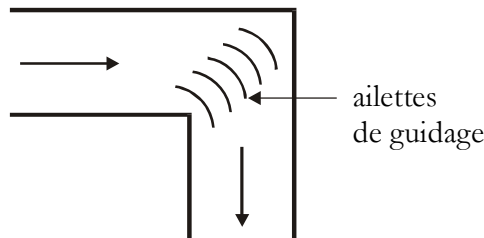


Fig. 2.15 Coude à 90° de section rectangulaire

Pour un coude à 90 degrés de section carrée ou rectangulaire, en l'absence d'ailettes, la valeur normale du coefficient K est $K = 1,1$. En présence d'ailettes de guidage, la valeur de K varie généralement entre 0,2 et 0,3 mais peut descendre jusqu'à 0,15 (figure 2.15). Les ailettes de guidage, dont le nombre varie normalement entre 5 et 15, sont faites en tôle ondulée.

2.6 Longueur équivalente

Deux formules différentes ont été proposées pour calculer les pertes de charge linéaires (2.21) et singulières (2.32). L'équation de Bernoulli corrigée qui tient compte de ces deux pertes de charges s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0,0827fL \frac{Q^2}{D^5} + 0,0827 \frac{Q^2}{D^4} \sum K_i \quad (2.36)$$

Peut-on simplifier les calculs des pertes de charge? Considérons, à titre d'exemple, une vanne qui présente une singularité hydraulique et produit une perte de charge singulière selon l'équation (2.32). Pour simplifier les calculs, nous désirons remplacer (virtuellement) cette singularité par une conduite de longueur équivalente L_{eq} sur laquelle se produirait une perte de charge par frottement égale à la perte de charge singulière. C'est la longueur équivalente qui viendra majorer la longueur physique réelle pour tenir compte des pertes de charge singulières, tel que le montre schématiquement la figure 2.16.

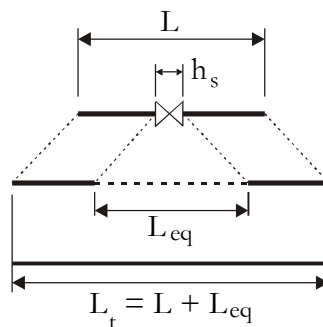


Fig. 2.16 Longueur équivalente d'une perte de charge singulière

Mathématiquement, on écrit : $0,0827 f L_{eq} \frac{Q^2}{D^5} = 0,0827 K \frac{Q^2}{D^4}$, soit :

$$L_{eq} = \frac{KD}{f} \quad (2.37)$$

À l'aide de cette relation, l'équation 2.36 devient :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0,0827 f L_t \frac{Q^2}{D^5} \quad (2.38)$$

où L_t est la longueur totale $L_t = L + \sum L_{eq}$

Cette notion de longueur équivalente ne fait pas que simplifier l'écriture des calculs mais permet aussi aux techniciens d'utiliser la même terminologie que celle utilisée par les fournisseurs d'équipements hydrauliques. En effet, ce sont les longueurs équivalentes, correspondant aux différents accessoires hydrauliques, qui sont fournies dans les catalogues et non les valeurs de K. Il faut cependant souligner que d'après la formule (2.37), la longueur équivalente dépend aussi du matériau et du diamètre de la conduite sur laquelle est installée la singularité.

Cette notion de longueur équivalente permet de mesurer l'importance des pertes de charge singulières par rapport aux pertes de charge linéaires moyennant le

rapport $\frac{\sum L_{eq}}{L_t} \times 100\%$.

2.7 Calcul des conduites en série et en parallèle

2.7.1 Conduites en série

Lorsque plusieurs conduites sont placées en série, le débit qui les traverse est le même et la perte totale de charge est la somme de toutes les pertes de charge (Fig. 2.17) :

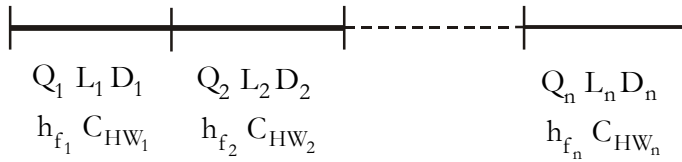


Fig. 2.17 Conduites en série

$$h_{f_{\text{total}}} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + \dots + h_{f_n} \quad (2.39)$$

Le débit ne varie pas le long de la série : $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = Q$.

Si on utilise la formule de Hazen-Williams pour estimer la perte de charge :

$$h_f = L \left(\frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \cdot \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}} \quad (2.40)$$

on peut poser :

$$K = L \left(\frac{3,59}{C_{HW}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D^{4,87}} \quad (2.41)$$

où K est le coefficient de débitance.

Imaginons que l'on veuille remplacer les n conduites par une conduite équivalente qui fait transiter le même débit que l'ensemble des conduites avec une perte de charge donnée. En utilisant (2.41) dans (2.40), puis (2.40) dans (2.39) pour chacune des conduites, on trouve :

$$K_{\text{eq}} Q_{\text{eq}}^{1,852} = K_1 Q_1^{1,852} + \dots + K_n Q_n^{1,852} \quad (2.42)$$

Comme les débits sont égaux, l'équation 2.42 devient :

$$K_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.43)$$

En posant :

$$K_{\text{eq}} = L_{\text{eq}} \left(\frac{3,59}{(C_{HW})_{\text{eq}}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D_{\text{eq}}^{4,87}} \quad (2.44)$$

on peut calculer soit une longueur équivalente soit un diamètre équivalent ou un $(C_{HW})_{\text{eq}}$. Dans chacun des cas, on fixe deux paramètres et on calcule le troisième.

