

# Chapitre 4

## Calcul des ossatures

### 4.1 Méthode des rotations - Ossatures rigides (à nœuds fixes)

La méthode des rotations suppose que les déformations dues aux efforts normaux et efforts tranchants sont négligeables devant les déformations dues aux moments fléchissants (voir cours RDM).

Un nœud est **fixe** ou **rigide** lorsque les éléments qui y aboutissent forment entre eux des angles constants avant et après déformation.

#### 4.1.1 Convention de signes des moments fléchissants

La convention de signes des moments fléchissants adoptée habituellement est :

Le moment est pris positif s'il tend à comprimer la fibre supérieure et à tendre la fibre inférieure de la poutre fléchie (voir figure 4.1).

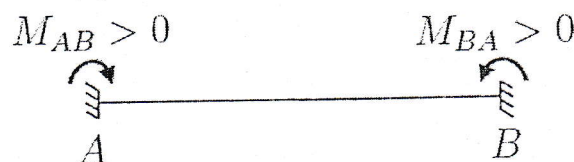


FIGURE 4.1 – Convention de signe des moments fléchissants

### 4.1.2 Convention de CROSS

Cette convention considère un couple appliqué sur un nœud, ou transmis par un nœud, comme positif s'il est dirigé dans le sens anti-trigonométrique (sens horaire) (voir figure 4.2).

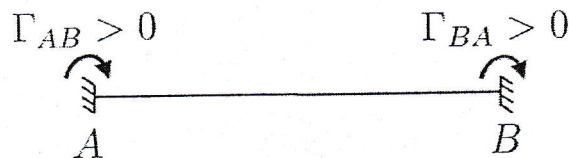


FIGURE 4.2 – Convention de signe de CROSS

On peut conclure donc les relations entre les couples et les moments fléchissants :

$$\begin{cases} \Gamma_{AB} = M_{AB} \\ \Gamma_{BA} = -M_{BA} \end{cases} \quad (4.1)$$

Notons que  $\Gamma_{AB}$  est le couple appliqué par le nœud  $A$  sur la poutre  $AB$  et le couple  $\Gamma_{BA}$  est appliqué par le nœud  $B$  sur la même poutre  $AB$ .

### 4.1.3 Relation entre couples transmis par les nœuds et les déformations

Considérons les équations (2.13) et (2.14) définissant les rotations d'une poutre chargée par deux moments à ses extrémités.

$$\begin{cases} \theta_A = -aM_{AB} - bM_{BA} \\ \theta_B = bM_{AB} + cM_{BA} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les coefficients de souplesse de la travée  $AB$ .

Si, en plus, la travée  $AB$  est sollicitée par un système de chargement extérieur et les appuis subissent une rotation et sont dénivelés, les rotations des nœuds  $A$  et  $B$  sont exprimées par :

$$\begin{cases} \theta_A = \theta'_A - aM_{AB} - bM_{BA} + \Omega \\ \theta_B = \theta'_B + bM_{AB} + cM_{BA} + \Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\theta'_A$  et  $\theta'_B$  sont les rotations dues au chargement extérieur appliqué et  $\Omega$  est la rotation due à la présence d'une dénivellation.

En prenant en compte les relations (4.1), on a :

$$\begin{cases} \theta_A = \theta'_A - a\Gamma_{AB} + b\Gamma_{BA} + \Omega \\ \theta_B = \theta'_B + b\Gamma_{AB} - c\Gamma_{BA} + \Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans le cas général d'une poutre bi-encastree avec des encastrements élastiques, le schéma mécanique correspondant peut être décomposé en deux schémas (voir figure 4.3) :

[ Encastrement parfait avec chargement extérieur appliqué ]  
+ [ Rotations d'extrémités  $\neq 0$  ]

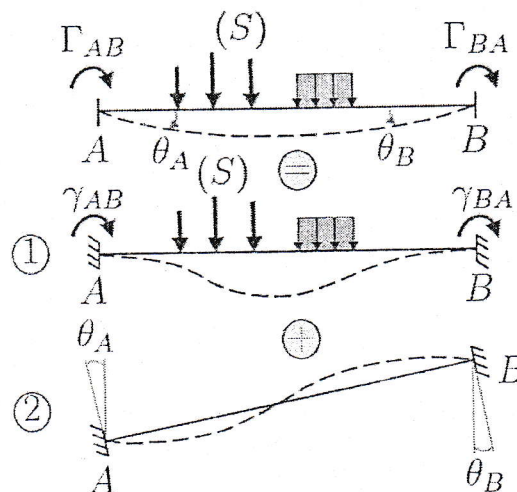


FIGURE 4.3 - Décomposition d'une poutre bi-encastree élastiquement

Considérons le système (1) de la figure (4.3) correspondant au cas de la poutre parfaitement encastree et chargée par le système extérieur (S). Les rotations des points A et B sont données par :

$$\begin{cases} \theta_{Aenc} = \theta'_A - a\gamma_{AB} + b\gamma_{BA} = 0 \\ \theta_{Benc} = \theta'_B + b\gamma_{AB} - c\gamma_{BA} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

avec  $\gamma_{AB}$  et  $\gamma_{BA}$  sont les couples de l'encastrement parfait. Les rotations  $\theta'_A$  et  $\theta'_B$  sont donc exprimées par :

$$\begin{cases} \theta'_A = a\gamma_{AB} - b\gamma_{BA} \\ \theta'_B = -b\gamma_{AB} + c\gamma_{BA} \end{cases} \quad (4.6)$$



reportons les valeurs de (4.6) dans le système (4.3) :

$$\begin{cases} \theta_A = -a(\Gamma_{AB} - \gamma_{AB}) + b(\Gamma_{BA} - \gamma_{BA}) + \Omega \\ \theta_B = b(\Gamma_{AB} - \gamma_{AB}) - c(\Gamma_{BA} - \gamma_{BA}) + \Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues  $\Gamma_{AB}$  et  $\Gamma_{BA}$ .  
Après résolution du système, on trouve :

$$\begin{cases} \Gamma_{AB} = \gamma_{AB} - \frac{c}{ac-b^2}\theta_A - \frac{b}{ac-b^2}\theta_B + \frac{b+c}{ac-b^2}\Omega \\ \Gamma_{BA} = \gamma_{BA} - \frac{b}{ac-b^2}\theta_A - \frac{a}{ac-b^2}\theta_B + \frac{b+a}{ac-b^2}\Omega \end{cases} \quad (4.8)$$

on pose :

$$K_{AB} = \frac{c}{ac-b^2} \quad \clubsuit \quad K_{BA} = \frac{a}{ac-b^2} \quad (4.9)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{b}{c} \quad \clubsuit \quad \lambda_{BA} = \frac{b}{a} \quad (4.10)$$

$K_{AB}$  est le **facteur de rigidité** de A vers B de la poutre et  $K_{BA}$  est le **facteur de rigidité** de B vers A.

