Chapitre 1

Équations de conservation de la masse

Objectifs

1- Connaître les différentes formes différentielles et intégrales de l'équation de continuité.

2- Savoir faire un bilan de masse au niveau d'un volume de contrôle fixe et déformable.

3- Connaître les formes usuelles de l'équation de continuité pour une conduite de diamètre constant et variable.

4- Savoir formuler l'équation de continuité pour un écoulement à surface libre et dégager les différents cas particuliers.

5- Appliquer l'équation de continuité aux écoulements souterrains et dériver l'équation de Laplace.

6- Savoir traiter les différents problèmes relatifs à la vidange et au remplissage des réservoirs.

Pour résoudre la plupart des problèmes qui se posent en ingénierie, on utilise un principe universel et unique de conservation. L'équation qui traduit ce principe de conservation peut prendre des formes différentes selon les contextes. La mécanique des fluides qui constitue la fondation de l'hydraulique utilise les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de son moment ainsi que de l'énergie.

Les chapitres 1 et 2 traitent respectivement des principes de conservation de la masse et de l'énergie qui sont les plus utilisés en hydraulique. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est introduite, selon le besoin, dans les chapitres subséquents.

1.1 Définitions

La *masse* m contenue dans un volume S se calcule par la relation

$$m = \int_S \rho \, dS \tag{1.1}$$

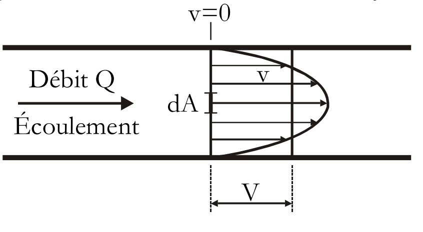
où ρ est la *masse volumique* qui s'exprime en kg/m^3, la masse étant en kg et le volume en m^3. Lorsque le corps est homogène, cette relation devient

$$m = \rho S \tag{1.2}$$

Le *débit volumique* qui traverse une section d'écoulement A se calcule par la relation (figure 1.1)

$$Q = \int_A v \, dA = VA \tag{1.3}$$

Fig. 1.1 Profil des vitesses et vitesse moyenne



où

v est la vitesse d'écoulement qui varie selon la position; elle est nulle au point qui est en contact avec une paroi fixe, et maximale au point le plus éloigné des parois,

V est la vitesse moyenne d'écoulement (m/s),
A est la section d'écoulement (m^2), normale au courant.

En système international, le débit doit être exprimé en m^3/s, mais pour des raisons pratiques, on peut aussi l'exprimer en litres par seconde (l/s), litres par minute (l/min), etc., selon son ordre de grandeur.

Le ***débit massique*** qui traverse une section d'écoulement A, se calcule par la relation

$$\dot{m} = \int_A \rho \, v \, dA \tag{1.4}$$

Lorsque le fluide est homogène et incompressible, cette relation devient $\dot{m} = \rho Q$ où Q est le débit volumique. En système international, le débit massique est exprimé en kg/s.

Application 1.1

L'eau de masse volumique $\rho = 1000 kg/m^3$ à 4°C s'écoule avec une vitesse moyenne V=1,0m/s dans une conduite de diamètre D=0,6m.
Il faut calculer les débits volumique et massique.

Réponses :
Le débit volumique Q se calcule par la relation (1.3) :
$Q = AV = V(\pi D^2/4) = [\pi(0{,}6m)^2/4] \cdot 1{,}0 m/s = 0{,}2826 m^3/s$

Le débit massique $\dot{m}$ se calcule par la relation (1.4) :
$\dot{m} = \rho Q = 1000 kg/m^3 \cdot 0{,}2826 m^3/s = 282{,}6 kg/s$

1.2 L'équation de continuité : Forme intégrale

1.2.1 Formulation générale

L'équation de continuité traduit le principe selon lequel la matière ne peut ni disparaître ni être créée. Cette équation exprime en termes comptables que dans un temps dt, la quantité de matière qui entre dans un volume de contrôle est égale à celle qui en sort plus celle qui s'y accumule (figure 1.2) :

$$\dot{m}_E = \dot{m}_S + \frac{\partial m}{\partial t} \tag{1.5}$$

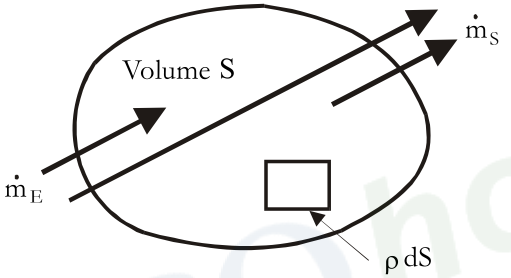


Fig. 1.2 Schématisation d'un volume de contrôle

1.2.2 L'équation de continuité pour un fluide incompressible

En hydraulique, on traite principalement du transport et du stockage de l'eau. Pour l'eau, les variations de pression et de température en jeu ne font pratiquement pas modifier la masse volumique qui peut être considérée comme constante (fluide incompressible). Dans ce contexte, l'équation (1.5) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S \tag{1.6}$$

où Q_E et Q_S sont les débits volumiques entrant et sortant.

