

Chapitre 2

Calcul des poutres continues

2.1 Rappel du théorème des travaux virtuels

Énoncé du théorème :

Le travail externe T_e des actions d'un système sollicité dans les déplacements d'un système déformé est égal au travail interne T_i des contraintes internes dans les déformations internes du système déformé.

L'égalité $T_e = T_i$ est exprimée par l'équation :

$$\sum_i (Q_i v_i + H_i u_i + \Gamma_i \theta_i) + \int_0^l (q v + h u + \gamma \theta) dx = \int_0^l (N \mu + V \lambda + M \omega) dx \quad (2.1)$$

où on a :

Q_i	: force verticale ponctuelle d'abscisse x_i ($i = 0, \dots, n$);
H_i	: force horizontale ponctuelle d'abscisse x_i ($i = 0, \dots, n$);
Γ_i	: couple ponctuel d'abscisse x_i ($i = 0, \dots, n$);
$q(x)$: force verticale répartie;
$h(x)$: force horizontale répartie;
$\gamma(x)$: couple répartie;
$u(x), v(x), \theta(x)$: déplacements d'un point G d'abscisse x ;
u_i, v_i, θ_i	: déplacements d'un point G_i d'abscisse x_i ;
$\mu(x), \omega(x), \lambda(x)$: déformations d'un point G d'abscisse x ;
$N(x), V(x), M(x)$: Sollicitations ou efforts internes.

2.2 Méthode des trois moments (Méthode de CLAPEYRON)

2.2.1 Coefficients de souplesse d'une travée

On considère une poutre continue ayant plusieurs appuis pour laquelle on extrait une travée AB de longueur l , de module de YOUNG E et d'inertie de flexion I (voir figure 2.1).

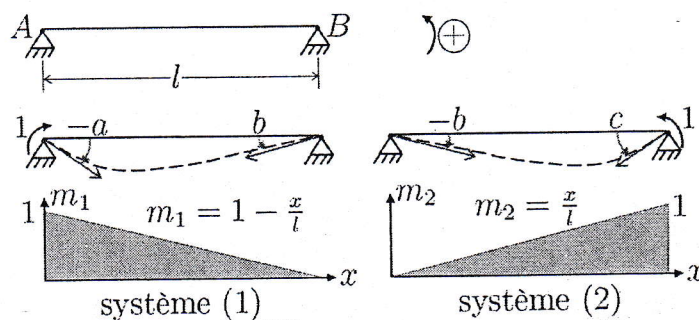


FIGURE 2.1 – Schéma des coefficients de souplesse

En appliquant un moment unitaire 1 sur l'appui A du système (1), on obtient les rotations $-a$ et b sur les appuis A et B .

En appliquant un moment unitaire 1 sur l'appui B du système (2), on obtient les rotations $-b$ et c sur les appuis A et B .

Les rotations ainsi définies a , b et c sont les **coefficients de souplesse** de la travée AB . L'application du théorème des travaux virtuels donne les expressions de a , b et c .

dem.

⇒ Considérons le système (1) comme système sollicité et le même système comme système déformé et appliquons le théorème des travaux virtuels :

$$\Gamma\theta = \int_0^l M(x)\omega(x)dx \quad (2.2)$$

$$\rightarrow (-1) \cdot (-a) = \int_0^l m_1(x)\omega_1(x)dx \quad (2.3)$$

où $m_1(x)$ est le moment interne et $\omega_1(x)$ est la déformation angulaire.

$$\rightarrow a = \int_0^l \frac{m_1(x)^2}{EI} dx \quad (2.4)$$

sachant que $\omega(x) = \frac{m(x)}{EI}$.

$$\rightarrow \boxed{a = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx} \quad (2.5)$$

⇔ Considérons le système (1) comme système sollicité et le système (2) comme système déformé et appliquons le théorème des travaux virtuels :

$$(-1) \cdot (-b) = \int_0^l m_1(x) \omega_2(x) dx \quad (2.6)$$

$$\rightarrow b = \int_0^l \frac{m_1(x) m_2(x)}{EI} dx \quad (2.7)$$

$$\rightarrow \boxed{b = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} dx} \quad (2.8)$$