$\lambda_{AB}$  est le **facteur de transmission** de A vers B de la poutre et  $\lambda_{BA}$  est le **facteur de transmission** de B vers A.

En remplaçant dans (4.8), on obtient :

$$\begin{cases} \Gamma_{AB} = \gamma_{AB} - K_{AB}\theta_A - \lambda_{AB}K_{AB}\theta_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega_{AB} \\ \Gamma_{BA} = \gamma_{BA} - \lambda_{BA}K_{BA}\theta_A - K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega_{BA} \end{cases} \quad (4.11)$$

Remarque : Pour une poutre de module  $EI = cte$ , on a :

$$a = 2b = c = \frac{l}{3EI} \quad (4.12)$$

ce qui donne :

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{4EI}{l} \quad (4.13)$$

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BA} = \frac{1}{2} \quad (4.14)$$



#### 4.1.4 Cas d'une poutre articulée à une extrémité

Considérons une poutre encastrée en  $A$  et simplement appuyée en  $B$  (voir figure 4.4). On a :

$$M_{BA} = \Gamma_{BA} = 0 \quad (4.15)$$

$$\gamma_{BA} = 0 \quad (4.16)$$

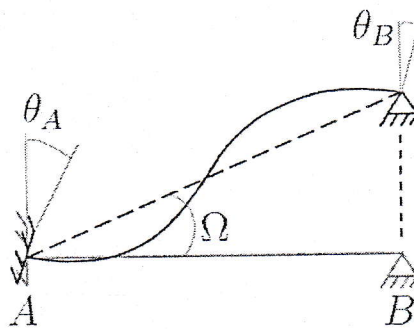


FIGURE 4.4 – Poutre articulée à une extrémité

La deuxième équation du système (4.11) devient alors :

$$-\frac{b}{a} \frac{a}{ac-b^2} \theta_A - \frac{a}{ac-b^2} \theta_B + \frac{a}{ac-b^2} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \Omega = 0 \quad (4.17)$$

$$\rightarrow \theta_B = -\frac{b}{a} \theta_A + \left(1 + \frac{b}{a}\right) \Omega \quad (4.18)$$

On reporte l'expression de  $\theta_B$  dans la première équation du système (4.11) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{AB} &= \gamma'_{AB} - \frac{c}{ac-b^2} \theta_A - \frac{b}{c} \frac{c}{ac-b^2} \left(-\frac{b}{a} \theta_A\right) - \frac{b}{c} \frac{c}{ac-b^2} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \Omega \\ &\quad + \frac{c}{ac-b^2} \left(1 + \frac{b}{c}\right) \Omega \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$= \gamma'_{AB} - \frac{ac-b^2}{a(ac-b^2)} \theta_A + \frac{-ba-b^2+ac+ab}{a(ac-b^2)} \Omega \quad (4.20)$$

$$= \gamma'_{AB} - \frac{1}{a} \theta_A + \frac{1}{a} \Omega \quad (4.21)$$

cette dernière expression peut être formulée par :

$$\boxed{\Gamma_{AB} = \gamma'_{AB} - K'_{AB} \theta_A + K'_{AB} \Omega_{AB}} \quad (4.22)$$

où :

$$K'_{AB} = \frac{1}{a} \quad (4.23)$$

*Remarque : Pour une poutre à section constante :*

$$K'_{AB} = \frac{3EI}{l} \quad (4.24)$$

#### 4.1.5 Déplacement d'appui

Si on ne considère que l'influence de la rotation  $\Omega$  due à la dénivellation d'appui sur une poutre bi-encastée (voir figure 4.5), on a :

$$\begin{cases} \Gamma_{AB} = K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega \\ \Gamma_{BA} = K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega \end{cases} \quad (4.25)$$

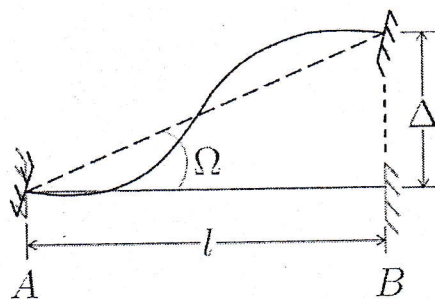


FIGURE 4.5 – Déplacement d'appui d'une poutre bi-encastée

la rotation due à la dénivellation  $\Omega$  est exprimée par :

$$\Omega = \frac{\Delta}{l} \quad (4.26)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Gamma_{AB} = K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\frac{\Delta}{l} \\ \Gamma_{BA} = K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\frac{\Delta}{l} \end{cases} \quad (4.27)$$

Pour une poutre à une extrémité articulée (voir figure 4.4), on trouve :

$$\Gamma_{AB} = K'_{AB}\frac{\Delta}{l} \quad (4.28)$$

*Remarque :* Pour une poutre bi-encastée à section constante ( $EI = \text{cte}$ ), les moments dus à une dénivellation d'appui sont donnés par :

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{BA} = \frac{6EI\Delta}{l^2} \quad (4.29)$$

Pour une poutre à une extrémité articulée et à section constante (voir figure 4.4) :

$$\Gamma_{AB} = \frac{3EI\Delta}{l^2} \quad (4.30)$$

## 4.2 Exercices

### •⇨ Exercice 1 :

Soit la poutre continue schématisée sur la figure (4.6).