L'équation de continuité exprime donc que pour un fluide incompressible, le taux de variation du volume est égal à la différence entre les débits volumiques entrant Q_E et sortant Q_S.

Application 1.2

Une rivière apporte un débit $Q_E = 100m^3/s$ à un barrage hydroélectrique. Le débit turbiné est $Q_S = 200m^3/s$. 1) Quel est le taux de variation de stockage dans le réservoir dans ces conditions? 2) Si le stockage au jour j est $S_j = 100hm^3$, quel est le stockage S_{j+1} au jour j+1 ?

Réponses :

$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S = 100m^3/s - 200m^3/s = -100m^3/s$. Le réservoir se vide à un taux de $100m^3/s$.

$S_{j+1} = S_j - [100m^3/s \cdot (24h/j \cdot 3600s/h)]/(10^6 m^3/hm^3) = 91{,}36hm^3$.

1.2.3 Cas particuliers courants pour les conduites sous pression

1.2.3.1 Conduite pleine avec diamètre constant

Quand la conduite est pleine, le volume d'eau S contenu dans le tronçon de conduite de diamètre D ne varie pas dans le temps (figure 1.3), si bien que $\frac{\partial}{\partial t}(S) = 0$ et l'équation (1.6) s'écrit :

$$0 = Q_E - Q_S \tag{1.7}$$

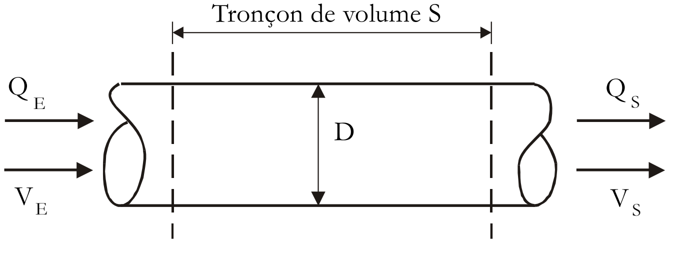


Fig. 1.3 Conduite pleine avec diamètre constant

En écrivant que $Q_E = A_E V_E$ et $Q_S = A_S V_S$, compte tenu du fait que $A_E = A_S$, l'équation (1.7) devient :

$$V_E = V_S \qquad (1.8)$$

L'équation 1.8 paraît à première vue triviale mais plusieurs situations qui peuvent se présenter pourront prêter à confusion. Considérons par exemple le cas où une pompe puise l'eau d'un lac pour la refouler dans une conduite qui passe par-dessus une colline (fig. 1.4). La vitesse au point 2 situé à la sortie, est-elle différente de la vitesse au point 1 au sommet de la colline (on suppose que la conduite est pleine) ?

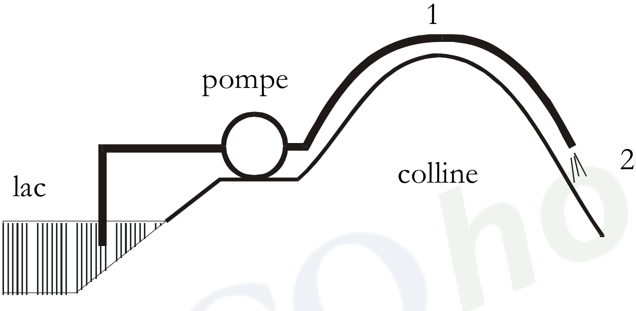
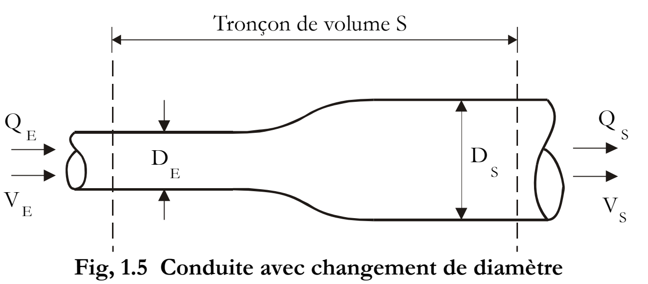