Application 2.4

Considérons deux conduites en série dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure 2.18.

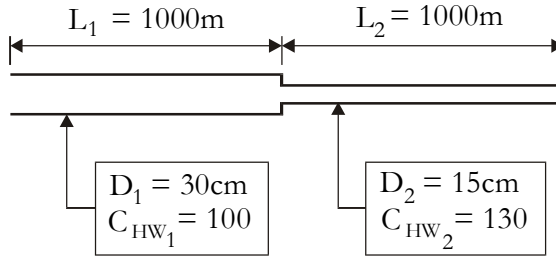


Fig. 2.18 Deux conduites en série

Il faut trouver le diamètre d'une conduite équivalente dont le coefficient de Hazen-Williams est $C_{HW} = 140$ et la longueur est 2000m.

En utilisant l'équation (2.42) on trouve :

$$K_1 = 742,09 \quad K_2 = 13349 \quad K_{eq} = 14091$$

En utilisant (2.44) on trouve :

$$D_{eq} = 0,166\text{m}$$

On aurait pu aussi procéder de la manière suivante :

- on suppose une valeur de débit, par exemple $Q = 0,01\text{m}^3/\text{s}$,
- on calcule la perte de charge h_{f1} et h_{f2} dans chacune des conduites, en l'occurrence :

$$h_{f1} = 0,146\text{m} \text{ et } h_{f2} = 2,64\text{m}$$

- la perte de charge totale dans la conduite équivalente est $h_{fT} = 2,785\text{m}$, le débit étant le même $Q = 0,01\text{m}^3/\text{s}$.

- en utilisant ces valeurs dans la formule de Hazen-Williams (2.26), on trouve :

$$D_{eq} = 0,166\text{m}$$

2.7.2 Conduites en parallèle

On dit que les conduites sont placées en parallèle lorsque leur point de bifurcation (1) et de confluence (2) sont communs, tel que montré schématiquement sur la figure 2.19.

Lorsque plusieurs conduites sont en parallèle, la perte de charge est la même pour toutes les conduites et le débit total est égal à la somme des débits.

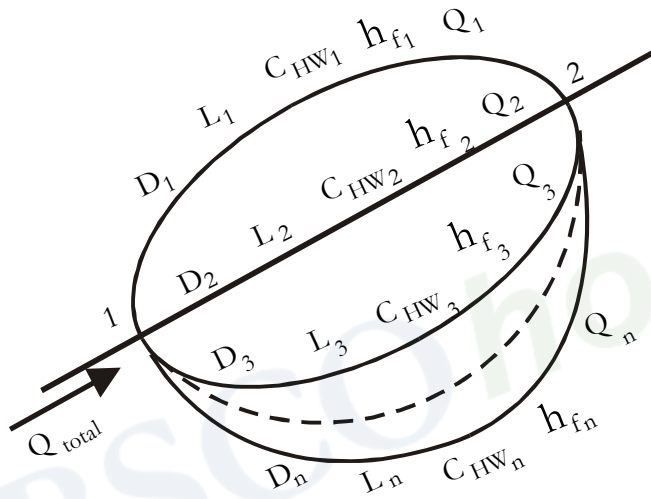


Fig. 2.19 Conduites en parallèle

On écrit alors :

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (2.45)$$

La conduite équivalente devra donc véhiculer un débit égal au débit total sous une perte de charge égale à la perte de charge unique. Pour une conduite i quelconque on peut écrire, avec les mêmes notations que pour les conduites en série :

$$Q_i = \left(\frac{h_f}{K_i} \right)^{1/1,852} \quad (2.46)$$

En utilisant (2.46) pour chacune des conduites dans (2.45) et en considérant que toutes les pertes de charge sont égales, on trouve :

$$\frac{1}{K_{eq}} = \left[\left(\frac{1}{K_1} \right)^{1/1,852} + \left(\frac{1}{K_2} \right)^{1/1,852} + \dots + \left(\frac{1}{K_n} \right)^{1/1,852} \right]^{1,852} \quad (2.47)$$

ou encore :

$$K_{eq} = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{K_i} \right)^{1/1,852} \right]^{1,852}} \quad (2.48)$$

De la même manière que pour les conduites en série, on pose :

$$K_{eq} = L_{eq} \left(\frac{3,59}{(C_{HW})_{eq}} \right)^{1,852} \cdot \frac{1}{D_{eq}^{4,87}} \quad (2.49)$$

On peut calculer soit une longueur équivalente soit un diamètre équivalent ou un $(C_{HW})_{eq}$ en fixant chaque fois deux paramètres et en calculant le troisième. Cependant, c'est le diamètre équivalent qui est le plus souvent recherché. La formule (2.49) souligne l'avantage d'utiliser la formule de Hazen-Williams au lieu de celle de Darcy-Weissbach.

Application 2.5

Deux conduites placées en parallèle relient deux réservoirs, tel que schématisé par la figure 2.20.

Il faut démontrer que la perte de charge est la même dans les deux conduites et trouver le diamètre de la conduite équivalente ayant la même longueur et le même coefficient C_{HW} que les deux conduites.

