les coefficients de l'équation sont :

$$\alpha_1 = c_1 + a_2 + \frac{k_0}{l^2} \quad (2.145)$$

$$= \frac{l}{3EI} + \frac{k}{l^2} \quad (2.146)$$

$$\Lambda_1 = \theta_1'' - \theta_1' - \frac{k_0}{l_1} R_0^0 \quad (2.147)$$

$$= -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{k}{l}\frac{ql}{2} \quad (2.148)$$

$$= -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{kq}{2} \quad (2.149)$$

$$(2.144) \rightarrow \left(\frac{l}{3EI} + \frac{k}{l^2}\right) M_1 = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{kq}{2} \quad (2.150)$$

$$\rightarrow \frac{8l^3 + 24kEI}{24EIl^2} M_1 = -\frac{ql^5 + 12kqEIl^2}{24EIl^2} \quad (2.151)$$

$$\boxed{M_1 = -\frac{ql^2}{8}\frac{l^3 + 12kEI}{l^3 + 3kEI}} \quad (2.152)$$

La réaction de l'appui A_0 est :

$$R_0 = R_0^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} - \frac{M_0}{l_0} \quad (2.153)$$

$$= \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8}\frac{l^3 + 12kEI}{l^3 + 3kEI} \quad (2.154)$$

$$\rightarrow \boxed{R_0 = \frac{3ql^4}{8l^3 + 24kEI}} \quad (2.155)$$

2.6 Méthode des foyers

2.6.1 Foyers de gauche

Considérons une poutre continue $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ soumise à l'action d'un moment M_n appliqué à son extrémité de droite A_n (figure 2.14).

L'application de l'équation des trois moments à l'appui A_i donne :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \underbrace{0}_{\text{travées non chargées}} + \underbrace{0}_{\text{travées non dénivelées}} \quad (2.156)$$

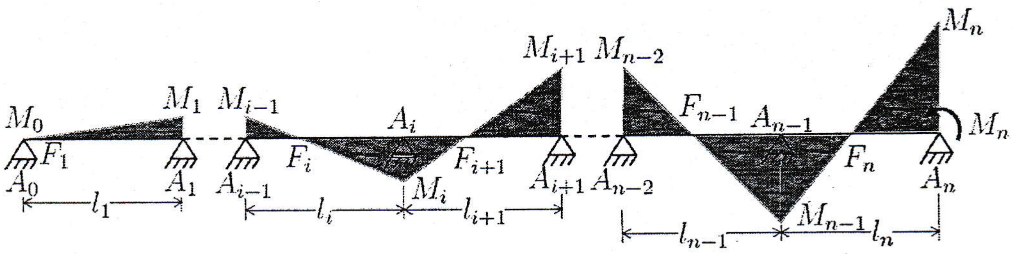

FIGURE 2.14 – Définition des foyers de gauche

En appliquant l'équation (2.156) à l'appui A_1, on obtient :

$$b_1 \underbrace{M_0}_{0} + (c_1 + a_2)M_1 + b_2 M_2 = 0 \quad (2.157)$$

$$\rightarrow \quad M_1 = -\frac{b_2}{c_1 + a_2} M_2 \quad (2.158)$$

M_1 et M_2 sont donc de signes contraires.

En faisant la même chose sur les autres appuis, on constate que les moments changent de signe alternativement sur les travées de la poutre continue. D'où, sur chaque travée i, la courbe du moment coupe la ligne moyenne de la travée en un point F_i appelé : ***Foyer de gauche***.

En divisant l'équation (2.156) par le moment intermédiaire M_i, il vient :

$$b_i \frac{M_{i-1}}{M_i} + (c_i + a_{i+1}) + b_{i+1} \frac{M_{i+1}}{M_i} = 0 \quad (2.159)$$

on pose :

$$\boxed{\varphi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}} \quad (2.160)$$

on en déduit :

$$-b_i \varphi_i + (c_i + a_{i+1}) - \frac{b_{i+1}}{\varphi_{i+1}} = 0 \quad (2.161)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\varphi_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{(c_i + a_{i+1}) - b_i \varphi_i}} \quad (2.162)$$

Le foyer de gauche F_i de la travée i est défini par :

$$\varphi_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} = \frac{\overline{A_{i-1}F_i}}{\overline{F_i A_i}} \quad (2.163)$$

avec $0 \leq \varphi_i \leq 1$ pour toute travée i.

Les valeurs de φ_i ne dépendent que des caractéristiques mécaniques des travées. Elles sont indépendantes des chargements extérieurs appliqués.

On peut constater que :

- Les foyers de gauche sont obtenus par récurrence depuis leur position dans la travée la plus à gauche $F_1 = A_0$ à l'aide des coefficients φ_i en partant de $\varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = 0$ (équation 2.162),
- Les moments fléchissants se déduisent de M_n (moment le plus à droite) par récurrence à l'aide des coefficients φ_i (équation 2.160).

2.6.2 Foyers de droite

Considérons une poutre continue $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ soumise à l'action d'un moment M_0 appliqué à son extrémité de gauche A_0 (figure 2.16).