Fig. 1.4 Exemple de conduite à diamètre constant

1.2.3.2 Conduite pleine avec changement de diamètre

Pour la conduite à diamètre variable coulant pleine schématisée à la figure 1.5, le volume d'eau S contenu dans le tronçon ne varie pas dans le temps, $\partial S / \partial t = 0$, si bien que l'équation 1.6 s'écrit encore :

$$0 = Q_E - Q_S = A_E V_E - A_S V_S \qquad (1.9)$$



Fig, 1.5 Conduite avec changement de diamètre

Mais cette fois-ci A_E diffère de A_S. Pour les conduites circulaires qui sont les plus courantes, l'équation 1.9 prend la forme utile suivante :

$$\frac{V_S}{V_E} = \left(\frac{D_E}{D_S}\right)^2 \tag{1.10}$$

Application 1.3

Dans un système de distribution d'eau potable (fig. 1.6), la vitesse maximale ne doit pas excéder 3,0m/s. Si cette condition est respectée dans la première conduite de diamètre D_1 = 0,6m, le sera-t-elle dans la seconde conduite de diamètre D_2 = 0,3m?

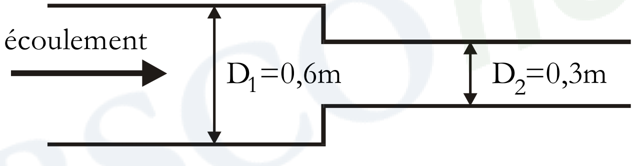


Fig. 1.6 Rétrécissement de diamètre

$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$ donc $V_2 = 4V_1$. Si la vitesse V_1 = 3,0m/s, la vitesse V_2 = 12m/s. Cette valeur est supérieure à la limite permise.

1.2.3.3 Application de l'équation de continuité aux réservoirs

La figure 1.7 présente le schéma d'un réservoir dont la section A peut être constante ou variable avec la hauteur h.

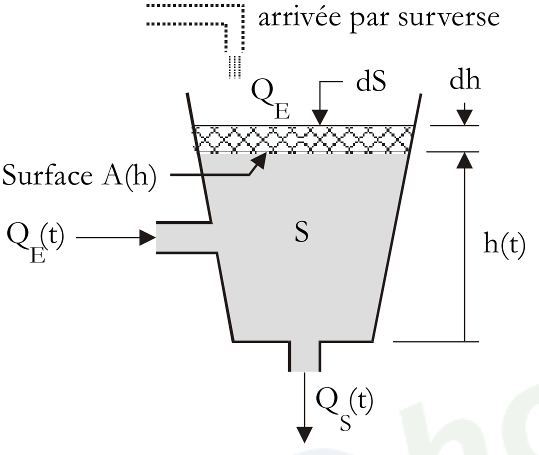


Fig. 1.7 Écoulements dans un réservoir.

Le débit d'entrée $Q_E(t)$ peut provenir aussi bien d'une station de pompage que d'une source surélevée par rapport au niveau d'eau dans le réservoir. Dans les deux cas, le débit d'entrée $Q_E(t)$ varie quand la profondeur h(t) varie. On peut éliminer cette variation en arrangeant une arrivée au réservoir par surverse, tel que montré sur la figure 1.7. Le débit de sortie $Q_S(t)$ varie en fonction de la profondeur h(t). Le volume stocké dans le réservoir S(t) dépend lui aussi directement de la hauteur h(t).

Comme dS = A(h)dh, l'équation de continuité s'écrit : $A(h)\frac{dh}{dt} = Q_E(t) - Q_S(t)$.

Cette équation peut être intégrée pour résoudre tout problème relié à une des variables qui y apparaît.

Application 1.4

Une conduite circulaire, de diamètre D_2 = 0,6m, draine l'eau d'un réservoir de forme circulaire, de diamètre D_1= 6,0m (fig. 1.8).

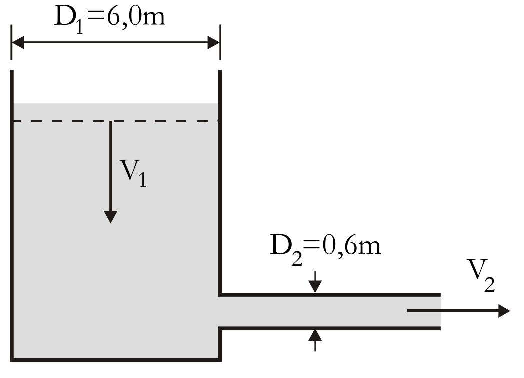


Fig. 1.8 Écoulement d'un réservoir vers une conduite

Comparer la vitesse V_2 de l'eau dans la conduite avec la vitesse V_1 de descente de l'eau dans le réservoir.
Réponse :
L'équation (1.10), appliquée entre la section d'entrée où la vitesse est V_1 et une section quelconque de la conduite où la vitesse est V_2 , donne :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = 0,01$$

La vitesse de descente de l'eau dans le réservoir est cent fois plus faible que la vitesse de l'eau dans la conduite. C'est pour cette raison que la vitesse d'écoulement sera considérée, à toute fin pratique, nulle dans les grands réservoirs. Cette hypothèse se trouve encore appuyée par le fait que la vitesse intervient par son carré dans l'équation d'énergie. Ainsi, la dernière relation trouvée s'écrit :

$$\frac{V_1^2}{2g} = 0,0001\frac{V_2^2}{2g}$$

Comme la vitesse V_2 dans la conduite doit idéalement être de l'ordre de 1m/s et ne doit pas excéder 3m/s pour limiter les surpressions lors d'un changement brusque du débit, le terme d'énergie cinétique $V_1^2/2g$ est de l'ordre de 0,005mm.