⇔ Considérons le système (2) comme système sollicité et le même système comme système déformé et appliquons le théorème des travaux virtuels :

$$1 \cdot c = \int_0^l m_2(x) \omega_2(x) dx \quad (2.9)$$

$$\rightarrow c = \int_0^l \frac{m_2(x)^2}{EI} dx \quad (2.10)$$

$$\rightarrow \boxed{c = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx} \quad (2.11)$$

— *fin dem.* —

Dans le cas particulier où EI est constant sur la travée, les valeurs de a , b et c sont :

$$\boxed{a = 2b = c = \frac{l}{3EI}} \quad (2.12)$$

Les coefficients de souplesse sont des caractéristiques d'une travée.

Si la poutre est chargée à ses extrémités par les couples M_A et M_B appliqués aux points A et B , les rotations θ_A et θ_B aux points A et B sont (voir figure 2.1) :

$$\boxed{\theta_A = -aM_A - bM_B} \quad (2.13)$$

$$\boxed{\theta_B = bM_A + cM_B} \quad (2.14)$$

2.2.2 Equation des trois moments (CLAPEYRON)

La poutre continue de la figure (2.2) a n travées de longueurs $(l_1, \dots, l_i, \dots, l_n)$ et $n+1$ appuis $(A_0, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Elle est chargée par des forces verticales quelconques.

Les coefficients de souplesse de la travée i sont :

$$a_i = \int_0^{l_i} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 dx \quad (2.15)$$

$$b_i = \int_0^{l_i} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{x}{l_i} dx \quad (2.16)$$

$$c_i = \int_0^{l_i} \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 dx \quad (2.17)$$

En introduisant une articulation (coupure partielle) à chaque appui intermédiaire (A_1 à A_{n-1}), on obtient le système isostatique associé (0) chargé par les mêmes forces que le système réel (S). Il y'a donc $(n-1)$ inconnues hyperstatiques qui sont les moments $(M_1, \dots, M_i, \dots, M_{n-1})$ aux appuis intermédiaires.

On considère ensuite les $(n-1)$ systèmes (1), \dots , $(i-1)$, (i) , $(i+1)$, \dots , $(n-1)$ qui consistent à exercer sur la structure, rendue isostatique, les couples égaux à 1 aux droits des appuis intermédiaires coupés. Le système (S) est la combinaison des systèmes (0) à $(n-1)$ par l'équation :

$$(S) = (0) + \sum_{i=1}^{n-1} (i)M_i \quad (2.18)$$

Appliquons cette équation à l'angle que font les deux bords de la coupure ménagée à l'appui i :