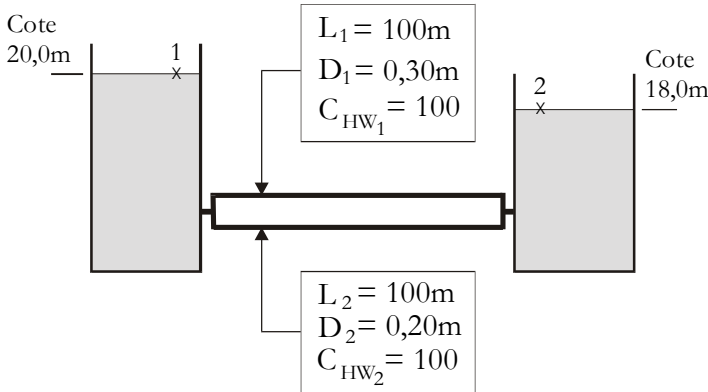


Fig. 2.20 Conduites parallèles entre deux réservoirs

Écrivons l'équation de Bernoulli pour une goutte d'eau qui est partie du point 1 de cote $Z_1 = 20\text{m}$, pour rejoindre le point 2 de cote $Z_2 = 18\text{m}$, en passant par la conduite de diamètre D_1 :

$$Z_1 = Z_2 + h_{f_1}$$

soit

$$h_{f_1} = Z_1 - Z_2 = 2,0\text{m} = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (a)$$

Écrivons la même équation pour une autre goutte d'eau qui a emprunté la conduite de diamètre D_2 :

$$h_{f_2} = 2,0\text{m} = L_2 \left(\frac{3,59}{C_{HW_2}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (b)$$

En comparant les deux équations (a) et (b), il est clair que $h_{f_1} = h_{f_2}$.

Par ailleurs, les débits Q_1 et Q_2 sont a priori différents et obéissent à la relation $Q_T = Q_1 + Q_2$, Q_T étant le débit total.

Pour trouver le diamètre de la conduite équivalente, on calcule K_1 et K_2 pour les deux conduites (2.42) :

$$K_1 = 74,21 \quad K_2 = 534,6$$

La valeur du coefficient K équivalent se calcule par (2.48) :

$$K_{eq} = 42,90$$

Finalement l'équation (2.49) fournit le diamètre équivalent :

$$D_{eq} = 0,335\text{m}$$

On aurait pu procéder d'une manière plus rapide en calculant les débits Q_1 et Q_2 par l'utilisation directe de l'équation de Hazen-Williams (2.26) :

$$Q_1 = 0,1421\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0,0489\text{m}^3/\text{s}$$

L'utilisation du débit total dans la conduite équivalente avec la même perte de charge de 2,0m donne directement le diamètre équivalent $D_{eq} = 0,335\text{m}$.

2.8 Courbe caractéristique d'une conduite (C.C.C.)

La courbe caractéristique d'une conduite donnée est la représentation graphique de la variation de la perte de charge entre deux extrémités de cette conduite en fonction du débit qui la traverse.

La perte de charge se calcule par la relation (2.20). Normalement, deux points ciblés, en plus de l'origine, suffisent pour tracer cette courbe (figure 2.21)

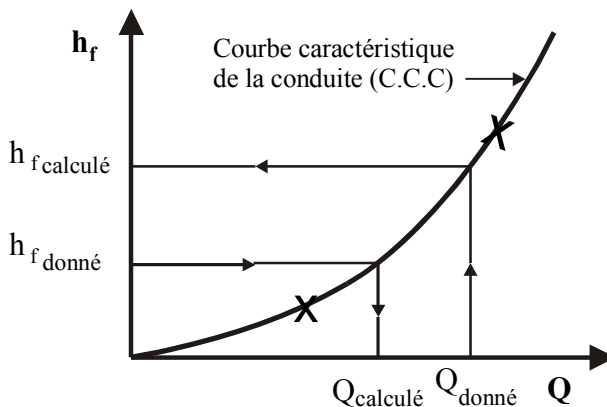


Fig. 2.21 Courbe caractéristique d'une conduite

Une telle courbe caractéristique a plusieurs utilités :

- Une fois la courbe tracée, il est possible de calculer la perte de charge h_f pour n'importe quelle valeur du débit ou l'inverse. Cet usage devient plus pertinent quand le système comporte plusieurs conduites en série et en parallèle.
- La courbe caractéristique devient incontournable quand il faut trouver le point de fonctionnement d'une pompe. Comme il est démontré au chapitre 3, ceci est fait en superposant la courbe caractéristique de la conduite à la courbe caractéristique de la pompe.

2.9 Courbe caractéristique de conduites en série

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en série (figure 2.17), on doit appliquer l'équation (2.36) et tenir compte du fait que $Q_T = Q_1 = Q_2 \dots = Q_n$ et $h_{fT} = h_{f1} + h_{f2} + \dots + h_{fn}$. La courbe caractéristique résultante est montrée sur la figure 2.22.

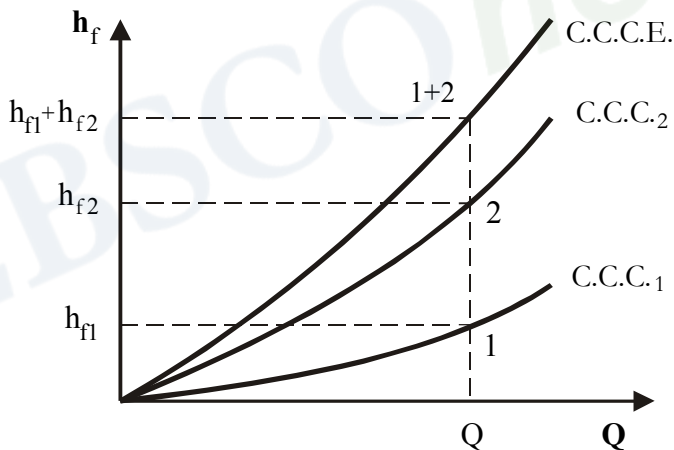


Fig. 2.22 Courbe caractéristique de deux conduites en série

2.10 Courbe caractéristique de conduites en parallèle

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en parallèle (figure 2.19), on utilise l'équation (2.42) en tenant compte du fait que les pertes de charge sont égales :

$$h_{fT} = h_{f1} = h_{f2} \dots = h_{fn} \text{ et } Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$

La courbe caractéristique résultante est montrée sur la figure 2.23.