Application 1.5

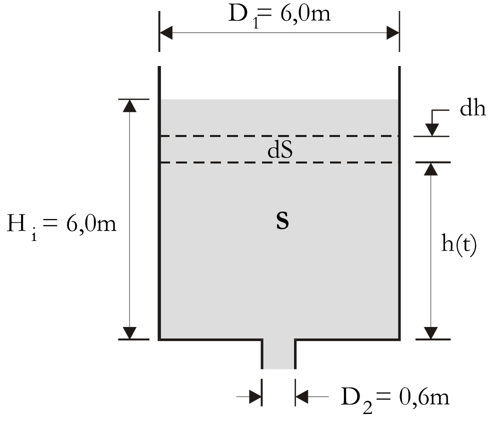


Fig. 1.9 Vidange de réservoir

On considère un réservoir circulaire de diamètre D_1 = 6,0m muni à son fond d'un orifice de vidange circulaire de diamètre D_2 = 0,6m (fig. 1.9). Initialement, ce réservoir est rempli jusqu'à une hauteur initiale H_i = 6,0m. Quel est le temps de vidange nécessaire pour réduire la hauteur de moitié et l'amener à une hauteur finale H_f = 3,0m?

L'équation de continuité s'écrit : $\frac{dS}{dt} = Q_E - Q_S$. Dans cette équation :

$dS = A_1 dh = \frac{\pi D_1^2}{4} dh$, $Q_E = 0$, $Q_S = V_2 A_2 = \pi \frac{D_2^2}{4} \sqrt{2gh}$.

Compte tenu de ces relations, l'équation de continuité devient : $D_1^2 \frac{dh}{dt} = -D_2^2 \sqrt{2gh}$. Pour intégrer cette équation on procède par séparation des variables : $\int_{H_i}^{H_f} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \sqrt{2g} \int_0^{t_{vidange}} dt$. Donc,

$$t_{vidange} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H_i} - \sqrt{H_f}\right)$$

Numériquement : $t_{vidange} = \left(\frac{6}{0,6}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{9,81}} \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right) = 32,4s.$

Normalement le temps de vidange est plus long car la section d'écoulement à la sortie de l'orifice est contractée et elle est plus faible que A_2. Compte tenu des pertes de charge, la vitesse d'écoulement est plus faible que V_2. Cet aspect est traité dans le chapitre 6.

1.3 Autres formes courantes de l'équation de continuité

L'équation de continuité peut prendre des formes différentes selon le type de situation d'écoulement auquel elle est appliquée. Avant d'examiner ces formes, il est utile de définir certains concepts.

1.3.1 Définitions

Écoulements permanent et non permanent

Un écoulement est dit *permanent* si aucune variable pertinente de l'écoulement ne dépend du temps. Autrement, il est *non permanent*.

Dimensionnalité de l'écoulement

La dimensionnalité d'un écoulement est le nombre de coordonnées spatiales indépendantes nécessaires pour décrire les variables de l'écoulement. Ainsi, l'écoulement peut être *unidimensionnel*, *bidimensionnel* ou *tridimensionnel* selon que la vitesse dépend de (x), de (x et y) ou de (x, y et z).

Directionnalité de l'écoulement

La directionnalité est le nombre de composantes requises pour exprimer le vecteur vitesse dans le système d'axes choisi.

Ainsi, l'écoulement peut être *unidirectionnel*, *bidirectionnel* ou *tridirectionnel* selon que le vecteur vitesse possède une seule composante (v_x), deux composantes (v_x et v_y) ou trois composantes (v_x, v_y et v_z).

1.3.2 Volume de contrôle infinitésimal fixe

Considérons un volume de contrôle $dS = dx \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ et un écoulement unidirectionnel en $\vec{x}$, tel que montré sur la figure 1.10.