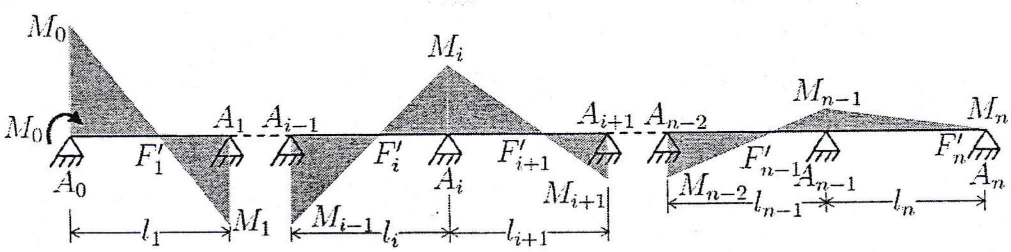

FIGURE 2.15 – Définition des foyers de droite

On pose :

$$\boxed{\varphi'_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}} \tag{2.164}$$

comme pour les foyers de gauche, on obtient :

$$\boxed{\varphi'_i = \frac{b_i}{(c_i + a_{i+1}) - b_{i+1}\varphi'_{i+1}}} \tag{2.165}$$

En désignant par F'_i le ***Foyer de droite*** (point de moment nul) de la travée i, on peut constater comme pour les foyers de gauche que :

- Les foyers de droite sont obtenus par récurrence depuis leur position dans la travée la plus à droite $F'_n = A_n$ à l'aide des coefficients φ'_i en partant de $\varphi'_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} = 0$ (équation 2.165),
- Les moments fléchissants se déduisent de M_0 (moment le plus à gauche) par récurrence à l'aide des coefficients φ'_i (équation 2.164).

2.6.3 Calcul des moments sur les appuis à l'aide des foyers

On considère une poutre continue sollicitée uniquement par des charges agissant sur la travée i (figure 2.16).

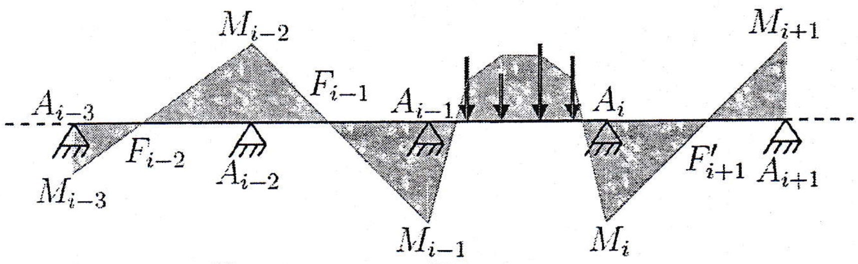

FIGURE 2.16 – Calcul des moments sur appuis

En appliquant l'équation des trois moments aux appuis A_{i-1} et A_i :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_{i-1}M_{i-2} + (c_{i-1} + a_i)M_{i-1} + b_iM_i & = & \theta''_{i-1} \\ b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} & = & -\theta'_i \end{array} \right. \quad (2.166)$$

à partir de (2.160) et (2.164), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M_{i-2} & = & -\varphi_{i-1}M_{i-1} \\ M_{i+1} & = & -\varphi'_{i+1}M_i \end{array} \right. \quad (2.167)$$

le système (2.166) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left[-b_{i-1}\varphi_{i-1} + (c_{i-1} + a_i)\right] M_{i-1} + b_iM_i & = & \theta''_{i-1} \\ b_iM_{i-1} + \left[(c_i + a_{i+1}) - b_{i+1}\varphi'_{i+1}\right] M_i & = & -\theta'_i \end{array} \right. \quad (2.168)$$

à partir de (2.162) et (2.165), on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -b_{i-1}\varphi_{i-1} + (c_{i-1} + a_i) & = & \frac{b_i}{\varphi_i} \\ (c_i + a_{i+1}) - b_{i+1}\varphi'_{i+1} & = & \frac{b_i}{\varphi'_i} \end{array} \right. \quad (2.169)$$

on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{M_{i-1}}{\varphi_i} + M_i & = & \frac{\theta''_{i-1}}{b_i} \\ M_{i-1} + \frac{M_i}{\varphi'_i} & = & -\frac{\theta'_i}{b_i} \end{array}\right. \tag{2.170}$$

on obtient un système de deux équations à deux inconnues M_{i-1} et M_i. Après résolution du système, on trouve :

$$\boxed{M_{i-1} = \frac{1}{b_i}\frac{\frac{\theta''_{i-1}}{\varphi'_i} + \theta'_i}{\frac{1}{\varphi_i\varphi'_i} - 1}} \tag{2.171}$$

$$\boxed{M_i = -\frac{1}{b_i}\frac{\theta''_{i-1} + \frac{\theta'_i}{\varphi_i}}{\frac{1}{\varphi_i\varphi'_i} - 1}} \tag{2.172}$$

ou :

$$\boxed{M_{i-1} = \frac{1}{b_i}\frac{\varphi_i\theta''_{i-1} + \varphi_i\varphi'_i\theta'_i}{1 - \varphi_i\varphi'_i}} \tag{2.173}$$

$$\boxed{M_i = -\frac{1}{b_i}\frac{\varphi_i\varphi'_i\theta''_{i-1} + \varphi'_i\theta'_i}{1 - \varphi_i\varphi'_i}} \tag{2.174}$$

Sur les autres appuis, les moments sont calculés directement à partir des foyers de gauche pour les appuis situés à gauche de A_{i-1} et à partir des foyers de droite pour les appuis situés à droite de A_i :

$$\begin{array}{ll} M_{i-2} = -\varphi_{i-1}M_{i-1} & M_{i+1} = -\varphi'_{i+1}M_i \\ M_{i-3} = -\varphi_{i-2}M_{i-2} & M_{i+2} = -\varphi'_{i+2}M_{i+1} \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{2.175}$$

Remarque :

Dans le cas où d'autres travées sont chargées, on opère par ***principe de superposition*** *en considérant* ***chaque travée seule chargée à la fois****.*

Sur la figure (2.17), on présente un exemple d'une poutre continue à cinq travées chargée successivement par un moment Γ à son extrémité gauche A_0, une force concentrée F sur la travée centrale A_2A_3 et un moment Γ à son extrémité droite A_5.