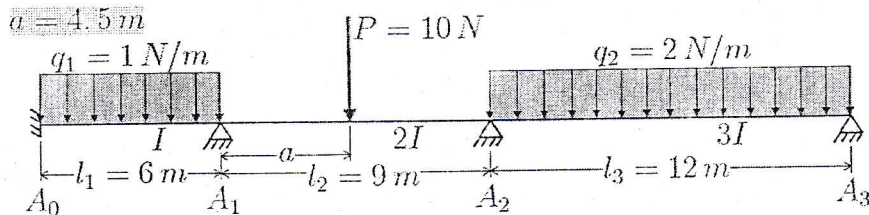


FIGURE 4.6 – Schéma de l'exercice 1

1. Déterminer les moments sur les appuis,
2. Calculer et tracer le diagramme de l'effort tranchant,
3. Calculer et tracer le diagramme du moment fléchissant,
4. Calculer les réactions d'appuis.

### ⇒ Solution 1 :



1. Les facteurs de rigidité des trois travées sont :

$$K_{01} = K_{10} = \frac{4EI}{6} = \frac{2}{3}EI \quad (4.31)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{4E \cdot 2I}{9} = \frac{8}{9}EI \quad (4.32)$$

$$K'_{23} = K'_{32} = \frac{3E \cdot 3I}{12} = \frac{3}{4}EI \quad (4.33)$$

les coefficients de transmission sont :

$$\lambda_{01} = \lambda_{10} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = \frac{1}{2} \quad (4.34)$$

À partir du formulaire des moments (voir annexe A.3), nous obtenons les moments d'encastrement :

$$\gamma_{01} = -\gamma_{10} = -\frac{q_1 l_1^2}{12} = -\frac{1.6^2}{12} = -3 \text{ N.m} \quad (4.35)$$

$$\gamma_{12} = -\gamma_{21} = -\frac{Pa^3}{l_2^2} = -\frac{Pl_2}{8} = -\frac{10.9}{8} = -11,25 \text{ N.m} \quad (4.36)$$

$$\gamma_{23} = -\gamma_{32} = -\frac{q_2 l_3^2}{8} = -\frac{2.12^2}{8} = -36 \text{ N.m} \quad (4.37)$$

L'équilibre du nœud  $A_1$  est exprimé par :

$$\Gamma_{10} + \Gamma_{12} = 0 \quad (4.38)$$

$$\rightarrow \gamma_{10} - K_{10}\theta_1 + \gamma_{12} - K_{12}\theta_1 - \lambda_{12}K_{12}\theta_2 = 0 \quad (4.39)$$

$$\rightarrow 3 - \frac{2}{3}EI\theta_1 - 11,25 - \frac{8}{9}EI\theta_1 - \frac{4}{9}EI\theta_2 = 0 \quad (4.40)$$

$$\rightarrow 1,556EI\theta_1 + 0,444EI\theta_2 = -8,25 \quad (4.41)$$

L'équilibre du nœud  $A_2$  est exprimé par :

$$\Gamma_{21} + \Gamma_{23} = 0 \quad (4.42)$$

$$\rightarrow \gamma_{21} - K_{21}\theta_2 - \lambda_{21}K_{21}\theta_1 + \gamma_{23} - K'_{23}\theta_2 = 0 \quad (4.43)$$

$$\rightarrow 11,25 - \frac{8}{9}EI\theta_2 - \frac{4}{9}EI\theta_1 - 36 - \frac{3}{4}EI\theta_2 = 0 \quad (4.44)$$

$$\rightarrow 0,444EI\theta_1 + 1,638EI\theta_2 = -24,75 \quad (4.45)$$

les deux équations (4.41) et (4.45) forment un système de deux équations à deux inconnues. Sa résolution nous donne :

$$\theta_1 = -\frac{1,077}{EI} \quad * \quad \theta_2 = -\frac{14,8}{EI} \quad (4.46)$$

Les couples appliqués par les nœuds et les moments fléchissants sont donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{01} &= M_{01} = \gamma_{01} - \lambda_{01}K_{01}\theta_1 = -3 - 0,333.(-1,077) \\ &= -2,64 \text{ N.m} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\Gamma_{10} = -M_{10} = \gamma_{10} - K_{10}\theta_1 = 3 - 0,667.(-1,077) = 3,72 \text{ N.m} \quad (4.48)$$

la raison de l'équilibre du nœud  $A_1$  nous donne :

$$\Gamma_{12} = -\Gamma_{10} = M_{12} = -3,72 \text{ N.m} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21} &= -M_{21} = \gamma_{21} - K_{21}\theta_2 - \lambda_{21}K_{21}\theta_1 \\ &= 11,25 - 0,889.(-14,8) - 0,444.(-1,077) \\ &= 24,88 \text{ N.m} \end{aligned} \quad (4.50)$$

la raison de l'équilibre du nœud  $A_2$  nous donne :

$$\Gamma_{23} = -\Gamma_{21} = M_{23} = -24,88 \text{ N.m} \quad (4.51)$$

récapitulatif :

$$\begin{cases} M_{01} &= -2,64 \text{ N.m} \\ M_{10} &= M_{12} = -3,72 \text{ N.m} \\ M_{21} &= M_{23} = -24,9 \text{ N.m} \end{cases} \quad (4.52)$$

sachant que :

$$M_{32} = 0 \text{ N.m} \quad (4.53)$$

2. Calcul du diagramme de l'effort tranchant :

- En considérant une position  $x$  sur la première travée, l'effort tranchant correspondant est exprimé par :

$$\begin{aligned} T_{01}(x) &= \frac{q_1 l_1}{2} - q_1 x + \frac{M_{10} - M_{01}}{l_1} = \frac{1 \times 6}{2} - 1.x + \frac{-3,72 + 2,64}{6} \\ &= 2,82 - x \end{aligned} \quad (4.54)$$

pour  $x = 0$ , on a :

$$T_{01}(0) = 2,82 \text{ N} \quad (4.55)$$

pour  $x = l_1$ , on a :

$$T_{01}(l_1) = 2,82 - 6 = -3,18 \text{ N} \quad (4.56)$$

– Pour la travée 2, on a :

si  $0 < x < a$  :

$$T_{12}(x) = \frac{P}{2} + \frac{M_{21} - M_{12}}{l_2} = 5 + \frac{-24,9 + 3,72}{9} = 2,64 \text{ N} \quad (4.57)$$

si  $a < x < l_2$  :

$$\begin{aligned} T_{12}(x) &= \frac{P}{2} - P + \frac{M_{21} - M_{12}}{l_2} = 5 - 10 + \frac{-24,9 + 3,72}{9} \\ &= -7,35 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.58)$$