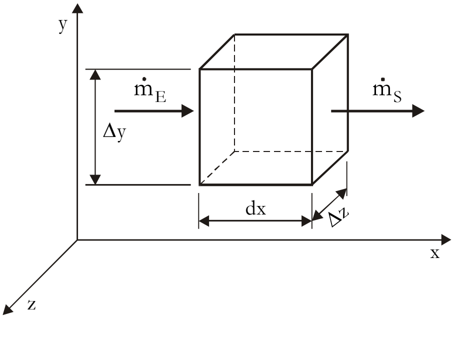


Fig. 1.10 Volume infinitésimal fixe

L'équation de continuité (1.5) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dS = \dot{m}_E - \dot{m}_S \tag{1.11}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dS = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\Delta y\,\Delta z\, dx \tag{1.12}$$

Comme il y a une seule composante de la vitesse V_x, le débit massique dans la section d'entrée est :

$$\dot{m}_E = \rho\, V_x\,\Delta y\,\Delta z \tag{1.13}$$

Le débit massique dans la section de sortie, située à une distance dx par rapport à l'entrée, s'écrit :

$$\dot{m}_S = \rho V_x\,\Delta y\,\Delta z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x \Delta y\,\Delta z\right) dx \tag{1.14}$$

En utilisant (1.12), (1.13) et (1.14) dans (1.11) on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x\right) = 0 \tag{1.15}$$

Cette équation représente la forme différentielle de l'équation de continuité pour un écoulement unidirectionnel.

Pour un écoulement unidirectionnel incompressible, la relation (1.15) devient :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{soit } V_x = f(y, z, t)$$

Cette relation est similaire à celle obtenue pour un volume de contrôle macroscopique traité au paragraphe 1.2.3.1.

On peut généraliser facilement l'équation (1.15), par un procédé similaire, pour un écoulement tridirectionnel sous la forme (Sabersky, 1999) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_z\right)=0 \tag{1.16}$$

où V_x, V_y et V_z sont respectivement les composantes de la vitesse dans les directions x, y et z.

Quand l'écoulement est incompressible, la masse volumique ρ est constante, si bien que l'équation (1.16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho V_z\right)=0 \tag{1.17}$$

Si, de plus, le fluide est homogène, l'équation (1.17) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(V_z\right)=0 \tag{1.18}$$

Cette forme de l'équation de continuité est fréquemment utilisée en hydraulique d'une manière générale et en hydraulique souterraine en particulier (Smith and Wheatcraft, 1993).

Application 1.6

Considérons un écoulement incompressible bidimensionnel et bidirectionnel décrit par le champ de vitesse $V_x(x, y)$ et $V_y(x, y)$.
On connaît $V_x(x, y) = xy$.
Il faut déterminer $V_y(x, y)$ en supposant $V_y(x, 0) = 0$.

Solution :
L'équation de continuité pour un écoulement incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0, \quad \text{soit :} \quad y+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$$

Par intégration : $$V_y\left(x,y\right)=-\frac{y^2}{2}+f\left(x\right)$$

Puisque $V_y(x, 0) = f(x) = 0$ pour tout x, donc $f(x) = 0$.
Si bien que $V_y(x, y) = -y^2/2$.

1.3.3 Application aux écoulements souterrains

L'équation (1.18) est impuissante à elle seule à définir le champ d'écoulement $V_x(x, y, z, t)$, $V_y(x, y, z, t)$, $V_z(x, y, z, t)$. Il existe cependant une catégorie d'écoulements où cette équation conduit à la détermination complète du champ d'écoulement. C'est le cas des écoulements pour lesquels on peut admettre que le vecteur-vitesse dérive d'une fonction potentielle $\phi(x, y, z, t)$. L'exemple typique est celui d'un écoulement souterrain dans un milieu isotrope où la loi de Darcy peut s'écrire à un point :

$$V_x = -K\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = -K\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad V_z = -K\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.19}$$

avec $\phi = -Kh + C$

où $h = Z + p/\rho g$ = charge hydraulique totale au point considéré,
Z est la position verticale du point considéré,
p est la pression statique au point considéré,
C est une constante d'intégration,
K est la conductivité hydraulique.

Le milieu est dit isotrope quand la conductivité hydraulique K est identique dans toutes les directions d'écoulement. Autrement, le milieu est dit anisotrope. Dans ce cas, la conductivité hydraulique K varie avec la direction, ayant trois valeurs principales (K_1, K_2 et K_3) qui, généralement, sont différentes des valeurs le long des coordonnées géométriques (K_x, K_y et K_z).

En remplaçant V_x, V_y et V_z dans (1.18), on obtient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.20}$$

Cette équation peut être résolue graphiquement ou par une méthode de différences finies (Fetter, 2001).

1.3.4 Application aux écoulements à surface libre

Considérons l'exemple d'une rivière en période de crue. À la suite de précipitations, le débit, la profondeur et la vitesse d'écoulement augmentent dans le temps (figure 1.11).