Le premier schéma présente les cinq foyers droites de la poutre $(F'_1, \ldots, F'_5)$.

Le troisième schéma présente les cinq foyers gauches de la poutre $(F_1, \ldots, F_5)$.

Le deuxième schéma présente deux foyers de gauche (F_1, F_2) et deux foyers de droite (F'_4, F'_5).

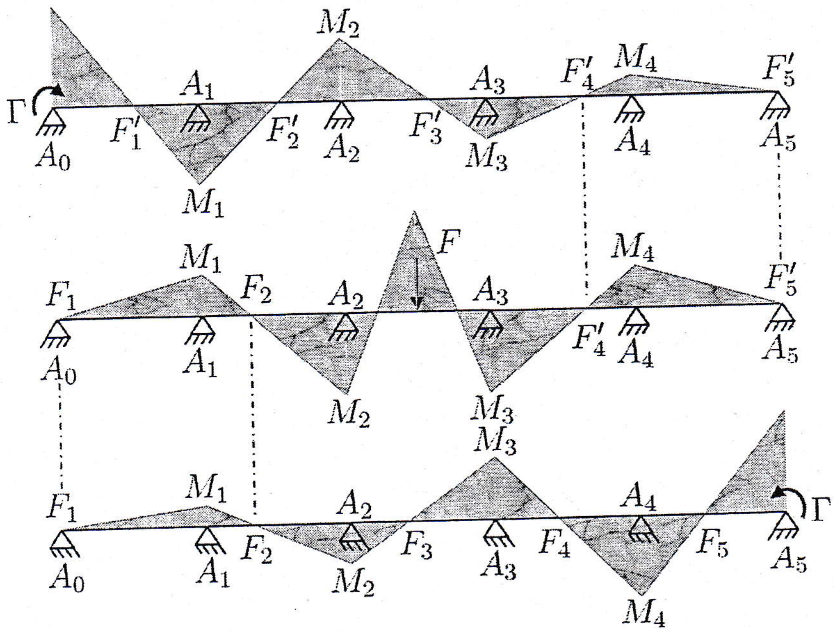

FIGURE 2.17 – Exemple d'une poutre continue à 5 travées

2.7 Exercices

Exercice 6 :

1. Déterminer, par la méthode des foyers, les moments sur appuis de la poutre continue de la figure (2.18),
2. Tracer le diagramme des moments fléchissants.

On prend $EI = cte$.

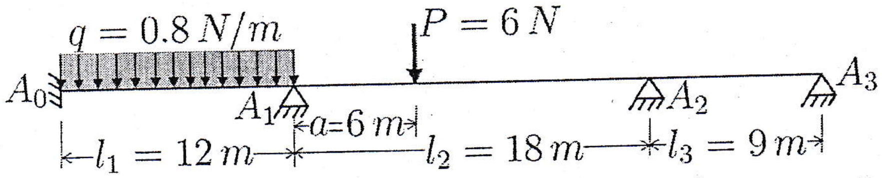

FIGURE 2.18 – Schéma de l'exercice 6

✏ **Solution 6 :**

1. Calcul des foyers de gauche :
   La rotation au niveau de l'encastrement A_0 est :

$$\theta_0 = \theta_0'' - a_1 M_0 - b_1 M_1 = 0 \qquad (2.176)$$

pour déterminer les rapports focaux φ_i, la poutre est considérée non chargée. Donc on a : $\theta_0'' = 0$, d'où :

$$-a_1 M_0 - b_1 M_1 = 0 \qquad (2.177)$$

$$\rightarrow \qquad -\frac{M_0}{M_1} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{2} \qquad (2.178)$$

sachant que pour $EI = cte$, on a $a_i = 2b_i$.
En reprenant l'expression (2.160), on a :

$$\varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = \frac{1}{2} \qquad (2.179)$$

on utilise l'équation (2.162) pour déterminer les autres rapports focaux :

$$\varphi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2 - b_1\varphi_1} = \frac{\frac{18}{6EI}}{\frac{12}{3EI} + \frac{18}{3EI} - \frac{12}{6EI}\frac{1}{2}} = \frac{3}{4+6-1} = \frac{1}{3} \qquad (2.180)$$

$$\varphi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\varphi_2} = \frac{\frac{9}{6EI}}{\frac{18}{3EI} + \frac{9}{3EI} - \frac{18}{6EI}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{6+3-1} = \frac{3}{16} \qquad (2.181)$$

Calcul des foyers de droite :
on utilise (2.164) :

$$\varphi_3' = -\frac{M_3}{M_2} = 0 \qquad (2.182)$$

puisque $M_3 = 0$.