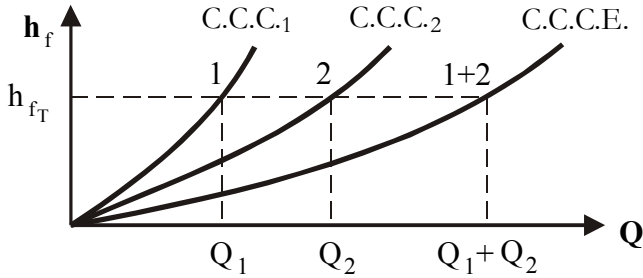


Fig. 2.23 Courbe caractéristique de deux conduites en parallèle

2.11 Problème des trois réservoirs

Ce problème illustre une situation courante qui se présente dans les systèmes de distribution d'eau potable. La plupart des municipalités possèdent un réservoir d'accumulation d'eau principal **A** (figure 2.24). Quand la municipalité est assez étendue, elle possède aussi un réservoir secondaire de soutien **B**. Ce réservoir se remplit durant la nuit, aux moments de faible demande à partir du réservoir **A** et se vide le jour aux moments de forte demande, quand la pression diminue dans le réseau. Le niveau du troisième réservoir **C** représente la pression résiduelle dans le réseau. Le débit acheminé vers le troisième réservoir représente le débit de consommation.

On est intéressé à connaître les débits Q_1 , Q_2 et Q_3 dans les trois conduites, le sens de l'écoulement dans la conduite 2 étant a priori inconnu.

À titre d'exemple, les données du problème sont :

$Z_1 = 60\text{m}$	$D_1 = 0,90\text{m}$	$L_1 = 10000\text{m}$	$C_{\text{HW}1} = 100$
$Z_2 = 30\text{m}$	$D_2 = 0,60\text{m}$	$L_2 = 10000\text{m}$	$C_{\text{HW}2} = 100$
$Z_3 = 20\text{m}$	$D_3 = 0,90\text{m}$	$L_3 = 10000\text{m}$	$C_{\text{HW}3} = 100$

En dénotant par **I** le point de jonction entre les trois conduites, l'écoulement se fait donc soit de **I** vers **B** ou l'inverse, au gré de la demande.

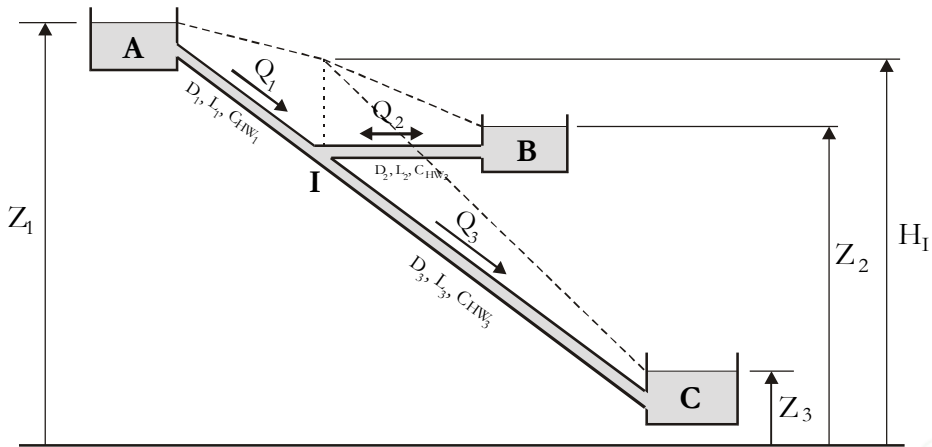


Fig. 2.24 Problème des trois réservoirs

L'application de l'équation de Bernoulli entre la surface libre des trois réservoirs et le point **I** où l'énergie totale est désignée par H_I , donne respectivement :

$$Z_1 - H_I = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (2.50)$$

$$H_I - Z_2 = L_2 \left(\frac{3,59}{C_{HW_2}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (2.51)$$

$$H_I - Z_3 = L_3 \left(\frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.52)$$

Dans ces équations, on a supposé que l'écoulement se fait de **I** vers **B**. Dans le cas contraire, il faut remplacer le premier membre de l'équation (2.51) par son opposé.

On est en présence d'un système de trois équations avec quatre inconnues : Q_1 , Q_2 , Q_3 et H_I . Afin d'être capable de résoudre ce système, il faut ajouter une quatrième équation qui traduit la conservation de la masse. En supposant que l'écoulement se fait de **I** vers **B** :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (2.53)$$

ou dans le cas où l'écoulement se fait de **B** vers **I** :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (2.54)$$

En additionnant membre par membre les équations (2.50) et (2.51) on obtient :

$$Z_1 - Z_2 = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_2 \left(\frac{3,59}{C_{HW_2}} \right)^{1,852} \frac{Q_2^{1,852}}{D_2^{4,87}} \quad (2.55)$$

En additionnant membre par membre les équations (2.50) et (2.52) on obtient d'une manière similaire :

$$Z_1 - Z_3 = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_3 \left(\frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.56)$$

Le système d'équations (2.53) ou (2.54) avec (2.55) et (2.56) peut être résolu par une méthode de substitution pour trouver les valeurs de Q_1 , Q_2 et Q_3 .