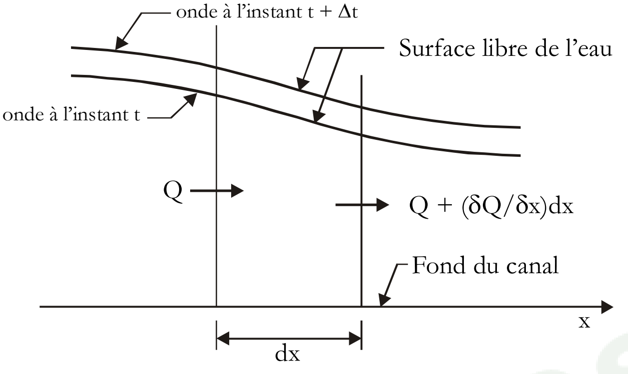


Fig. 1.11 Écoulement à surface libre

Comme l'écoulement est incompressible, l'équation (1.6) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(S) = Q_E - Q_S \tag{1.21}$$

Si l'écoulement peut être considéré unidirectionnel et unidimensionnel en x, on peut poser :

$$S = A(x, t)\,dx \tag{1.22}$$

$$Q_E = Q(x, t) \tag{1.23}$$

Dans ces conditions, le débit de sortie Q_S dans une section transversale située à une distance dx par rapport à la section d'entrée, se calcule par :

$$Q_S = Q + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx \tag{1.24}$$

En remplaçant (1.22), (1.23) et (1.24) dans (1.21) on obtient :

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (1.25)$$

Cette forme d'équation de continuité est utilisée en combinaison avec l'équation de la quantité de mouvement pour calculer les débits, les vitesses et les niveaux dans un écoulement à surface libre. Le système formé est appelé « équations de Barré de Saint-Venant ». Ce système doit être résolu par une méthode numérique de différences finies (Huber, 1998; Chow, 1988).

Application 1.7

Un réservoir possède une vanne de fond rectangulaire la largeur L et de hauteur h (figure 1.12).

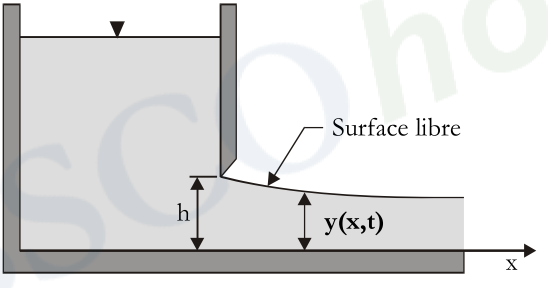


Fig. 1.12 Réservoir avec vanne de fond

En supposant l'écoulement unidirectionnel et quasi unidimensionnel, il faut développer l'équation de continuité pour un tel écoulement.

Solution :
En posant $A(x, t) = Ly(x, t)$ dans l'équation (1.25), cette dernière s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{1}{L}\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

1.3.4.1 Écoulement à surface libre permanent

Quand l'écoulement est permanent, $\partial A / \partial t = 0$ et l'équation de continuité (1.25) s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (1.26)$$

En se référant à la figure 1.13, l'équation (1.26) s'écrit :

$$Q = \text{constante} = Q_1 = Q_2 \qquad (1.27)$$

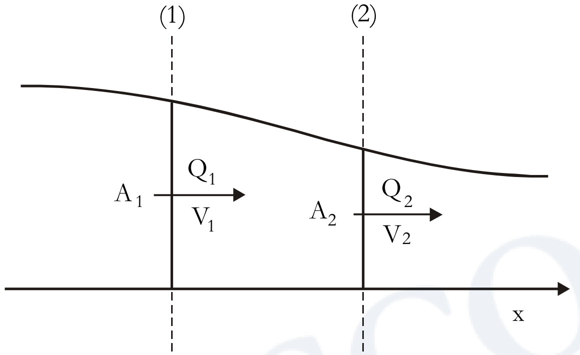


Fig. 1.13 Écoulement à surface libre permanent

ou encore :

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \qquad (1.28)$$

où
A_1 et A_2 sont les sections transversales de l'écoulement dans les deux sections,
V_1 et V_2 sont les vitesses moyennes d'écoulement dans les sections respectives.

1.3.4.2 Écoulement uniforme

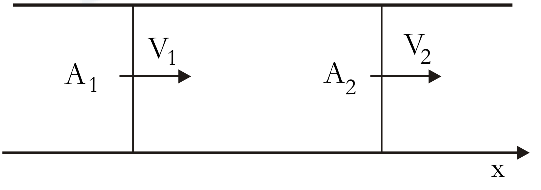


Fig. 1.14 Écoulement uniforme

Un écoulement à surface libre est dit uniforme si la profondeur ne varie pas dans la direction de l'écoulement (figure 1.14).

Dans ce cas, $A_1 = A_2$, si bien que l'équation (1.28) devient : $V_1 = V_2$.