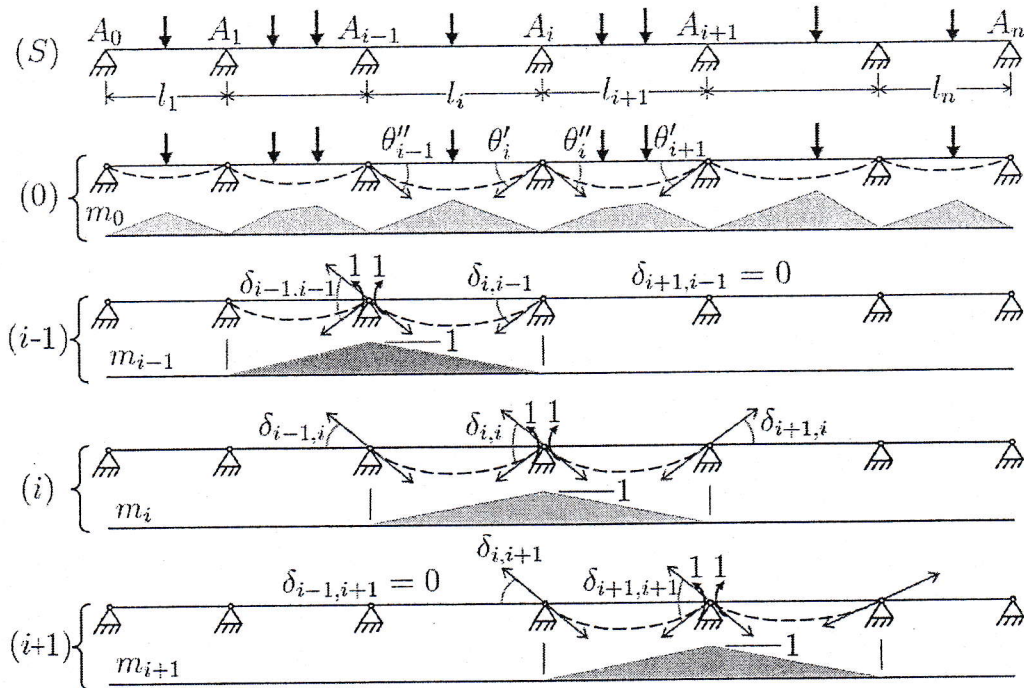


FIGURE 2.2 – Schéma de l'équation des trois moments

$$0 = \theta'_i - \theta''_i + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{ij} M_j \quad (2.19)$$

En fait, une simple observation de la figure (2.2) montre que les seules valeurs de δ_{ij} non nulles sont $\delta_{i,i-1}$, $\delta_{i,i}$ et $\delta_{i,i+1}$.

L'équation (2.19) devient alors :

$$\delta_{i,i-1} M_{i-1} + \delta_{i,i} M_i + \delta_{i,i+1} M_{i+1} = \theta''_i - \theta'_i \quad (2.20)$$

L'application du théorème des travaux virtuels donne :

$$\delta_{i,i-1} = \int_0^{l_i} \frac{m_i m_{i-1}}{EI} dx = \int_0^{l_i} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{x}{l_i} dx = b_i \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,i} &= \int_0^{l_i} \frac{m_i^2}{EI} dx + \int_0^{l_{i+1}} \frac{m_i^2}{EI} dx \\ &= \int_0^{l_i} \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 dx + \int_0^{l_{i+1}} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_{i+1}}\right)^2 dx \\ &= c_i + a_{i+1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\delta_{i,i+1} = \int_0^{l_{i+1}} \frac{m_i m_{i+1}}{EI} dx = \int_0^{l_{i+1}} \frac{1}{EI} \left(1 - \frac{x}{l_{i+1}}\right) \frac{x}{l_{i+1}} dx = b_{i+1} \quad (2.23)$$

D'où l'équation des trois moments :

$$\boxed{b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \theta_i'' - \theta_i'} \quad (2.24)$$

Cas particulier :

Si le terme EI est constant le long de la poutre, on a :

$$b_i = \frac{l_i}{6EI} \quad c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad a_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{3EI} \quad b_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{6EI} \quad (2.25)$$

d'où la nouvelle forme de l'équation des trois moments :

$$\boxed{l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\theta_i'' - \theta_i')} \quad (2.26)$$

Remarque : Soient v_{i-1} , v_i et v_{i+1} les dénivellations (ou tassements) des appuis $(i-1)$, i et $(i+1)$ par rapport à une ligne de référence. L'équation des trois moments peut être reformulée en prenant en compte ces dénivellations comme suit :

$$\boxed{l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} = 6EI \left(\theta_i'' - \theta_i' + \frac{v_{i+1} - v_i}{l_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} \right)} \quad (2.27)$$

L'expression du moment $M(x)$ dans la travée i , avec x étant l'abscisse du point par rapport à l'appui de gauche de la travée, est (voir figure 2.2) :

$$M(x) = m_{0_i}(x) + m_{i-1}(x) M_{i-1} + m_i(x) M_i \quad (2.28)$$

$$\rightarrow \boxed{M(x) = m_{0_i}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) M_{i-1} + \left(\frac{x}{l_i}\right) M_i} \quad (2.29)$$

2.3 exercices

❖ Exercice 1 :

