2.4 Equation des cinq moments (Poutres continues aux appuis élastiques)

Un appui élastique A_i (figure 2.9) est caractérisé par une constante positive k_i définie par :

$$v_i = -k_i R_i \tag{2.100}$$

avec :
v_i : est le déplacement vertical de l'appui A_i,
R_i : est la réaction verticale de l'appui A_i,
k_i : est appelé coefficient de souplesse de l'appui A_i.

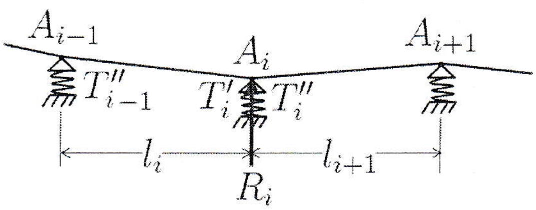

FIGURE 2.9 – Poutre continue sur appuis élastiques

La réaction d'un appui i est donnée par :

$$R_i = R_i^0 + (T''_i - T'_i) \tag{2.101}$$

R_i^0 correspond à la réaction de l'appui i provoquée par l'application des charges extérieures sur le système isostatique associé (système (0) de la figure 2.2). Elle est formulée par :

$$R_i^0 = R_i^{0'} + R_i^{0''} \tag{2.102}$$

T'_i et T''_{i+1} sont les efforts tranchants au niveau de l'appui i (figure 2.9).

Reprenons l'équation des trois moments avec prise en compte d'une dénivellation (équations 2.24 et 2.27) :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} = (\theta''_i - \theta'_i) + (\Omega_{i+1} - \Omega_i) \tag{2.103}$$

avec :

$$\Omega_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{l_{i+1}} \qquad \Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} \tag{2.104}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} b_iM_{i-1} + (c_i + a_{i+1})M_i + b_{i+1}M_{i+1} &= (\theta_i'' - \theta_i') + \frac{1}{l_i}v_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)v_i \\ &\quad + \frac{1}{l_{i+1}}v_{i+1} \end{aligned} \tag{2.105}$$

En considérant l'expression du moment sur une travée donnée (équation 2.29) et en ignorant le terme $m_{0_i}(x)$, on obtient l'expression de la réaction R_i :

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^0 + (T_i'' - T_i') \qquad (2.106) \\ &= R_i^0 + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \qquad (2.107) \end{aligned}$$

En considérant l'équation (2.100), on a donc :

$$\begin{aligned} v_i &= -k_i\left[R_i^0 + \frac{1}{l_i}M_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)M_i + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}}\right] \qquad (2.108) \\ v_{i-1} &= -k_{i-1}\left[R_{i-1}^0 + \frac{1}{l_{i-1}}M_{i-2} - \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)M_{i-1} + \frac{M_i}{l_i}\right] \qquad (2.109) \\ v_{i+1} &= -k_{i+1}\left[R_{i+1}^0 + \frac{1}{l_{i+1}}M_i - \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)M_{i+1} + \frac{M_{i+2}}{l_{i+2}}\right] \qquad (2.110) \end{aligned}$$

On reporte les équations (2.108), (2.109) et (2.110) dans l'équation (2.105) et en ordonnant les termes, on obtient **l'équation des cinq moments :**

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{k_{i-1}}{l_{i-1}l_i}M_{i-2} + \left[b_i - \frac{k_{i-1}}{l_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{k_i}{l_i}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\right]M_{i-1} \\ &\qquad + \left[c_i + a_{i+1} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + k_i\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}^2}\right]M_i \\ &\quad + \left[b_{i+1} - \frac{k_i}{l_{i+1}}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)\right]M_{i+1} \\ &\qquad + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}l_{i+2}}M_{i+2} = (\theta_i'' - \theta_i') - \frac{k_{i-1}}{l_i}R_{i-1}^0 \\ &\qquad\qquad + k_i\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)R_i^0 - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}R_{i+1}^0 \end{aligned}} \tag{2.111}$$

L'équation des cinq moments peut être écrite sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\gamma_{i-1}M_{i-2} + \beta_iM_{i-1} + \alpha_iM_i + \beta_{i+1}M_{i+1} + \gamma_{i+1}M_{i+2} = \Lambda_i} \tag{2.112}$$

avec :

$$\alpha_i = c_i + a_{i+1} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + k_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}^2} \quad (2.113)$$

$$\beta_i = b_i - \frac{k_{i-1}}{l_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{k_i}{l_i}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) \quad (2.114)$$

$$\gamma_i = \frac{k_i}{l_i l_{i+1}} \quad (2.115)$$

$$\Lambda_i = (\theta_i'' - \theta_i') - \frac{k_{i-1}}{l_i} R_{i-1}^0 + k_i\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) R_i^0 - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} R_{i+1}^0 \quad (2.116)$$

> ***Remarque :*** *En appliquant le théorème des cinq moments à chacun des appuis intermédiaires d'une poutre continue à* $(n+1)$ *appuis élastiques* $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$*, on obtient un système linéaire de* $(n-1)$ *équations à* $(n-1)$ *inconnues* $(M_1, \ldots, M_{n-1})$*, ce qui est suffisant si les appuis extrêmes sont des appuis simples* $(M_0 = M_n = 0)$.

2.5 Exercices

Exercice 4 :

Calculer le moment M_1 de l'appui A_1 et sa réaction R_1.
On prend $EI = cte$.