RÉSUMÉ

- Le débit d'écoulement se calcule par la relation Q = AV

- L'équation de continuité prend la forme générale suivante pour un fluide incompressible tel que l'eau :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = Q_E - Q_S$$

- Dans une conduite de diamètre constant D, l'équation de continuité devient : V = constante dans toute la conduite.

- Lorsque le diamètre change dans la direction de l'écoulement pour passer de D_1 à D_2, la vitesse change selon le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

- Pour un écoulement souterrain dans un milieu isotrope, l'équation de continuité prend la forme de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

- Pour un écoulement à surface libre, l'équation de continuité prend la forme générale suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

- Quand l'écoulement à surface libre est permanent, l'équation de continuité prend la forme :

$$A_1V_1 = A_2V_2.$$

- Si l'écoulement à surface libre est uniforme, l'équation de continuité prend la forme :

$$V_1 = V_2.$$

EXERCICES

Exercice 1.1

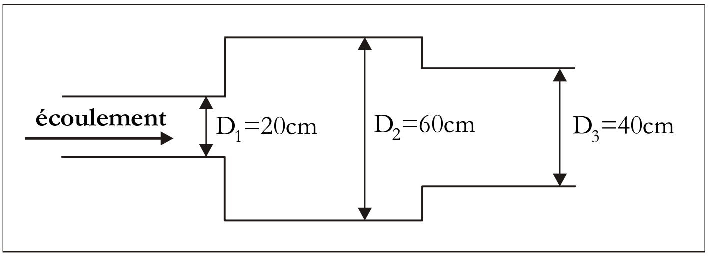


Fig. 1.15

On considère l'écoulement sous pression dans une conduite de section circulaire variable schématisée par la figure 1.15.
Si la vitesse d'écoulement dans le tronçon de diamètre D_2 = 60cm est 1,0m/s, quelles sont les vitesses dans les tronçons de diamètre D_1 = 20cm et D_3 = 40cm?

Exercice 1.2

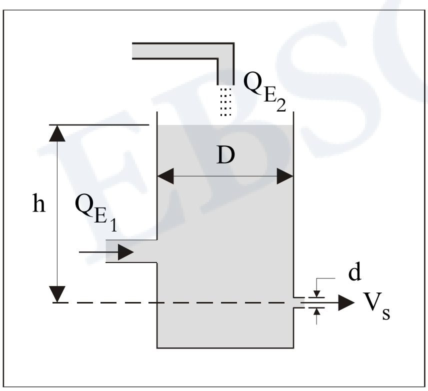


Fig. 1.16

On considère un réservoir cylindrique de diamètre D = 60cm.
Ce réservoir est alimenté par deux entrées Q_{E1} = 5*l*/s et Q_{E2} = 6*l*/s.
L'orifice circulaire de sortie possède un diamètre d = 5cm.
On néglige toutes les pertes de charge.

a) Il faut écrire l'équation de conservation de la masse pour ce réservoir.
b) En supposant que le réservoir est initialement vide, il faut déterminer la hauteur finale dans le réservoir.
c) Il faut déterminer la vitesse du mouvement du plan d'eau quand h = 1,5m.
d) En supposant les débits d'entrée nuls, quel est le temps nécessaire pour passer d'une hauteur h = 1,5m à une hauteur h = 0,5m en supposant les débits d'entrée nuls?

Exercice 1.3

La figure 1.17 ci-jointe montre deux réservoirs R_1 et R_2 , chacun ayant un orifice circulaire de diamètres respectifs D_1 et D_2.
Le réservoir R_2 est alimenté par la sortie du réservoir R_1.
L'eau sort du réservoir R_2 par l'orifice de sortie ainsi que sous forme de trop plein.

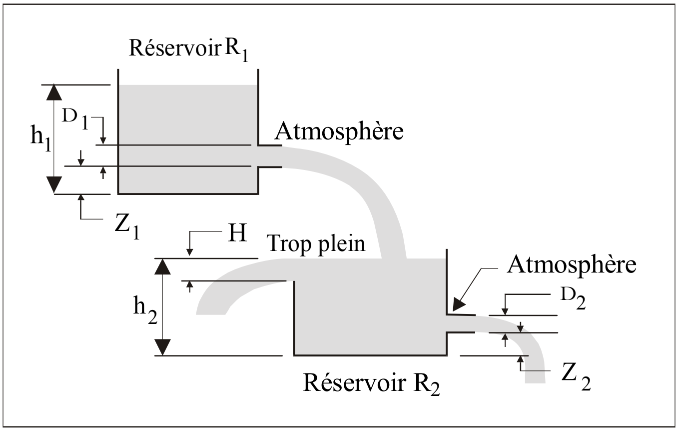


Fig. 1.17

Les données sont:

$h_1 = 5{,}0m$
$h_2 = 4{,}0m$
$D_1 = 30cm$
$D_2 = 20cm$
$Z_1 = 0{,}5m$
$Z_2 = 0{,}5m$

Il faut déterminer le débit du trop plein (réservoir R_2) en régime permanent..
On négligera les pertes de charge et la contraction de la section au niveau de l'orifice.