Revenons à la détermination du sens de l'écoulement dans la conduite 2 pour choisir entre les équations (2.53) et (2.54). On pose dès le départ l'équation suivante :

$$H_1 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = Z_2 = 30\text{m} \quad (2.57)$$

Ceci signifie que l'énergie totale H_1 au point de jonction **I** égale exactement la cote dans le réservoir **B**. Dans ce cas le débit Q_2 est nul et le système d'équations devient :

$$Z_1 - Z_2 = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} \quad (2.58)$$

$$Z_1 - Z_3 = L_1 \left(\frac{3,59}{C_{HW_1}} \right)^{1,852} \frac{Q_1^{1,852}}{D_1^{4,87}} + L_3 \left(\frac{3,59}{C_{HW_3}} \right)^{1,852} \frac{Q_3^{1,852}}{D_3^{4,87}} \quad (2.59)$$

$$Q_1 = Q_3 \quad (2.60)$$

L'équation (2.58) nous permet de calculer Q_1 . Dans le cas présent :

$$Q_1 = 0,917\text{m}^3/\text{s}$$

L'équation (2.59) nous permet de calculer Q_3 . Dans le cas présent :

$$Q_3 = 0,506\text{m}^3/\text{s}$$

Si $Q_1 = Q_3$, autrement dit si l'équation (2.60) est vérifiée, l'hypothèse posée dans l'équation (2.57) est valable et le problème est résolu.

Si $Q_1 < Q_3$, ceci signifie que l'énergie H_1 est inférieure à la valeur supposée. Dans le cas présent, l'énergie H_1 est supérieure à $Z_2 = 30\text{m}$ et l'écoulement se fait bien de **I** vers **B**. Le système d'équations (2.53), (2.55) et (2.56) posé est donc approprié. Sa résolution permet d'obtenir les débits cherchés.

Une autre approche heuristique consiste à chercher l'énergie H_1 par essais-erreurs. On peut poser a priori $H_1 = 31\text{m}, 32\text{m}...$ et vérifier chaque fois si $Q_1 = Q_2 + Q_3$. Quand cette condition est satisfaite, la solution du problème est obtenue. On trouve ainsi $H_1 = 36,5\text{m}$. Les débits, les vitesses et les pertes de charge sont fournis au tableau 2.9

	Débit (m^3/s)	Vitesse (m/s)	h_f (m)
Conduite AI	0,8028	1,26	23,47
Conduite IB	0,1385	0,49	6,53
Conduite IC	0,6643	1,04	16,53

Tableau 2.9

RÉSUMÉ

- 1- Pour un fluide incompressible en écoulement permanent sans dissipation d'énergie, l'équation de Bernoulli s'écrit le long d'une trajectoire entre deux points 1 et 2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

- 2- L'équation de Bernoulli généralisée qui prend en compte la dissipation d'énergie et la présence de pompes (H_p) et de turbines (H_T) s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f + \sum h_s + H_T$$

- 3- La perte de charge h_f se calcule par la formule de Darcy-Weissbach ou la formule de Hazen-Williams :

$$h_f = 0,0827 f L \frac{Q^2}{D^5} \quad h_f = 10,675 L \left(\frac{Q}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{1}{D^{4,87}}$$

- 4- Le coefficient de frottement f peut se calculer numériquement par

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \dots\dots \text{en régime turbulent}$$

$$f = 64/\text{Re} \dots\dots\dots \text{en régime laminaire}$$

ou être obtenu graphiquement par le diagramme de Moody.

- 5- La perte charge singulière h_s se calcule par la relation $h_s = K V^2/2g$ où la valeur de K dépend du type de singularité.
- 6- Le calcul des conduites en série se fait en appliquant la règle suivante : le débit qui passe par les conduites reste le même, les pertes de charge s'additionnent.
- 7- Lorsque des conduites sont placées en parallèle, la perte de charge est la même dans toutes les conduites. Le débit total est la somme des débits passant par chacune des conduites.

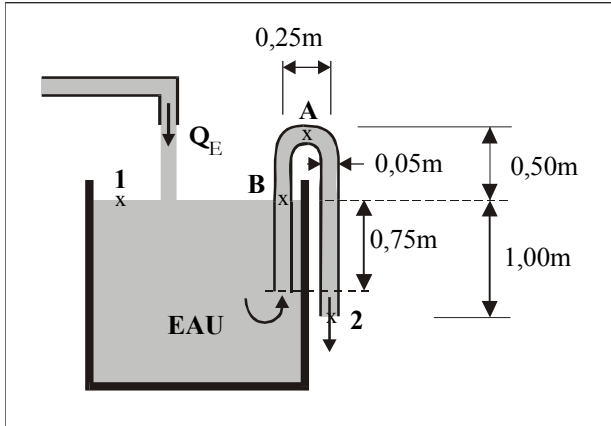
EXERCICES**Exercice 2.1**

Fig. 2.25

On draine l'eau d'un réservoir à l'aide d'un siphon. Le tube a un diamètre de 5cm. Les longueurs et les cotes du tube sont indiquées sur la figure 2.25.

Le coefficient de perte de charge singulière à l'entrée du siphon est de 0,50.

Dans chacun des deux coudes, le coefficient de perte de charge singulière est de 0,75.

Le coefficient de frottement f a été estimé à 0,020.

- Il faut calculer le débit d'entrée Q_E nécessaire pour maintenir le niveau du réservoir constant.
- Il faut calculer la pression au sommet A du siphon.
- Il faut calculer la pression dans le tube au point B situé à la même cote que l'eau du réservoir.
- Il faut calculer l'erreur qui serait commise en a), b) et c) si on faisait l'hypothèse que les pertes de charge sont négligeables. Cette hypothèse paraît-elle raisonnable?