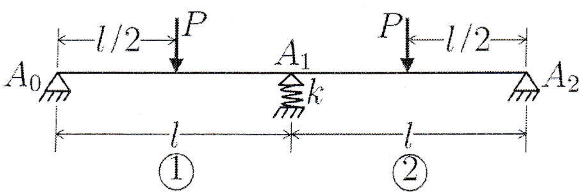

FIGURE 2.10 – Schéma de l'exercice 4

Solution 4 :

Les appuis A_0 et A_2 sont des appuis fixes. on a donc :

$$M_0 = M_2 = 0 \quad (2.117)$$

$$k_0 = k_2 = 0 \tag{2.118}$$

la rigidité en flexion est constante $EI = cte$, on a donc pour une travée i :

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \tag{2.119}$$

les rotations et la réaction du point A_1 du système isostatique associé dues aux charges extérieures sont (voir figure 2.11) :

$$\theta'_1 = \frac{Pl^2}{16EI} \qquad \theta''_1 = -\frac{Pl^2}{16EI} \tag{2.120}$$

$$R_1^0 = R'_1 + R''_1 = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P \tag{2.121}$$

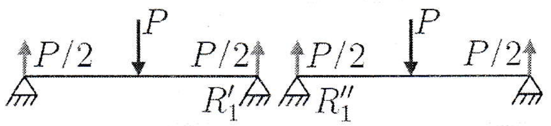

FIGURE 2.11 – Réactions d'appuis du système isostatique associé

les coefficients de l'équation des cinq moments, correspondante à l'appui A_1, sont :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= c_1 + a_2 + \frac{k_0}{l_1^2} + k_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)^2 + \frac{k_2}{l_2^2} && (2.122)\\
&= \frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} + \frac{4k}{l^2} && (2.123)\\
&= \frac{2l}{3EI} + \frac{4k}{l^2} && (2.124)\\
\Lambda_1 &= \theta''_1 - \theta'_1 - \frac{k_0}{l_1}R_0^0 + k_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)R_1^0 - \frac{k_2}{l_2}R_2^0 && (2.125)\\
&= \theta''_1 - \theta'_1 + \frac{2k}{l}R_1^0 && (2.126)\\
&= -\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{2k}{l}P && (2.127)\\
&= -\frac{Pl^2}{8EI} + \frac{2kP}{l} && (2.128)
\end{aligned}$$

l'équation des cinq moments s'écrit pour l'appui A_1 :

$$\alpha_1 M_1 = \Lambda_1 \tag{2.129}$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{2l}{3EI}+\frac{4k}{l^2}\right)M_1=-\frac{Pl^2}{8EI}+\frac{2kP}{l} \tag{2.130}$$

$$\rightarrow \quad \frac{16l^3+96kEI}{24EIl^2}M_1=\frac{-3Pl^4+48kPEIl}{24EIl^2} \tag{2.131}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{M_1=\frac{Pl(48kEI-3l^3)}{16l^3+96kEI}} \tag{2.132}$$

La réaction d'un appui i s'écrit :

$$R_i=R_i^0+\frac{M_{i+1}-M_i}{l_{i+1}}-\frac{M_i-M_{i-1}}{l_i} \tag{2.133}$$

pour l'appui A_1 on a :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1^0+\frac{M_2-M_1}{l_2}-\frac{M_1-M_0}{l_1} && (2.134)\\ &= P-\frac{1}{l}M_1-\frac{1}{l}M_1 && (2.135)\\ &= P-\frac{2}{l}M_1 && (2.136)\\ &= P-\frac{P(48kEI-3l^3)}{8l^3+48kEI} && (2.137)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{R_1=\frac{11Pl^3}{8l^3+48kEI}} \tag{2.138}$$

Exercice 5 :

Calculer le moment de l'encastrement A_1 et la réaction de l'appui A_0 du schéma de la figure (2.12). On prend $EI = cte$.

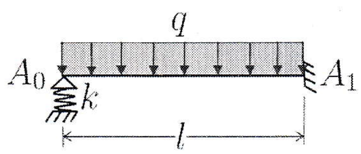

FIGURE 2.12 – Schéma de l'exercice 5

Solution 5 :

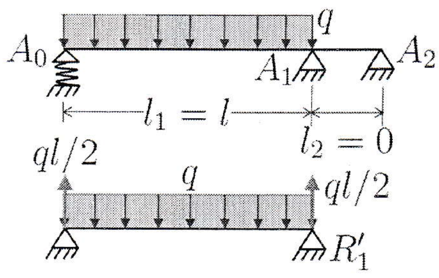

FIGURE 2.13 – Schéma de la solution de l'exercice 5

Le schéma de la figure (2.12) est statiquement équivalent au premier schéma de la figure (2.13). Travaillons donc sur le schéma équivalent (figure 2.13).

Les appuis A_1 et A_2 sont des appuis fixes, donc :

$$k_1 = k_2 = 0 \tag{2.139}$$

pour les appuis des extrémités A_0 et A_2, on a :

$$M_0 = M_2 = 0 \tag{2.140}$$

Puisque $EI = cte$, on a :

$$a_1 = 2b_1 = c_1 = \frac{l_1}{3EI} \tag{2.141}$$

Les rotations du point A_1 sont données par :

$$\theta'_1 = \frac{ql^3}{24EI} \qquad \bigcirc \qquad \theta''_1 = 0 \tag{2.142}$$

on a la réaction R_0^0 :

$$R_0^0 = R_0^{0'} + R_0^{0''} = 0 + \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} \tag{2.143}$$

L'équation des cinq moments s'écrit pour le point A_1 comme suit :

$$\alpha_1 M_1 = \Lambda_1 \tag{2.144}$$