Exercice 1.4

Un réservoir alimenté par une rivière possède les caractéristiques suivantes :

- parois latérales verticales
- niveau maximum d'exploitation = 205m
- niveau minimal d'exploitation = 160m
- superficie = 50km²
- débit d'entrée (débit de la rivière) = 1000m³/s
- débits de sortie :
    1. débit turbiné (production hydroélectrique) = 543m³/s,
    2. débit utilisé pour le flottage de bois = 20m³/s,
    3. débit de consommation = 1,0 m³/s,
    4. débit d'irrigation = 2,0m³/s.

1- Il faut déterminer la variation journalière du niveau de ce réservoir.
2- Il faut déterminer le temps nécessaire pour le remplissage de ce réservoir, sachant que son niveau initial était le niveau minimal d'exploitation.

Exercice 1.5

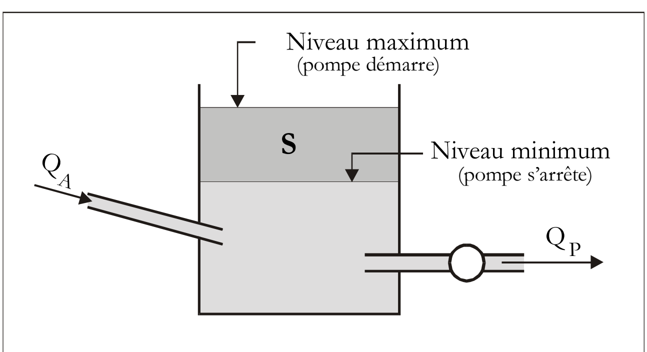


Fig. 1.18

Dans cet exercice, on se propose de calculer les dimensions d'un réservoir de service d'un immeuble de façon à limiter la fréquence maximale de démarrage du système de pompage à une valeur prédéterminée (figure 1.18).

Données :

durée entre deux démarrages $T = 15$ minutes
débit pompé $Q_P = 1$ litre par seconde.

On suppose que le réservoir était initialement (temps $t = 0$) plein.

a) Calculer le temps t_1 de vidange du réservoir en fonction de S, Q_P et Q_A.
b) Au temps t_1, le niveau est minimum et la pompe s'arrête. Il faut maintenant calculer le temps t_2 nécessaire pour remplir le volume S et atteindre le niveau maximum.
c) Calculer la durée totale d'un cycle de démarrage en utilisant les relations obtenues en a) et b).
d) Calculer la fréquence f de démarrage directement à partir de c).
e) Trouver le débit Q_A qui correspond à la fréquence maximum. Pour ce faire, on dérive f par rapport à Q_A et on écrit que cette dérivée est nulle (f maximum), ceci permettant d'obtenir la valeur de Q_A.
f) Remplacer la valeur de Q_A calculée en e) dans l'expression générale de f obtenue en d) et calculer la valeur de fréquence maximum.
g) À partir de la relation obtenue en f), déterminer le volume S nécessaire en fonction de la fréquence maximum de démarrage.

OUVRAGES DE RÉFÉRENCE DU CHAPITRE 1

Chow, V.T. (1988), *Open-Channel Hydraulics*, New York, McGraw-Hill.

Fetter, C.W. (2001), *Applied Hydrology*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice-Hall.

Huber, W.C. et Dickinson, R.E. (1988), *Storm Water Management Model Users' Manual*, Athens (GA), U.S. Environmental Protection Agency.

Sabersky, R.H., Acosta, A.J., Hauptmann, E.G. et Gates, E.M. (1999), *Fluid Flow*, 4e éd., Upper Saddle River (NJ), Prentice-Hall.

Smith, L. et Wheatcraft, S.W. (1993), «Groundwater Flow», dans D.R. Maidment (dir.), *Handbook of Hydrology*, New York, McGraw-Hill.McGraw-Hillinc.

SYMBOLES DU CHAPITRE 1

A	: section d'écoulement, surface
C	: constante
D	: diamètre
f	: fonction
h, H	: hauteur
K	: conductivité hydraulique
L	: largeur
m	: masse
Q	: débit
S	: volume
t	: temps
v	: vitesse d'écoulement
V	: vitesse moyenne d'écoulement
x	: abscisse, dimension, direction
y	: abscisse, dimension, direction
z	: abscisse, dimension, direction
∂	: dérivée partielle
D	: variation
ϕ	: fonction potentielle
ρ	: masse volumique