– Pour la travée 3 :

$$\begin{aligned} T_{23}(x) &= \frac{q_2 l_3}{2} - q_2 x + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_3} = \frac{2 \times 12}{2} - 2x + \frac{0 + 24,9}{12} \\ &= 14,07 - 2x \end{aligned} \quad (4.59)$$

pour  $x = 0$ , on a :

$$T_{23}(0) = 14,07 \text{ N} \quad (4.60)$$

pour  $x = l_3$  :

$$T_{23}(l_3) = 14,07 - 2 \times 12 = -9,93 \text{ N} \quad (4.61)$$

Le diagramme des efforts tranchants est schématisé sur la figure (4.7).

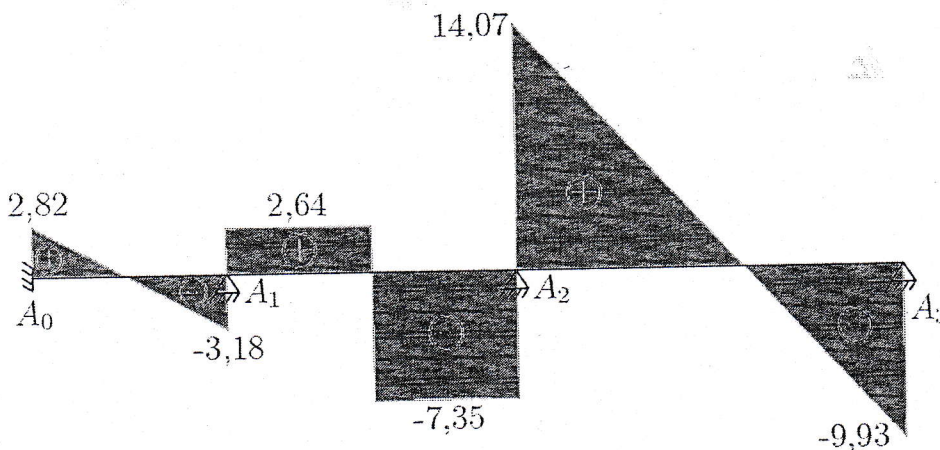


FIGURE 4.7 – Diagramme de l'effort tranchant - Exercice 1



3. Diagramme du moment fléchissant :  
les expressions du moment fléchissant peuvent être calculées en intégrant les expressions de l'effort tranchant.

– Travée 1 :

$$M_{01}(x) = 2,82x - \frac{1}{2}x^2 + M_{01} = 2,82x - \frac{1}{2}x^2 - 2,64 \quad (4.62)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2,82x - 2,64 \quad (4.63)$$

pour  $x = 0$ , on a :

$$M_{01}(0) = -2,64 \text{ N.m} \quad (4.64)$$

pour  $x = l_1$ , on a :

$$M_{01}(l_1) = -\frac{1}{2}6^2 + 2,82 \cdot 6 - 2,64 = -3,72 \text{ N} \quad (4.65)$$

calcul de l'optimum sur la travée 1 :

$$\frac{dM_{01}(x)}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad -x + 2,82 = 0 \quad (4.66)$$

$$\rightarrow \quad x = 2,82 \text{ m} \quad (4.67)$$

d'où :

$$M_{01\min} = -\frac{1}{2}(2,82)^2 + 2,82 \cdot 2,82 - 2,64 = 1,34 \text{ N.m} \quad (4.68)$$

– Pour la travée 2 :

si  $0 < x < a$  :

$$M_{12}(x) = 2,647x + M_{12} = 2,647x - 3,72 \quad (4.69)$$

si  $a < x < l_2$  :

$$\begin{aligned} M_{12}(x) &= -7,35x + (M_{12} + P \cdot a) = -7,35x - 3,72 + 10 \cdot 4,5 \\ &= -7,35x + 41,28 \end{aligned} \quad (4.70)$$

moment à  $x = a$  :

$$M_{12}(a) = 2,647 \cdot a - 3,72 = 2,647 \cdot 4,5 - 3,72 = 8,19 \text{ N.m} \quad (4.71)$$

moment à  $x = l_2$  :

$$M_{12}(l_2) = -7,35 \cdot l_2 + 41,28 = -7,35 \cdot 9 + 41,28 = -24,9 \text{ N.m} \quad (4.72)$$

– Pour la travée 3 :

$$M_{23}(x) = 14,07x - x^2 + M_{23} \quad (4.73)$$

$$= -x^2 + 14,07x - 24,9 \quad (4.74)$$

calcul de l'optimum :

$$\frac{dM_{23}(x)}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x + 14,07 = 0 \quad (4.75)$$

$$\rightarrow \quad x = 7,035 \text{ m} \quad (4.76)$$

d'où :

$$M_{23\min} = -(7,035)^2 + 14,07 \cdot 7,035 - 24,9 = 24,6 \text{ N.m} \quad (4.77)$$

Le diagramme du moment fléchissant est présenté sur la figure (4.8).