1. Calculer les moments des appuis du schéma de la figure (2.3).
2. Tracer le diagramme des moments fléchissants (DMF).

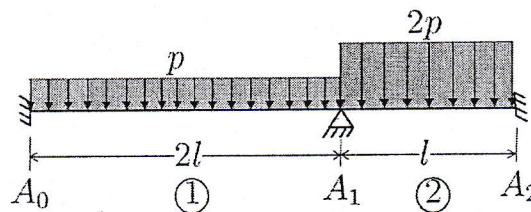


FIGURE 2.3 – Schéma de l'exercice 1

⇒ Solution 1 :

1. En reprenant les équations (2.13) et (2.14) et en considérant les rotations θ_i dues aux charges appliquées aux poutres isostatiques associées, on a :

$$\begin{cases} \theta_{i-1} = \theta''_{i-1} - a_i M_{i-1} - b_i M_i \\ \theta_i = \theta'_i + b_i M_{i-1} + c_i M_i \end{cases} \quad (2.30)$$

Les rotations d'encastrement sont :

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta''_0 - a_1 M_0 - b_1 M_1 = 0 \\ \theta_2 = \theta'_2 + b_2 M_1 + c_2 M_2 = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Pour des travées qui vérifient $EI = cte$, on a (équation 2.12) :

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad (2.32)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta''_0 - \frac{2l}{3EI} M_0 - \frac{l}{3EI} M_1 = 0 \\ \theta'_2 + \frac{l}{6EI} M_1 + \frac{l}{3EI} M_2 = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

avec $l_1 = 2l$ et $l_2 = l$.

En considérant le tableau des rotations des poutres (annexe A.2) et en prenant le cas d'une poutre bi-appuyée simplement et chargée uniformément sur toute sa longueur, on obtient :

$$\theta_0'' = -\frac{p(2l)^3}{24EI} = -\frac{8pl^3}{24EI} = -\frac{pl^3}{3EI} \quad (2.34)$$

$$\theta_2' = \frac{2pl^3}{24EI} = \frac{pl^3}{12EI} \quad (2.35)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\frac{pl^3}{3EI} - \frac{2l}{3EI}M_0 - \frac{l}{3EI}M_1 = 0 \\ \frac{pl^3}{12EI} + \frac{l}{6EI}M_1 + \frac{l}{3EI}M_2 = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = -pl^2 \\ 2M_1 + 4M_2 = -pl^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Dans la suite, on applique l'équation des trois moments pour le point A_1 :

$$l_1M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2M_2 = 6EI(\theta_1'' - \theta_1') \quad (2.38)$$

On a (tableau des rotations) :

$$\theta_1'' = -\frac{2pl^3}{24EI} = -\frac{pl^3}{12EI} \quad (2.39)$$

$$\theta_1' = \frac{p(2l)^3}{24EI} = \frac{pl^3}{3EI} \quad (2.40)$$

$$\rightarrow 2lM_0 + 2(2l + l)M_1 + lM_2 = 6EI \left(-\frac{pl^3}{12EI} - \frac{pl^3}{3EI} \right) \quad (2.41)$$

$$\rightarrow 2lM_0 + 6lM_1 + lM_2 = -\frac{1}{2}pl^3 - 2pl^3 \quad (2.42)$$

$$\rightarrow 4M_0 + 12M_1 + 2M_2 = -5pl^2 \quad (2.43)$$

On a donc 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = -pl^2 \\ 2M_1 + 4M_2 = -pl^2 \\ 4M_0 + 12M_1 + 2M_2 = -5pl^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

après résolution du système, on obtient :

$$M_0 = -\frac{13}{36}pl^2 \quad ; \quad M_1 = -\frac{5}{18}pl^2 \quad \text{et} \quad M_2 = -\frac{pl^2}{9} \quad (2.45)$$

A.N. : on prend $p = 1$ et $l = 1$

$$M_0 = -0.36 \quad ; \quad M_1 = -0.28 \quad \text{et} \quad M_2 = -0.11 \quad (2.46)$$