Exercice 2.2

Une conduite d'aqueduc en fonte ductile ($\epsilon = 0,16\text{mm}$) de diamètre 205mm transporte un débit de 33 litres/seconde (eau à 5°C).

- Quelle est la perte de charge sur 1000m de conduite?
- Quel est le coefficient de Hazen-Williams pour cette conduite?

Exercice 2.3

Un réservoir d'accumulation d'eau (à 15°C) alimente un réseau de distribution à l'aide d'une conduite maîtresse ayant un diamètre de 600mm (figure 2.26).

Cette conduite neuve faite en fonte ($\epsilon = 0,12\text{mm}$) a une longueur $L = 2000\text{m}$.

La cote piézométrique mesurée au point B est de 18,0m. Le niveau du plan d'eau dans le réservoir est $H = 20,0\text{m}$. On considère un coefficient de perte de charge singulière $K = 0,5$ à l'entrée de la conduite.

- Il faut calculer le débit d'écoulement.

2) Il faut tracer la ligne piézométrique et la ligne d'énergie.

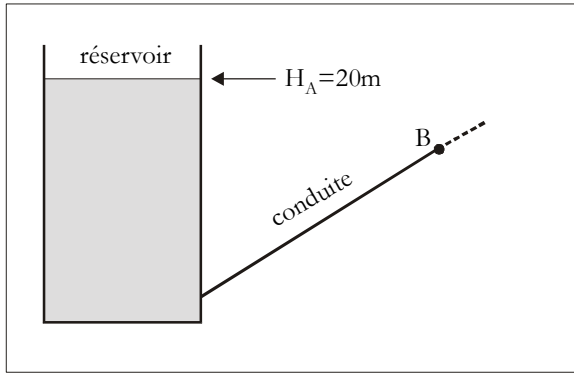
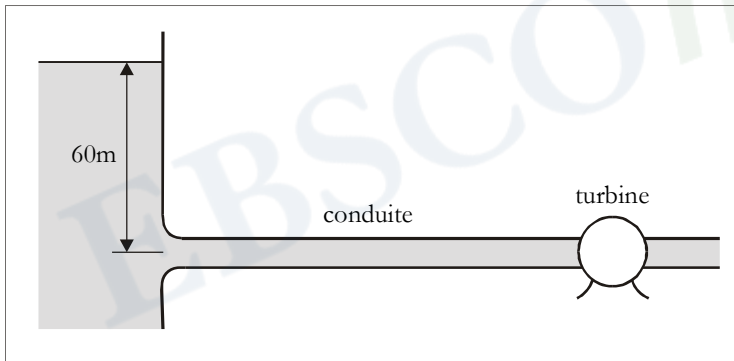


Fig. 2.26

Exercice 2.4



Le débit turbiné dans une centrale hydroélectrique est de $Q_T = 1,0\text{m}^3/\text{s}$ avec une hauteur de chute de 60,0m (figure 2.27). La conduite forcée faite en acier forgé ($\epsilon = 0,1\text{mm}$) a un diamètre de 300mm et une longueur de 50m. La température de l'eau est 20° C.

Fig. 2.27

En se basant sur un prix de 4 cents par kWh et un rendement global de 70%,

- 1) Il faut calculer les recettes annuelles de l'énergie vendue.
- 2) Il faut tracer la ligne piézométrique et la ligne d'énergie.

Exercice 2.5

On considère l'écoulement dans une conduite de diamètre variable schématisé par la figure 2.28. Il faut déterminer les diamètres des conduites AB, BC, CD et DE si l'on tolère une perte de charge de 3,0m par 1000m pour toutes les conduites. On néglige les pertes de charge singulières.

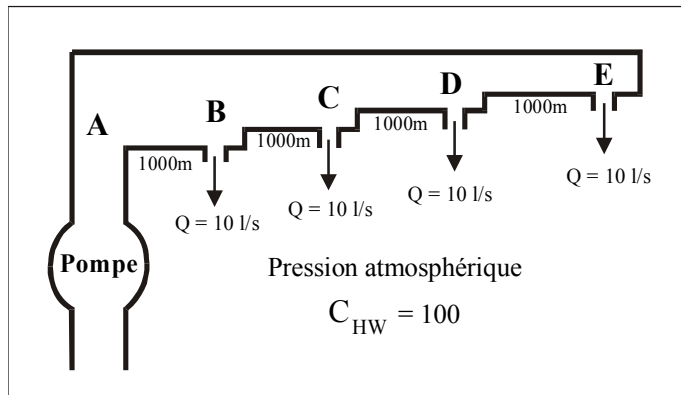


Fig. 2.28

Exercice 2.6

On considère l'écoulement de l'eau à 15°C dans le système schématisé par la figure 2.29. Le débit d'écoulement est $Q = 25$ litres/seconde. La conduite a un diamètre de 150mm et est faite en fonte ($C_{HW} = 130$). On suppose que la prise d'eau est bien profilée ($K = 0,04$). Les coefficients K pour les coudes sont égaux à 0,75.

Il faut calculer la puissance hydraulique fournie par la pompe.