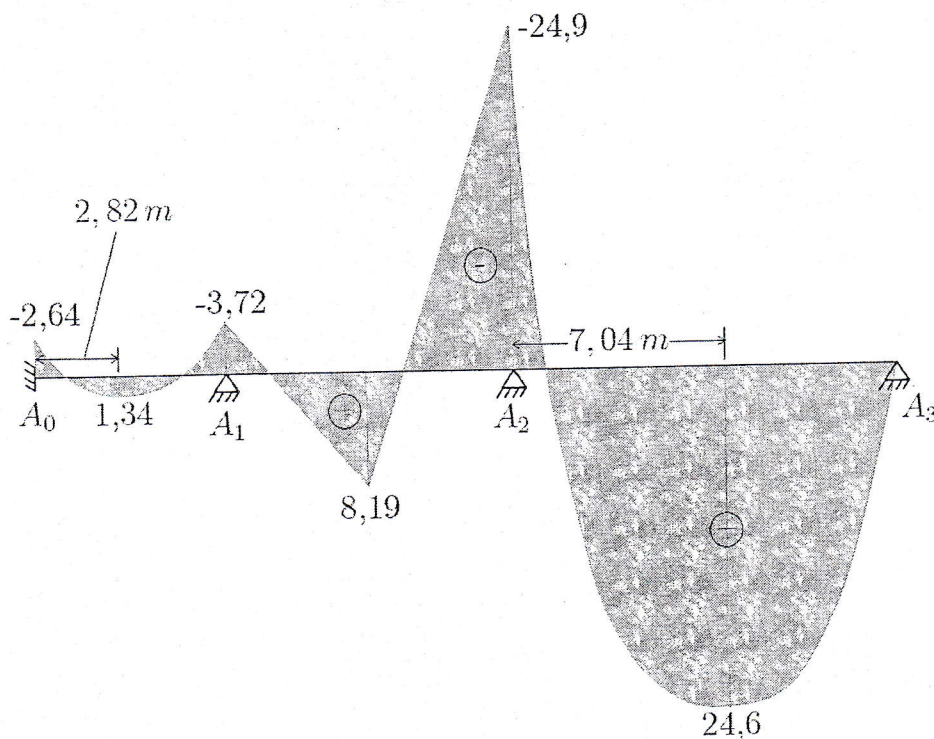


FIGURE 4.8 – Diagramme du moment fléchissant - Exercice 1

4. Calcul des réactions d'appuis :  
sur la travée 1, on a :

$$\sum M_{/A_1} = 0 \quad (4.78)$$

$$M_{10} = M_{01} - \frac{q_1 l_1^2}{2} + R_0 \cdot l_1 \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow R_0 &= \frac{1}{l_1} \left( M_{10} - M_{01} + \frac{q_1 l_1^2}{2} \right) = \frac{1}{6} \left( -3,72 + 2,64 + \frac{6^2}{2} \right) \\ &= 2,82 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.80)$$

travée 2 :

$$\begin{aligned} M_{21} &= M_{01} + R_0 \cdot (l_1 + l_2) - q_1 l_1 \left( \frac{l_1}{2} + l_2 \right) + R_1 \cdot l_2 - P \cdot a \\ &= -2,64 + 2,82 \cdot 15 - 6 \times 12 + 9R_1 - 10,4,5 \\ &= -77,34 + 9R_1 \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\rightarrow R_1 = \frac{1}{9} (M_{21} + 77,34) = \frac{1}{9} (-24,9 + 77,34) = 5,83 \text{ N} \quad (4.82)$$

travée 3 :

$$\begin{aligned} M_{32} &= M_{01} + R_0 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - q_1 l_1 \left( \frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) + R_1 \cdot (l_2 + l_3) \\ &\quad - P \cdot (a + l_3) + R_2 \cdot l_3 - q_2 l_3 \frac{l_3}{2} \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} &= -2,64 + 2,82 \cdot 27 - 6 \cdot 24 + 5,83 \cdot 21 - 10 \cdot 16,5 + R_2 \cdot 12 \\ &\quad - 24 \times 6 \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$= -119,31 + 12R_2 \quad (4.85)$$

sachant que  $M_{32} = 0$  :

$$R_2 = \frac{119,31}{12} = 9,94 \text{ N} \quad (4.86)$$

la somme des efforts verticaux est nulle :

$$2,82 - 6 + 5,83 - 10 + 9,94 - 24 + R_3 = 0 \quad (4.87)$$

$$\rightarrow R_3 = 21,41 \text{ N} \quad (4.88)$$

le moment de l'encastrement est :

$$M_0 = M_{01} = -2,64 \text{ N.m} \quad (4.89)$$



Récapitulatif des réactions :

$$\begin{cases} M_0 = -2,64 \text{ N.m} \\ R_0 = 2,82 \text{ N} \\ R_1 = 5,83 \text{ N} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} R_2 = 9,94 \text{ N} \\ R_3 = 21,41 \text{ N} \end{cases} \quad (4.90)$$

◆ Exercice 2 :

Considérons le portique de la figure (4.9).

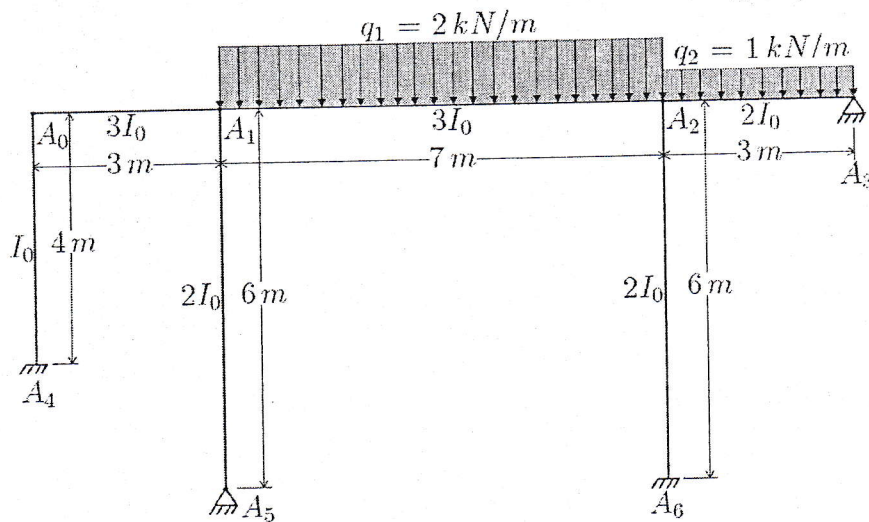


FIGURE 4.9 – Schéma de l'exercice 1

Déterminer le diagramme des moments fléchissants du portique ?