L'équation (2.165) nous donne :

$$\varphi_2' = \frac{b_2}{c_2 + a_3 - b_3\varphi_3'} = \frac{\frac{18}{6EI}}{\frac{18}{3EI} + \frac{9}{3EI} - \frac{9}{6EI}.0} = \frac{3}{6+3} = \frac{1}{3} \tag{2.183}$$

$$\varphi_1' = \frac{b_1}{c_1 + a_2 - b_2\varphi_2'} = \frac{\frac{12}{6EI}}{\frac{12}{3EI} + \frac{18}{3EI} - \frac{18}{6EI}\frac{1}{3}} = \frac{2}{4+6-1} = \frac{2}{9} \tag{2.184}$$

Calcul des moments sur appuis :

Travée 1 chargée :

Les équations (2.173) et (2.174) nous permettent de calculer respectivement les moments des appuis de la travée chargée. Dans notre cas, il s'agit des moments M_0 et M_1 :

$$M_0 = \frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\theta_0'' + \varphi_1\varphi_1'\theta_1'}{1 - \varphi_1\varphi_1'} \tag{2.185}$$

on a d'après les tableaux des rotations des poutres :

$$\theta_0'' = -\frac{ql_1^3}{24EI} = -\frac{0,8.12^3}{24EI} = -\frac{57,6}{EI} \tag{2.186}$$

$$\theta_1' = \frac{ql_1^3}{24EI} = \frac{57,6}{EI} \tag{2.187}$$

et le coefficient de souplesse b_1 :

$$b_1 = \frac{l_1}{6EI} = \frac{12}{6EI} = \frac{2}{EI} \tag{2.188}$$

le moment est donc :

$$M_0 = \frac{EI}{2}\frac{0,5.(-\frac{57,6}{EI}) + 0,5.\frac{2}{9}.\frac{57,6}{EI}}{1 - 0,5.\frac{2}{9}} \tag{2.189}$$

$$\rightarrow \qquad M_0 = -12,6\,N.m \tag{2.190}$$

le moment de droite M_1 est calculé par :

$$M_1 = -\frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\varphi_1'\theta_0'' + \varphi_1'\theta_1'}{1 - \varphi_1\varphi_1'} = -\frac{EI}{2}\frac{0,5.\frac{2}{9}.(-\frac{57,6}{EI}) + \frac{2}{9}.\frac{57,6}{EI}}{1 - 0,5.\frac{2}{9}} \tag{2.191}$$

$$\rightarrow \qquad M_1 = -3,6\,N.m \tag{2.192}$$

on a aussi :

$$M_2 = -\varphi_2' M_1 = -\frac{1}{3}.(-3,6) = 1,2\,N.m \tag{2.193}$$

$$M_3 = 0\,N.m \tag{2.194}$$

Travée 2 chargée :

on a :

$$M_1 = \frac{1}{b_2}\frac{\varphi_2\theta_1'' + \varphi_2\varphi_2'\theta_2'}{1-\varphi_2\varphi_2'} \tag{2.195}$$

le coefficient de souplesse et les rotations sont :

$$b_2 = \frac{l_2}{6EI} = \frac{18}{6EI} = \frac{3}{EI} \tag{2.196}$$

$$\theta_1'' = -\frac{Pa}{6EIl_2}(l_2-a)(2l_2-a) = -\frac{6.6}{6.18.EI}(18-6)(36-6) \tag{2.197}$$

$$\rightarrow \qquad \theta_1'' = -\frac{120}{EI} \tag{2.198}$$

$$\theta_2' = \frac{Pa}{6EIl_2}(l_2^2-a^2) = \frac{6.6}{6.18.EI}(18^2-6^2) = \frac{96}{EI} \tag{2.199}$$

on obtient donc :

$$M_1 = \frac{EI}{3}\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{120}{EI}\right)+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{96}{EI}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}} \tag{2.200}$$

$$\rightarrow \qquad M_1 = -11\,N.m \tag{2.201}$$

les autres moments sont :

$$M_2 = -\frac{1}{b_2}\frac{\varphi_2\varphi_2'\theta_1'' + \varphi_2'\theta_2'}{1-\varphi_2\varphi_2'} = -\frac{EI}{3}\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\left(-\frac{120}{EI}\right)+\frac{1}{3}.\frac{96}{EI}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}} \tag{2.202}$$

$$\rightarrow \qquad M_2 = -7\,N.m \tag{2.203}$$

$$M_0 = -\varphi_1 M_1 = -\frac{1}{2}.(-11) \tag{2.204}$$

$$\rightarrow \qquad M_0 = 5,5\,N.m \tag{2.205}$$

Les moments sur appuis dus au chargement total sont :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} M_0 & = & -12,6+5,5 & = & -7,1\,N.m \\ M_1 & = & -3,6-11 & = & -14,6\,N.m \\ M_2 & = & 1,2-7 & = & -5,8\,N.m \\ M_3 & & & = & 0\,N.m \end{array}\right. \tag{2.206}$$

2. Le développement du DMF est le même que la deuxième question de l'exercice 2.
Le DMF correspondant est présenté sur la figure (2.19).