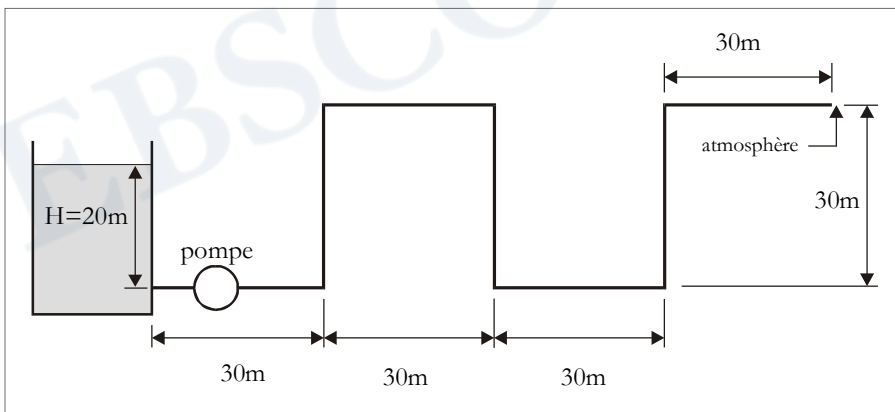


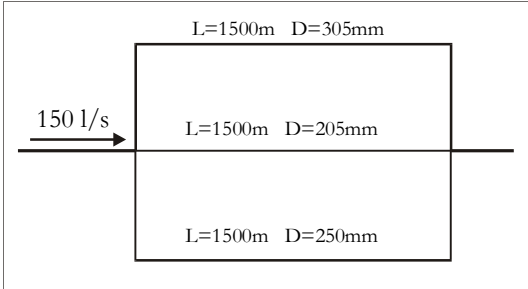
Fig. 2.29

Exercice 2.7

On pense remplacer deux tuyaux de 610mm placés en parallèle, par une seule conduite équivalente.

Il faut calculer le diamètre de cette conduite équivalente en supposant une longueur $L = 100\text{m}$ et $C_{HW} = 100$ pour toutes les conduites.

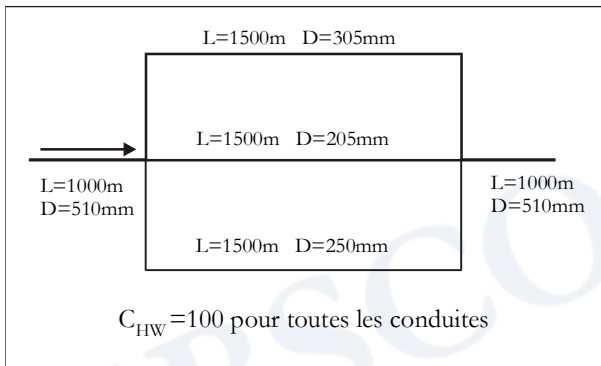
Exercice 2.8



Trois conduites de distribution d'eau sont placées en parallèle (figure 2.30). Il faut calculer le débit dans chacune des conduites. Le coefficient $C_{HW} = 100$ pour toutes les conduites.

Fig. 2.30

Exercice 2.9



Il faut calculer le diamètre de la conduite équivalente de cinq conduites dans le système schématisé par la figure 2.31.

La conduite équivalente doit avoir une longueur de 3500m et un coefficient C_{HW} de 100.

Fig. 2.31

Exercice 2.10

On considère le système de trois réservoirs schématisé par la figure 2.32

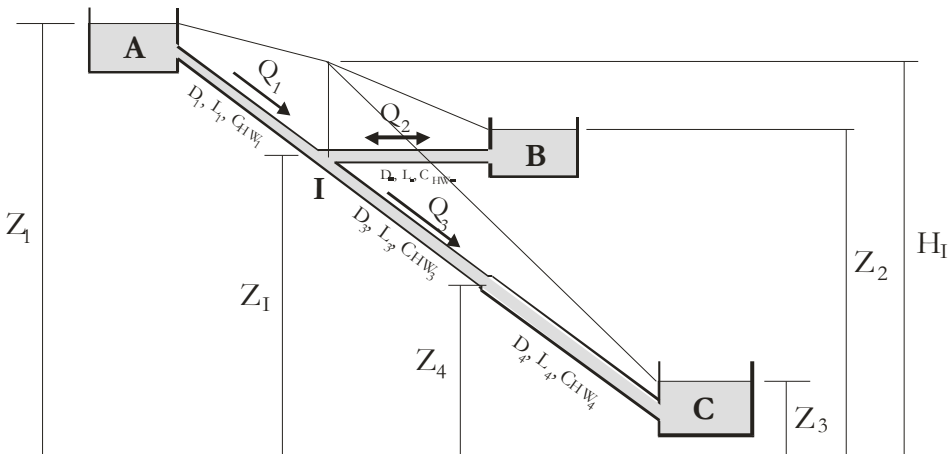


Fig. 2.32

Copyright © 2007. Presses de l'université du Québec. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

Les données sont :

$Z_1=60\text{m}$	$D_1=0,90\text{m}$	$L_1=10000\text{m}$	$C_{HW1}=100$
$Z_2=40\text{m}$	$D_2=0,60\text{m}$	$L_2=10000\text{m}$	$C_{HW2}=100$
$Z_3=20\text{m}$	$D_3=0,90\text{m}$	$L_3=5000\text{m}$	$C_{HW3}=100$
$Z_4=25\text{m}$	$D_4=1,00\text{m}$	$L_4=5000\text{m}$	$C_{HW4}=100$

Il faut trouver les débits dans toutes les conduites.

Exercice 2.11

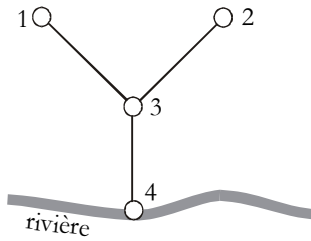


Fig. 2.33

Soit le système de drainage pluvial schématisé par la figure 2.33

L'exutoire du réseau (nœud 4) est situé dans un cours d'eau où le niveau en temps d'orage atteint 27,0m. Par ailleurs, le tableau ci-joint fournit les débits de pointe en temps d'orage, les diamètres, les longueurs et toutes les cotes pertinentes.