⇒ Solution 2 :

Calcul des facteurs de rigidité :

$$K_{01} = K_{10} = \frac{4E \cdot 3I_0}{3} = 4EI_0 \quad (4.91)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{4E \cdot 3I_0}{7} = \frac{12EI_0}{7} \quad (4.92)$$

$$K'_{23} = \frac{3E \cdot 2I_0}{3} = 2EI_0 \quad (4.93)$$

$$K_{04} = K_{40} = \frac{4E \cdot I_0}{4} = EI_0 \quad (4.94)$$

$$K'_{15} = \frac{3E \cdot 2I_0}{6} = EI_0 \quad (4.95)$$

$$K_{26} = K_{62} = \frac{4E \cdot 2I_0}{6} = \frac{4EI_0}{3} \quad (4.96)$$

Pour toutes les poutres ( $\forall i$  et  $j$ ), les facteurs de transmission sont :

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \quad (4.97)$$

Les moments d'encastrement parfaits sont (voir annexe A.3) :

$$\gamma_{12} = -\gamma_{21} = -\frac{q_1 \cdot l^2}{12} = -\frac{2 \times 49}{12} = -\frac{49}{6} = -8,167 \text{ kN.m} \quad (4.98)$$

$$\gamma'_{23} = -\frac{q_2 \cdot l^2}{8} = -\frac{1 \times 3^2}{8} = -\frac{9}{8} = -1,125 \text{ kN.m} \quad (4.99)$$

pour le reste des poutres, puisqu'elles ne sont pas chargées, on a :

$$\gamma_{ij} = \gamma'_{kl} = 0 \quad (4.100)$$

Equilibre du nœud  $A_0$  :

$$\Gamma_{04} + \Gamma_{01} = 0 \quad (4.101)$$

$$\rightarrow -K_{04}\theta_0 - K_{01}\theta_0 - \lambda_{01}K_{01}\theta_1 = 0 \quad (4.102)$$

$$\rightarrow -EI_0\theta_0 - 4EI_0\theta_0 - \frac{1}{2}4EI_0\theta_1 = 0 \quad (4.103)$$

$$\rightarrow 5\theta_0 + 2\theta_1 = 0 \quad (4.104)$$

Equilibre du nœud  $A_1$  :

$$\Gamma_{10} + \Gamma_{15} + \Gamma_{12} = 0 \quad (4.105)$$

$$\rightarrow -\lambda_{10}K_{10}\theta_0 - K_{10}\theta_1 - K'_{15}\theta_1 + \gamma_{12} - K_{12}\theta_1 - \lambda_{12}K_{12}\theta_2 = 0 \quad (4.106)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}4EI_0\theta_0 - 4EI_0\theta_1 - EI_0\theta_1 - \frac{49}{6} - \frac{12EI_0}{7}\theta_1 - \frac{1}{2}\frac{12EI_0}{7}\theta_2 = 0 \quad (4.107)$$

$$\rightarrow -2\theta_0 + 4\theta_1 + \theta_1 + \frac{49}{6EI_0} + \frac{12}{7}\theta_1 + \frac{6}{7}\theta_2 = 0 \quad (4.108)$$

$$\rightarrow 2\theta_0 + \frac{47}{7}\theta_1 + \frac{6}{7}\theta_2 = -\frac{49}{6EI_0} \quad (4.109)$$

Equilibre du nœud  $A_2$  :

$$\Gamma_{21} + \Gamma_{26} + \Gamma_{23} = 0 \quad (4.110)$$

$$\rightarrow \gamma_{21} - \lambda_{21}K_{21}\theta_1 - K_{21}\theta_2 - K_{26}\theta_2 + \gamma'_{23} - K'_{23}\theta_2 = 0 \quad (4.111)$$

$$\rightarrow \frac{49}{6} - \frac{1}{2} \frac{12EI_0}{7}\theta_1 - \frac{12EI_0}{7}\theta_2 - \frac{4EI_0}{3}\theta_2 - \frac{9}{8} - 2EI_0\theta_2 = 0 \quad (4.112)$$

$$\rightarrow \frac{-49}{6EI_0} + \frac{6}{7}\theta_1 + \frac{12}{7}\theta_2 + \frac{4}{3}\theta_2 + \frac{9}{8EI_0} + 2\theta_2 = 0 \quad (4.113)$$

$$\rightarrow \frac{6}{7}\theta_1 + \frac{106}{21}\theta_2 = \frac{169}{24EI_0} \quad (4.114)$$

Les équations d'équilibre des nœuds nous donnent le système suivant :

$$\begin{cases} 5\theta_0 + 2\theta_1 & = 0 \\ 2\theta_0 + \frac{47}{7}\theta_1 + \frac{6}{7}\theta_2 & = -\frac{49}{6EI_0} \\ \frac{6}{7}\theta_1 + \frac{106}{21}\theta_2 & = \frac{169}{24EI_0} \end{cases} \quad (4.115)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_0 & = \frac{83363}{128412EI_0} = \frac{0,6492}{EI_0} \\ \theta_1 & = -\frac{416815}{256824EI_0} = -\frac{1,623}{EI_0} \\ \theta_2 & = \frac{95347}{57072EI_0} = \frac{1,6706}{EI_0} \end{cases} \quad (4.116)$$

**Remarque :** La résolution du système d'équations (4.115) sous le logiciel de calcul mathématique MATLAB se fait comme schématisé sur la figure (4.10).

Calcul des moments sur les nœuds :

$$\Gamma_{04} = -M_{04} = -K_{04}\theta_0 \quad (4.117)$$

$$= -EI_0 \cdot \frac{0,6492}{EI_0} \quad (4.118)$$

$$= -0,6492 \text{ kN.m} \quad (4.119)$$

$$\simeq -0,65 \text{ kN.m} \quad (4.120)$$



```

>> syms E I0
>> A = [5 2 0; 2 47/7 6/7; 0 6/7 106/21]
A =
    5.0000    2.0000     0
    2.0000    6.7143    0.8571
     0     0.8571    5.0476

>> B = [0; -49/(6*E*I0); 169/(24*E*I0)]
B =
     0
 -49/(6*E*I0)
 169/(24*E*I0)

>> X=inv(A)*B
X =
 83363/(128412*E*I0)
-416815/(256824*E*I0)
 95347/(57072*E*I0)