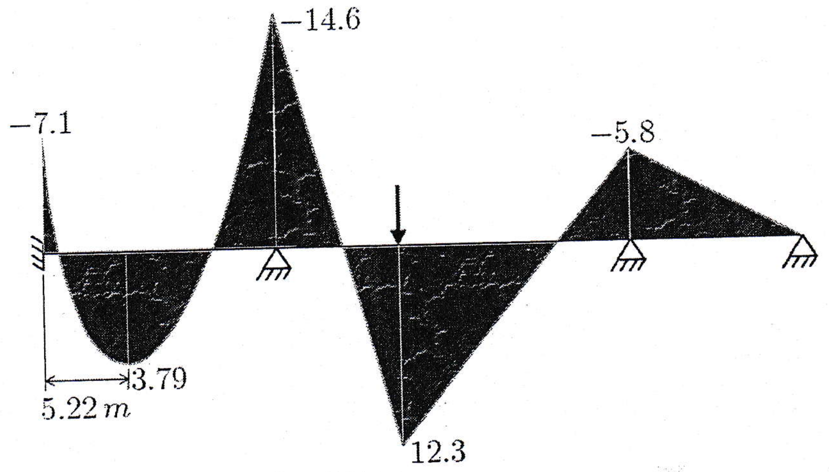

FIGURE 2.19 – DMF - Exercice 6

Exercice 7 :

Calculer les moments au niveau des appuis du schéma de la figure (2.20).

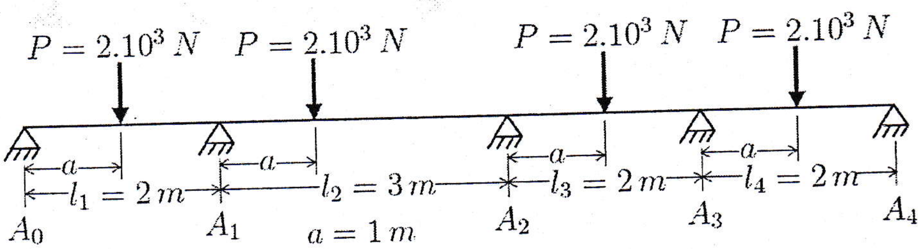

FIGURE 2.20 – Schéma de l'exercice 7

Solution 7 :

Calcul des foyers (rapports focaux) :
On a :

$$M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = 0 \tag{2.207}$$

$$\varphi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2 - b_1\varphi_1} = \frac{\frac{3}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{3}{3EI} - 0} = 0,3 \tag{2.208}$$

$$\varphi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\varphi_2} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{3}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{3}{6EI}.0,3} = 0,21978 \tag{2.209}$$

$$\varphi_4 = \frac{b_4}{c_3 + a_4 - b_3\varphi_3} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,21978} = 0,264535 \tag{2.210}$$

on a encore :

$$M_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi'_4 = -\frac{M_4}{M_3} = 0 \tag{2.211}$$

$$\varphi'_3 = \frac{b_3}{c_3 + a_4 - b_4\varphi'_4} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - 0} = 0,25 \tag{2.212}$$

$$\varphi'_2 = \frac{b_2}{c_2 + a_3 - b_3\varphi'_3} = \frac{\frac{3}{6EI}}{\frac{3}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,25} = 0,315789 \tag{2.213}$$

$$\varphi'_1 = \frac{b_1}{c_1 + a_2 - b_2\varphi'_2} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{3}{3EI} - \frac{3}{6EI}.0,315789} = 0,22093 \tag{2.214}$$

Calculons les moments par travée chargée à la fois :

Travée 1 chargée :

$$M_0 = \frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\theta''_0 + \varphi_1\varphi'_1\theta'_1}{1 - \varphi_1\varphi'_1} \tag{2.215}$$

le coefficient de souplesse b_1 et les rotations sont donnés par :

$$\theta''_0 = -\frac{Pl_1^2}{16EI} = -\frac{2000.2^2}{16EI} = -\frac{500}{EI} \tag{2.216}$$

$$\theta'_1 = \frac{Pl_1^2}{16EI} = \frac{500}{EI} \tag{2.217}$$

$$b_1 = \frac{2}{6EI} = \frac{1}{3EI} \tag{2.218}$$

on a donc :

$$M_0 = 3EI.0 = 0\,N.m \tag{2.219}$$

$$M_1 = -\frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\varphi'_1\theta''_0 + \varphi'_1\theta'_1}{1 - \varphi_1\varphi'_1} = -3EI\frac{0 + 0,22093.\frac{500}{EI}}{1-0} = -331,395\,N.m \tag{2.220}$$

$$M_2 = -\varphi'_2 M_1 = -0,315789.(-331,395) = 104,651\,N.m \tag{2.221}$$

$$M_3 = -\varphi_3' M_2 = -0,25.104,651 = -26,16\, N.m \tag{2.222}$$

$$M_4 = -\varphi_4' M_3 = 0\, N.m \tag{2.223}$$

Travée 2 chargée :

On a :

$$M_1 = \frac{1}{b_2} \frac{\varphi_2 \theta_1'' + \varphi_2 \varphi_2' \theta_2'}{1 - \varphi_2 \varphi_2'} \tag{2.224}$$

le coefficient de souplesse b_2 et les rotations de la travée sont :

$$\theta_1'' = -\frac{Pa}{6EIl_2}(l_2 - a)(2l_2 - a) = -\frac{2000.1}{6.3.EI}(3-1)(6-1) = -\frac{1111,11}{EI} \tag{2.225}$$

$$\theta_2' = \frac{Pa}{6EIl_2}(l_2^2 - a^2) = \frac{2000.1}{6.3.EI}(9-1) = \frac{888,889}{EI} \tag{2.226}$$

$$b_2 = \frac{3}{6EI} = \frac{1}{2EI} \tag{2.227}$$

d'où :