2. Tracé du diagramme des moments fléchissants (DMF) :

On reprend l'expression du moment dans (2.29) :

$$\begin{cases} M_1(x) = m_{0_1}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) M_0 + \frac{x}{l_1} M_1 & (\text{travée 1}) \\ M_2(x) = m_{0_2}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_2}\right) M_1 + \frac{x}{l_2} M_2 & (\text{travée 2}) \end{cases} \quad (2.47)$$

les valeurs de $m_{0_i}(x)$ sur les 2 travées sont respectivement :
 $m_{0_1}(x) = plx - \frac{p}{2}x^2$ et $m_{0_2}(x) = plx - px^2$.

$$\rightarrow \begin{cases} M_1(x) = plx - \frac{p}{2}x^2 + \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \left(-\frac{13}{36}pl^2\right) + \frac{x}{2l} \left(-\frac{5}{18}pl^2\right) \\ M_2(x) = plx - px^2 + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(-\frac{5}{18}pl^2\right) + \frac{x}{l} \left(-\frac{pl^2}{9}\right) \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M_1(x) = -\frac{p}{2}x^2 + \frac{25}{24}plx - \frac{13}{36}pl^2 \\ M_2(x) = -px^2 + \frac{7}{6}plx - \frac{5}{18}pl^2 \end{cases} \quad (2.49)$$

A.N. :

$$\begin{cases} M_1(x) = -0.5x^2 + 1.04x - 0.36 \\ M_2(x) = -x^2 + 1.17x - 0.28 \end{cases} \quad (2.50)$$

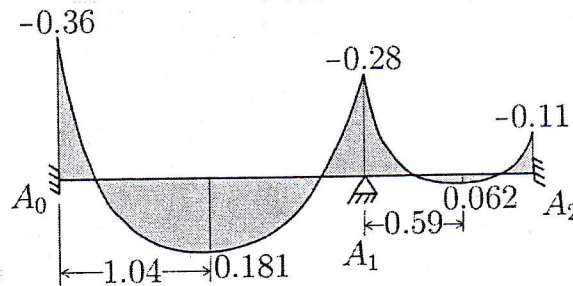


FIGURE 2.4 - DMF - exercice 1

Les maximums des moments fléchissants sur les deux travées sont :

$$M_1'(x) = 0 \rightarrow -x + 1.04 = 0 \rightarrow x = 1.04 \quad (2.51)$$

$$M_2'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1.17 = 0 \rightarrow x = \frac{1.17}{2} = 0.59 \quad (2.52)$$

on obtient donc :

$$M_{1\max} = M_1(1,04) = -0,5 \cdot 1,04^2 + 1,04 \cdot 1,04 - 0,36 = 0,181 \quad (2.53)$$

$$M_{2\max} = M_2(0,59) = -0,59^2 + 1,17 \cdot 0,59 - 0,28 = 0,062 \quad (2.54)$$

•♦ Exercice 2 :

1. Calculer les moments des appuis du schéma de la figure (2.5),
2. Tracer le diagramme des moments fléchissants (DMF),
3. Tracer le diagramme des efforts tranchants (DET).

On considère que $EI = cte$.

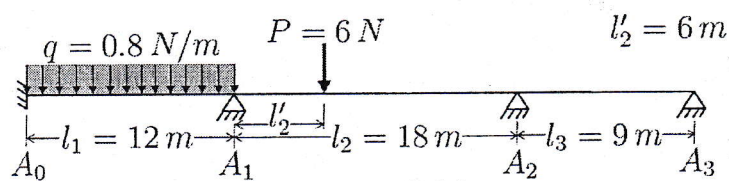


FIGURE 2.5 – Schéma de l'exercice 2

⇒ Solution 2 :

1. On a :

$$\theta_{i-1} = \theta''_{i-1} - a_i M_{i-1} - b_i M_i \quad (2.55)$$

la rotation d'encastrement est donc :

$$\theta_0 = \theta''_0 - a_1 M_0 - b_1 M_1 = 0 \quad (2.56)$$

puisque $EI = cte$, on peut écrire :