```

$\rightarrow \begin{matrix} = \theta_0 \\ = \theta_1 \\ = \theta_2 \end{matrix}$

FIGURE 4.10 – Résolution du système d'équations sous MATLAB

$$\Gamma_{40} = M_{40} = -\lambda_{40}K_{40}\theta_0 \quad (4.121)$$

$$= -\frac{1}{2}EI_0 \cdot \frac{0,6492}{EI_0} \quad (4.122)$$

$$= -0,3246 \text{ kN.m} \quad (4.123)$$

$$\simeq -0,33 \text{ kN.m} \quad (4.124)$$

$$\Gamma_{01} = M_{01} = -K_{01}\theta_0 - \lambda_{01}K_{01}\theta_1 \quad (4.125)$$

$$= -4EI_0 \cdot \frac{0,6492}{EI_0} - \frac{1}{2}4EI_0 \cdot \left( \frac{-1,623}{EI_0} \right) \quad (4.126)$$

$$= 0,6492 \text{ kN.m} \quad (4.127)$$

$$\simeq 0,65 \text{ kN.m} \quad (4.128)$$

$$\Gamma_{10} = -M_{10} = -\lambda_{10}K_{10}\theta_0 - K_{10}\theta_1 \quad (4.129)$$

$$= -\frac{1}{2}4EI_0 \cdot \frac{0,6492}{EI_0} - 4EI_0 \cdot \left( \frac{-1,623}{EI_0} \right) \quad (4.130)$$

$$= 5,1936 \text{ kN.m} \quad (4.131)$$

$$\simeq 5,19 \text{ kN.m} \quad (4.132)$$

$$\Gamma_{12} = M_{12} = \gamma_{12} - K_{12}\theta_1 - \lambda_{12}K_{12}\theta_2 \quad (4.133)$$

$$= -\frac{49}{6} - \frac{12EI_0}{7} \cdot \left( \frac{-1,623}{EI_0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{12EI_0}{7} \cdot \frac{1,6706}{EI_0} \quad (4.134)$$

$$= -6,81632 \text{ kN.m} \quad (4.135)$$

$$\simeq -6,82 \text{ kN.m} \quad (4.136)$$

$$\Gamma_{21} = -M_{21} = \gamma_{21} - \lambda_{21}K_{21}\theta_1 - K_{21}\theta_2 \quad (4.137)$$

$$= \frac{49}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{12EI_0}{7} \cdot \left( \frac{-1,623}{EI_0} \right) - \frac{12EI_0}{7} \cdot \frac{1,6706}{EI_0} \quad (4.138)$$

$$= 6,69392 \text{ kN.m} \quad (4.139)$$

$$\simeq 6,69 \text{ kN.m} \quad (4.140)$$

$$\Gamma_{15} = -M_{15} = -K'_{15}\theta_1 \quad (4.141)$$

$$= -EI_0 \cdot \left( \frac{-1,623}{EI_0} \right) \quad (4.142)$$

$$= 1,623 \text{ kN.m} \quad (4.143)$$

$$\simeq 1,62 \text{ kN.m} \quad (4.144)$$

$$\Gamma_{51} = M_{51} = 0 \text{ kN.m} \quad (4.145)$$

$$\Gamma_{23} = M_{23} = \gamma'_{23} - K'_{23}\theta_2 \quad (4.146)$$

$$= -\frac{9}{8} - 2EI_0 \cdot \frac{1,6706}{EI_0} \quad (4.147)$$

$$= -4,4662 \text{ kN.m} \quad (4.148)$$

$$\simeq -4,47 \text{ kN.m} \quad (4.149)$$

$$\Gamma_{32} = -M_{32} = 0 \text{ kN.m} \quad (4.150)$$

$$\Gamma_{26} = -M_{26} = -K_{26}\theta_2 \quad (4.151)$$

$$= -\frac{4EI_0}{3} \cdot \frac{1,6706}{EI_0} \quad (4.152)$$

$$= -2,22747 \text{ kN.m} \quad (4.153)$$

$$\simeq -2,23 \text{ kN.m} \quad (4.154)$$

$$\Gamma_{62} = M_{62} = -\lambda_{62}K_{62}\theta_2 \quad (4.155)$$

$$= -\frac{14EI_0}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1,6706}{EI_0} \quad (4.156)$$

$$= -1,11373 \text{ kN.m} \quad (4.157)$$

$$\simeq -1,11 \text{ kN.m} \quad (4.158)$$

Récapitulatif des moments sur les appuis :

$$\begin{cases} M_{04} = 0,65 \text{ kN.m} \\ M_{40} = -0,33 \text{ kN.m} \\ M_{01} = 0,65 \text{ kN.m} \end{cases} \star \begin{cases} M_{10} = -5,19 \text{ kN.m} \\ M_{12} = -6,82 \text{ kN.m} \\ M_{21} = -6,69 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (4.159)$$

$$\begin{cases} M_{15} = -1,62 \text{ kN.m} \\ M_{51} = 0 \text{ kN.m} \\ M_{23} = -4,47 \text{ kN.m} \end{cases} \star \begin{cases} M_{32} = 0 \text{ kN.m} \\ M_{26} = 2,23 \text{ kN.m} \\ M_{62} = -1,11 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (4.160)$$

Traçage du diagramme des moments fléchissants du portique :

Le moment est linéaire (parties de droites) sur toutes les poutres du système sauf pour les poutres  $(A_1A_2)$  et  $(A_2A_3)$  à cause des charges réparties.