$$M_1 = 2EI \frac{0,3\,(-\frac{1111,11}{EI}) + 0,3.0,315789.\frac{888,889}{EI}}{1 - 0,3.0,315789} = -550,387\, N.m \tag{2.228}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{1}{b_2} \frac{\varphi_2 \varphi_2' \theta_1'' + \varphi_2' \theta_2'}{1 - \varphi_2 \varphi_2'} && (2.229)\\ &= -2EI \frac{0,3.0,315789.\,(-\frac{1111,11}{EI}) + 0,315789.\frac{888,889}{EI}}{1 - 0,3.0,315789} && (2.230)\\ &= -387,597\, N.m && (2.231) \end{aligned}$$

$$M_0 = M_4 = 0\, N.m \tag{2.232}$$

$$M_3 = -\varphi_3' M_2 = -0,25.(-387,597) = 96,8991\, N.m \tag{2.233}$$

Travée 3 chargée :

On a :

$$M_2 = \frac{1}{b_3} \frac{\varphi_3 \theta_2'' + \varphi_3 \varphi_3' \theta_3'}{1 - \varphi_3 \varphi_3'} \tag{2.234}$$

le coefficient de souplesse b_3 et les rotations :

$$\theta_2'' = \theta_0'' = -\frac{500}{EI} \tag{2.235}$$

$$\theta'_3 = \theta'_1 = \frac{500}{EI} \tag{2.236}$$

$$b_3 = \frac{2}{6EI} = \frac{1}{3EI} \tag{2.237}$$

on trouve :

$$M_2 = 3EI \frac{0,21978.\,(-\frac{500}{EI}) + 0,21978.0,25.\frac{500}{EI}}{1 - 0,21978.0,25} = -261,628\,N.m \tag{2.238}$$

$$M_3 = -\frac{1}{b_3}\frac{\varphi_3\varphi'_3\theta''_2 + \varphi'_3\theta'_3}{1 - \varphi_3\varphi'_3} \tag{2.239}$$

$$= -3EI \frac{0,21978.0,25.\,(-\frac{500}{EI}) + 0,25\frac{500}{EI}}{1 - 0,21978.0,25} \tag{2.240}$$

$$= -309,593\,N.m \tag{2.241}$$

$$M_1 = -\varphi_2 M_2 = -0,3.(-261,628) = 78,488\,N.m \tag{2.242}$$

$$M_0 = M_4 = 0\,N.m \tag{2.243}$$

Travée 4 chargée :

On a :

$$M_3 = \frac{1}{b_4}\frac{\varphi_4\theta''_3 + \varphi_4\varphi'_4\theta'_4}{1 - \varphi_4\varphi'_4} \tag{2.244}$$

coefficient de souplesse b_4 et rotations :

$$\theta''_3 = \theta''_0 = -\frac{500}{EI} \tag{2.245}$$

$$\theta'_4 = \theta'_1 = \frac{500}{EI} \tag{2.246}$$

$$b_4 = \frac{2}{6EI} = \frac{1}{3EI} \tag{2.247}$$

d'où :

$$M_3 = 3EI \frac{0,264535.\,(-\frac{500}{EI}) + 0}{1 - 0} = -396,803\,N.m \tag{2.248}$$

$$M_4 = -\frac{1}{b_4}\frac{\varphi_4\varphi'_4\theta''_3 + \varphi'_4\theta'_4}{1 - \varphi_4\varphi'_4} = 0\,N.m \tag{2.249}$$

$$M_0 = M_4 = 0\,N.m \tag{2.250}$$

$$M_2 = -\varphi_3 M_3 = -0,21978.(-396,803) = 87,209\,N.m \tag{2.251}$$

$$M_1 = -\varphi_2 M_2 = -0,3.87,209 = -26,163\,N.m \quad (2.252)$$

Moments dus au chargement total :

$$\begin{cases} M_0 &= 0 \\ M_1 &= -331,395 - 550,387 + 78,488 - 26,163 \\ M_2 &= 104,651 - 387,597 - 261,628 + 87,209 \\ M_3 &= -26,16 + 96,8991 - 309,593 - 396,803 \\ M_4 &= 0 \end{cases} \quad (2.253)$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} M_0 &= 0\,N.m \\ M_1 &= -829,46\,N.m \\ M_2 &= -457,37\,N.m \\ M_3 &= -635,66\,N.m \\ M_4 &= 0\,N.m \end{cases} \quad (2.254)$$

Exercice 8 :

Déterminer les moments sur les appuis et tracer le diagramme des moments fléchissants (DMF) de la poutre schématisée sur la figure (2.21).