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad (2.57)$$

$$\rightarrow \theta''_0 - \frac{l_1}{3EI} M_0 - \frac{l_1}{6EI} M_1 = 0 \quad (2.58)$$

on a :

$$\theta''_0 = -\frac{ql_1^3}{24EI} \quad (2.59)$$

$$\rightarrow -\frac{ql_1^3}{24EI} - \frac{l_1}{3EI} M_0 - \frac{l_1}{6EI} M_1 = 0 \quad (2.60)$$

$$\rightarrow ql_1^2 + 8M_0 + 4M_1 = 0 \quad (2.61)$$

l'application de l'équation des trois moments aux points A_1 et A_2 nous donne :

$$\begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = 6EI(\theta''_1 - \theta'_1) \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = 6EI(\theta''_2 - \theta'_2) \end{cases} \quad (2.62)$$

les rotations aux points A_1 et A_2 sont données par :

$$\theta'_1 = \frac{ql_1^3}{24EI} \quad \& \quad \theta''_1 = -\frac{Pl'_2}{6EI l_2} (l_2 - l'_2)(2l_2 - l'_2) \quad (2.63)$$

$$\theta'_2 = \frac{Pl'_2}{6EI l_2} (l_2^2 - l'^2_2) \quad \& \quad \theta''_2 = 0 \quad (2.64)$$

$$\rightarrow \begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 = 6EI \left(\frac{-Pl'_2}{6EI l_2} (l_2 - l'_2) \right. \\ \quad \left. \cdot (2l_2 - l'_2) - \frac{ql_1^3}{24EI} \right) \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 = 6EI \left(\frac{-Pl'_2}{6EI l_2} (l_2^2 - l'^2_2) \right) \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\rightarrow \begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 = \frac{-Pl'_2}{l_2} (l_2 - l'_2) \\ \quad \cdot (2l_2 - l'_2) - \frac{ql_1^3}{4} \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 = -\frac{Pl'_2}{l_2} (l_2^2 - l'^2_2) \end{cases} \quad (2.66)$$

les équations (2.61) et (2.66) forment un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_0 + 4M_1 = -ql_1^2 \\ l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 = \frac{-Pl'_2}{l_2} (l_2 - l'_2) \\ \quad \cdot (2l_2 - l'_2) - \frac{ql_1^3}{4} \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 = -\frac{Pl'_2}{l_2} (l_2^2 - l'^2_2) \end{cases} \quad (2.67)$$

A.N. :

$$\begin{cases} 8M_0 + 4M_1 = -0,8 \cdot 12^2 \\ 12M_0 + 60M_1 + 18M_2 = -\frac{6 \cdot 6}{18} \cdot 12 \cdot 30 - \frac{0,8 \cdot 12^3}{4} \\ 18M_1 + 54M_2 = -\frac{6 \cdot 6}{18} (18^2 - 6^2) \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_0 + 4M_1 = -115,2 \\ 12M_0 + 60M_1 + 18M_2 = -1065,6 \\ 18M_1 + 54M_2 = -576 \end{cases} \quad (2.69)$$

après résolution du système, on obtient les valeurs des moments :

$$M_0 = -7,1 \text{ N.m} \quad \& \quad M_1 = -14,6 \text{ N.m} \quad \& \quad M_2 = -5,8 \text{ N.m} \quad (2.70)$$

2. Tracé du diagramme des moments fléchissants :

Les expressions des moments sur les travées sont données par :

$$\begin{cases} M_1(x) = m_{0_1}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) M_0 + \frac{x}{l_1} M_1 & \text{travée 1} \\ M_2(x) = m_{0_2}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_2}\right) M_1 + \frac{x}{l_2} M_2 & \text{travée 2} \\ M_3(x) = m_{0_3}(x) + \left(1 - \frac{x}{l_3}\right) M_2 + \frac{x}{l_3} M_3 & \text{travée 3} \end{cases} \quad (2.71)$$