Sur la poutre  $(A_1A_2)$ , on trouve :

$$M(x) = \frac{q_1 l}{2} x - q_1 x \cdot \frac{x}{2} + \frac{M_{21} - M_{12}}{l} x + M_{12} \quad (4.161)$$

$$= \frac{2,7}{2} x - 2x \cdot \frac{x}{2} + \frac{-6,69 + 6,82}{7} x - 6,82 \quad (4.162)$$

$$= -x^2 + 7,02x - 6,82 \quad (4.163)$$

recherche de l'optimum du moment fléchissant :

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \quad (4.164)$$

$$\rightarrow -2x + 7,02 = 0 \quad (4.165)$$

$$\rightarrow x = \frac{7,02}{2} = 3,51 \text{ m} \quad (4.166)$$

$$\rightarrow M(3,51) = -(3,51)^2 + 7,02 \cdot 3,51 - 6,82 \quad (4.167)$$

$$= 5,5 \text{ kN.m} \quad (4.168)$$

Sur la poutre  $(A_2A_3)$ , on trouve :

$$M(x) = \frac{q_2 l}{2} x - q_2 x \cdot \frac{x}{2} + \frac{M_{32} - M_{23}}{l} x + M_{23} \quad (4.169)$$

$$= \frac{1,3}{2} x - \frac{x^2}{2} + \frac{0 + 4,47}{3} x - 4,47 \quad (4.170)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2,99x - 4,47 \quad (4.171)$$

recherche de l'optimum du moment fléchissant :

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \quad (4.172)$$

$$\rightarrow -x + 2,99 = 0 \quad (4.173)$$

$$\rightarrow x = 2,99 \text{ m} \quad (4.174)$$

$$\rightarrow M(2,99) = -\frac{1}{2}(2,99)^2 + 2,99 \cdot 2,99 - 4,47 \quad (4.175)$$

$$= 0 \text{ kN.m} \quad (4.176)$$

Nous présentons le diagramme des moments fléchissants sur la figure (4.11).

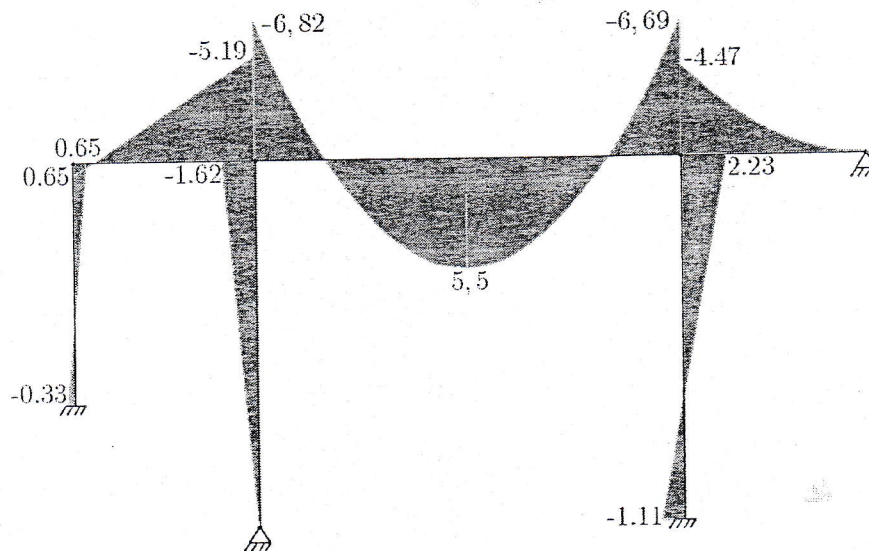


FIGURE 4.11 – Diagramme des moments fléchissants - Exercice 2



## A.3 Formulaire des moments

Ci-bas le formulaire des moments fléchissants :

Ces tableaux nous permettent d'avoir les moments fléchissants aux extrémités de poutres bi-encastées et de poutres à une extrémité simplement appuyée pour différents types de chargements.

Pour toutes ces formules, on considère que :  $EI = cte$

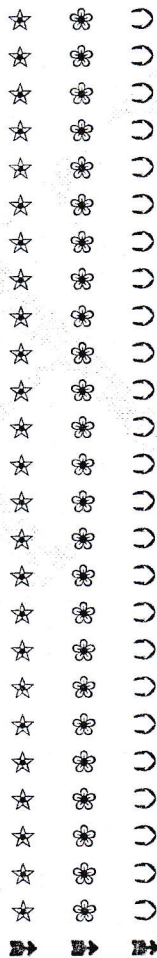
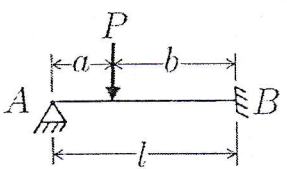
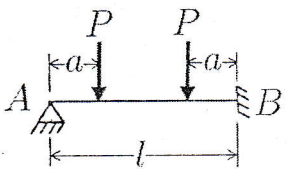
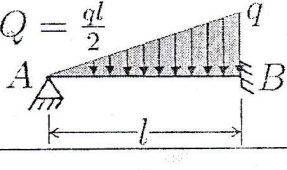
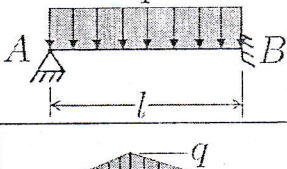
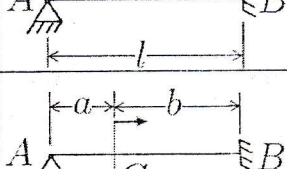
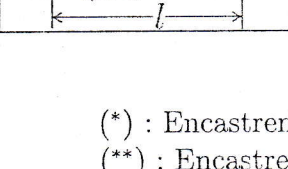


Tableau des $M$	$M_{AB}$	$M_{BA}$
	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$-\frac{Pa}{l}(l-a)$	$\frac{Pa}{l}(l-a)$
	$-\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{20}$
	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$
	$-\frac{5ql^2}{96}$	$\frac{5ql^2}{96}$
	$\frac{Cb(2l-3b)}{l^2}$	$\frac{Ca(2l-3a)}{l^2}$

Tableau des $M'$	$M_{AB}$ (*)	$M_{BA}$ (**)
	$-\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	$\frac{Pa(l^2-a^2)}{2l^2}$
	$-\frac{3Pa}{2l}(l-a)$	$\frac{3Pa}{2l}(l-a)$
	$-\frac{7Ql}{60}$	$\frac{2Ql}{15}$
	$-\frac{ql^2}{8}$	$\frac{ql^2}{8}$
	$-\frac{15ql^2}{192}$	$\frac{15ql^2}{192}$
	$\frac{C}{2l^2}(l^2-3b^2)$	$\frac{C}{2l^2}(l^2-3a^2)$

(\*) : Encastrement à gauche,  
 (\*\*): Encastrement à droite.