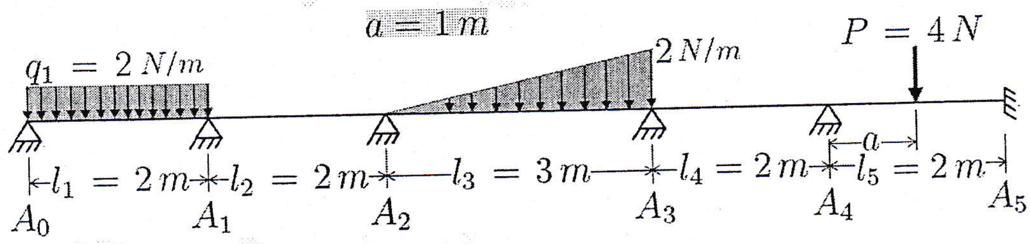

FIGURE 2.21 – Schéma de l'exercice 8

Solution 8 :

On a :

$$M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = 0 \quad (2.255)$$

Calcul des foyers des travées de la poutre :

$$\varphi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2 - b_1\varphi_1} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - 0} = 0,25 \quad (2.256)$$

$$\varphi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\varphi_2} = \frac{\frac{3}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{3}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,25} = 0,316 \quad (2.257)$$

$$\varphi_4 = \frac{b_4}{c_3 + a_4 - b_3\varphi_3} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{3}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{3}{6EI}.0,316} = 0,221 \qquad (2.258)$$

$$\varphi_5 = \frac{b_5}{c_4 + a_5 - b_4\varphi_4} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,221} = 0,265 \qquad (2.259)$$

la rotation de l'encastrement à l'appui A_5 est :

$$\theta_5 = \theta_5' + b_5 M_4 + C_5 M_5 = 0 \qquad (2.260)$$

la poutre est considérée comme non chargée pour déterminer les rapports focaux, donc :

$$\theta_5' = 0 \qquad (2.261)$$

$$\rightarrow \quad \theta_5 = \frac{2}{6EI}M_4 + \frac{2}{3EI}M_5 = 0 \qquad (2.262)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}M_4 + M_5 = 0 \qquad (2.263)$$

$$\rightarrow \quad -\frac{M_5}{M_4} = 0,5 \qquad (2.264)$$

$$\rightarrow \quad \varphi_5' = -\frac{M_5}{M_4} = 0,5 \qquad (2.265)$$

$$\varphi_4' = \frac{b_4}{c_4 + a_5 - b_5\varphi_5'} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,5} = 0,286 \qquad (2.266)$$

$$\varphi_3' = \frac{b_3}{c_3 + a_4 - b_4\varphi_4'} = \frac{\frac{3}{6EI}}{\frac{3}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,286} = 0,318 \qquad (2.267)$$

$$\varphi_2' = \frac{b_2}{c_2 + a_3 - b_3\varphi_3'} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{3}{3EI} - \frac{3}{6EI}.0,318} = 0,221 \qquad (2.268)$$

$$\varphi_1' = \frac{b_1}{c_1 + a_2 - b_2\varphi_2'} = \frac{\frac{2}{6EI}}{\frac{2}{3EI} + \frac{2}{3EI} - \frac{2}{6EI}.0,221} = 0,265 \qquad (2.269)$$

Déterminons les moments sur appuis par travée chargée :

Travée 1 chargée :

on a :

$$M_0 = \frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\theta_0'' + \varphi_1\varphi_1'\theta_1'}{1 - \varphi_1\varphi_1'} = 0 \qquad (2.270)$$

coefficient de souplesse b_1 et rotations de la travée isostatique :

$$\theta_0'' = -\frac{q_1 l_1^3}{24EI} = -\frac{2.2^3}{24EI} = -\frac{2}{3EI} \qquad (2.271)$$

$$\theta'_1 = \frac{q_1 l_1^3}{24EI} = \frac{2}{3EI} \quad (2.272)$$

$$b_1 = \frac{2}{6EI} = \frac{1}{3EI} \quad (2.273)$$

calcul des autres moments :

$$M_1 = -\frac{1}{b_1}\frac{\varphi_1\varphi'_1\theta''_0 + \varphi'_1\theta'_1}{1-\varphi_1\varphi'_1} = -3EI\frac{0 + 0,265.\frac{2}{3EI}}{1-0} = -0,53\,N.m \quad (2.274)$$

$$M_2 = -\varphi'_2 M_1 = -0,221.(-0,53) = 0,117\,N.m \quad (2.275)$$

$$M_3 = -\varphi'_3 M_2 = -0,318.0,117 = -0,037\,N.m \quad (2.276)$$

$$M_4 = -\varphi'_4 M_3 = -0,286.(-0,037) = 0,011\,N.m \quad (2.277)$$

$$M_5 = -\varphi'_5 M_4 = -0,5.0,011 = 0,0053\,N.m \quad (2.278)$$

Travée 3 chargée :

On a :

$$M_2 = \frac{1}{b_3}\frac{\varphi_3\theta''_2 + \varphi_3\varphi'_3\theta'_3}{1-\varphi_3\varphi'_3} \quad (2.279)$$

rotations de la travée isostatique et coefficient de souplesse b_3 :

$$\theta''_2 = -\frac{7q_2 l_3^3}{360EI} = -\frac{7.2.3^3}{360EI} = -\frac{21}{20EI} \quad (2.280)$$

$$\theta'_3 = \frac{8q_2 l_3^3}{360EI} = \frac{8.2.3^3}{360EI} = \frac{6}{5EI} \quad (2.281)$$

$$b_3 = \frac{3}{6EI} = \frac{1}{2EI} \quad (2.282)$$

moments :

$$M_2 = 2EI\frac{0,316.\,(-\frac{21}{20EI}) + 0,316.0,318.\frac{6}{5EI}}{1-0,316.0,318} = -0,4696\,N.m \quad (2.283)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\frac{1}{b_3}\frac{\varphi_3\varphi'_3\theta''_2 + \varphi'_3\theta'_3}{1-\varphi_3\varphi'_3} && (2.284)\\ &= -2EI\frac{0,316.0,318.\,(-\frac{21}{20EI}) + 0,318.\frac{6}{5EI}}{1-0,316.0,318} && (2.285)\\ &= -0,6139\,N.m && (2.286)\end{aligned}$$

$$M_1 = -\varphi_2 M_2 = -0,25.(-0,4696) = 0,1174\,N.m \quad (2.287)$$

$$M_0 = -\varphi_1 M_1 = 0\, N.m \tag{2.288}$$

$$M_4 = -\varphi'_4 M_3 = -0,286.(-0,6139) = 0,1756\, N.m \tag{2.289}$$

$$M_5 = -\varphi'_5 M_4 = -0,5.0,1756 = -0,0878\, N.m \tag{2.290}$$

Travée 5 chargée :