Le coefficient de Hazen-Williams est $C_{HW} = 100$ pour toutes les conduites.

conduite	Débit m^3/s	Diamètre (m)	Cote au sol (m)		Cote du radier (m)		Longueur (m)
			amont	aval	amont	aval	
1 - 3	6,0	1,37	30,5	29,0	26,15	26,00	100,0
2 - 3	4,0	0,915	30,5	29,0	25,90	25,50	100,0
3 - 4	15,0	2,44	29,0	28,5	25,50	24,25	500,0

Il faut tracer la ligne piézométrique selon les chemins 1-3-4 et 2-3-4. Il faut indiquer les endroits de mise en charge et les endroits d'inondation.

Exercice 2.12

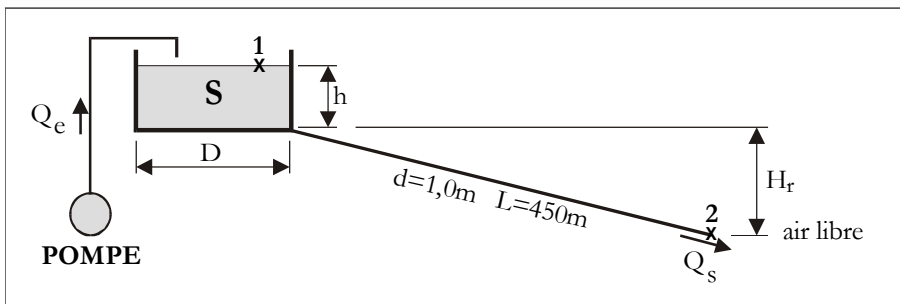


Fig. 2.34

Le but de cet exercice est de déterminer les temps de vidange et de remplissage d'un réservoir en prenant en considération les pertes de charge (figure 2.34).

Copyright © 2007. Presses de l'université du Québec. All rights reserved. May not be reproduced in any form without permission from the publisher, except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

Le réservoir est de section circulaire de diamètre $D = 100,0\text{m}$. La profondeur initiale de l'eau dans le réservoir est $h_0 = 7,0\text{m}$.

La conduite de vidange possède un diamètre $d = 1,0\text{m}$ et une longueur totale $L_t = 500,0\text{m}$ (incluant la longueur équivalente).

La dénivelée entre le radier du réservoir et la sortie de la conduite est $H_r = 9,0\text{m}$.

On suppose que le coefficient de frottement f de l'équation de Darcy est constant et égal à une valeur moyenne $f = 0,02$.

- 1) Écrire l'équation de continuité instantanée qui relie le volume du réservoir S aux débits d'entrée Q_e et de sortie Q_s .
- 2) Trouver l'expression littérale de la vitesse de sortie V_s au point 2 en fonction des variables h , H_r , f , L_t , d et g .
- 3) Exprimer le débit de vidange Q_s en fonction des variables h , H_r , f , L_t , d et g .
- 4) Réécrire l'équation de continuité trouvée en 1) avec $Q_e = 0$ et en remplaçant Q_s par sa valeur trouvée en 3).
- 5) Faire un changement de variable $H = h + H_r$ dans l'équation trouvée en 4) et trouver l'équation différentielle avec la nouvelle fonction H . On remarquera dans ce cas que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dH}{dt}$$
- 6) Intégrer l'équation trouvée en 5) pour trouver l'expression littérale du temps de vidange T_v en fonction de L_t , d , D , h_0 , H_r , f et g .
- 7) Trouver la valeur numérique de ce temps de vidange T_v en utilisant les données numériques de l'exercice.
- 8) Sans reprendre toutes les étapes de calcul, calculer le temps de vidange T_v à partir de l'expression trouvée en 6) en négligeant cette fois les pertes de charge.
- 9) En supposant un débit de remplissage Q_e et d'alimentation des consommateurs Q_s constants, calculer le temps de remplissage T_r en fonction de D , Q_e , Q_s et Δh , où Δh est la variation du niveau dans le réservoir.
- 10) Calculer le temps de remplissage T_r si $Q_e = 5,0\text{m}^3/\text{s}$, $Q_s = 1,0\text{m}^3/\text{s}$ et $\Delta h = 7,0\text{m}$.

OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 2

Brière, F. (1997), *Distribution et collecte des eaux*, Montréal, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal.

Carlier, M. (1972), *Hydraulique générale et appliquée*, Paris, Eyrolles.

Lencastre, A. (1999), *Hydraulique générale*, 2^e éd., Paris, Eyrolles.

EBSCOhost®

SYMBOLES DU CHAPITRE 2

A	: section d'écoulement, surface
C_{HW}	: coefficient de Hazen-Williams
D	: diamètre
f	: coefficient de frottement
F	: force
g	: accélération due à la gravité
h_f	: perte de charge par frottement
h_s	: perte de charge singulière
H	: hauteur de charge
H_P	: charge produite par une pompe
H_T	: charge consommée par une turbine
K	: constante de perte de charge, coefficient de débitance
L	: longueur
m	: constante de perte de charge
n	: constante de perte de charge, coordonnée curviligne
P	: pression
P_p	: puissance d'une pompe
P_T	: puissance absorbée par une turbine
Q	: débit
r	: rayon de courbure
Re	: nombre de Reynolds
S	: volume
t	: temps
v	: vitesse d'écoulement
V	: vitesse moyenne d'écoulement
x	: direction d'écoulement, abscisse
y	: direction, ordonnée
Z	: cote
α	: coefficient de correction, angle
ε	: hauteur moyenne des aspérités
η	: viscosité dynamique
ν	: viscosité cinématique
ρ	: masse volumique du liquide
τ	: contrainte de cisaillement