On a :

$$M_4 = \frac{1}{b_5}\frac{\varphi_5\theta''_4 + \varphi_5\varphi'_5\theta'_5}{1-\varphi_5\varphi'_5} \tag{2.291}$$

rotations de la travée isostatique et coefficient de souplesse b_5 :

$$\theta''_4 = -\frac{Pl_5^2}{16EI} = -\frac{4.2^2}{16EI} = -\frac{1}{EI} \tag{2.292}$$

$$\theta'_5 = \frac{Pl_5^2}{16EI} = \frac{1}{EI} \tag{2.293}$$

$$b_5 = \frac{2}{6EI} = \frac{1}{3EI} \tag{2.294}$$

d'où :

$$M_4 = 3EI\frac{0,265.\left(-\frac{1}{EI}\right) + 0,265.0,5.\frac{1}{EI}}{1-0,265.0,5} = -0,4582\, N.m \tag{2.295}$$

$$\begin{aligned} M_5 &= -\frac{1}{b_5}\frac{\varphi_5\varphi'_5\theta''_4 + \varphi'_5\theta'_5}{1-\varphi_5\varphi'_5} && (2.296)\\ &= -3EI\frac{0,265.0,5.\left(-\frac{1}{EI}\right) + 0,5.\frac{1}{EI}}{1-0,265.0,5} && (2.297)\\ &= -1,271\, N.m && (2.298)\end{aligned}$$

$$M_3 = -\varphi_4 M_4 = -0,221.(-0,4582) = 0,1013\, N.m \tag{2.299}$$

$$M_2 = -\varphi_3 M_3 = -0,316.0,1013 = -0,032\, N.m \tag{2.300}$$

$$M_1 = -\varphi_2 M_2 = -0,25.(-0,032) = 0,008\, N.m \tag{2.301}$$

$$M_0 = -\varphi_1 M_1 = 0\, N.m \tag{2.302}$$

Les moments dus au chargement total de la poutre sont donc :

$$\left\{\begin{array}{lcll} M_0 & & & = 0\, N.m \\ M_1 & = & -0,53 + 0,1174 + 0,008 & = -0,4046\, N.m \\ M_2 & = & 0,117 - 0,4696 - 0,032 & = -0,3846\, N.m \\ M_3 & = & -0,037 - 0,6139 + 0,1013 & = -0,5496\, N.m \\ M_4 & = & 0,011 + 0,1756 - 0,4582 & = -0,2716\, N.m \\ M_5 & = & 0,0053 - 0,0878 - 1,271 & = -1,3535\, N.m \end{array}\right. \tag{2.303}$$

Tracé du DMF :

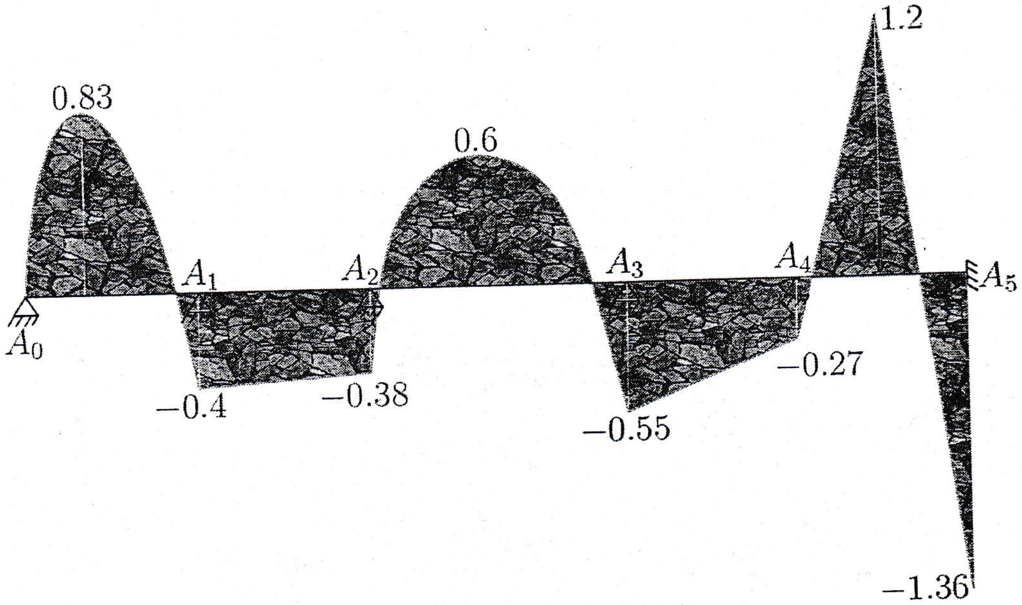

FIGURE 2.22 – DMF - Exercice 8