les moments $m_0(x)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_{0_1}(x) = \frac{q_1}{2}x - \frac{q}{2}x^2 & \text{travée 1} \\ = 4.8x - 0.4x^2 & \\ m_{0_2}(x) = 4x & \text{travée 2 } (0 \leq x \leq 6) \\ m_{0_2}(x) = 4x - 6(x-6) & \text{travée 2 } (6 \leq x \leq 18) \\ = -2x + 36 & \\ m_{0_3}(x) = 0 & \text{travée 3} \end{array} \right. \quad (2.72)$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M_1(x) = 4.8x - 0.4x^2 + \left(1 - \frac{x}{12}\right)(-7.1) + \frac{x}{12}(-14.6) \\ M_2(x) = 4x + \left(1 - \frac{x}{18}\right)(-14.6) + \frac{x}{18}(-5.8) & (0 \leq x \leq 6) \\ M_2(x) = 36 - 2x + \left(1 - \frac{x}{18}\right)(-14.6) + \frac{x}{18}(-5.8) & (6 \leq x \leq 18) \\ M_3(x) = \left(1 - \frac{x}{9}\right)(-5.8) \end{array} \right. \quad (2.73)$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M_1(x) = -0.4x^2 + 4.175x - 7.1 \\ M_2(x) = 4.49x - 14.6 & (0 \leq x \leq 6) \\ M_2(x) = -1.51x + 21.4 & (6 \leq x \leq 18) \\ M_3(x) = 0.644x - 5.8 \end{array} \right. \quad (2.74)$$

déterminons la position du maximum pour la travée 1 :

$$M_1'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -0.8x + 4.175 = 0 \quad (2.75)$$

$$\rightarrow \quad x = 5.22 \text{ m} \quad (2.76)$$

le moment maximal sur la travée 1 est :

$$M_{1_{\max}} = M_1(5.22) \quad (2.77)$$

$$= -0,4(5,22)^2 + 4,175 \cdot 5,22 - 7,1 \quad (2.78)$$

$$= 3,79 \text{ N.m} \quad (2.79)$$

le moment au niveau du point d'application de la charge P est :

$$M_2(6) = 4,49 \cdot 6 - 14,6 = 12,34 \text{ N.m} \quad (2.80)$$

Nous avons donc tous les éléments pour tracer le DMF. Ce diagramme est présenté sur la figure (2.6) (premier schéma).

3. Nous savons que :

$$V = \frac{\partial M(x)}{\partial x} \quad (2.81)$$

on peut donc facilement trouver les formules des efforts tranchants de la structure qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_1(x) = -0.8x + 4.175 \\ V_2(x) = 4.49 & (0 \leq x \leq 6) \\ V_2(x) = -1.51 & (6 \leq x \leq 18) \\ V_3(x) = 0.644 \end{array} \right. \quad (2.82)$$

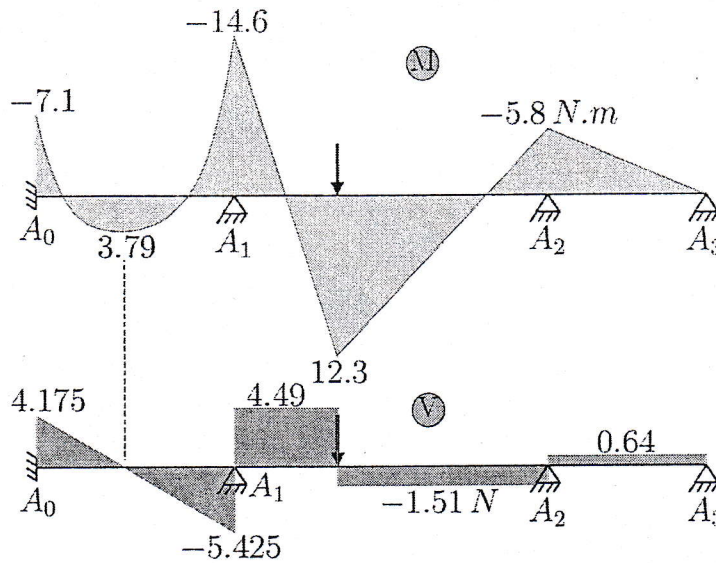


FIGURE 2.6 – DMF et DET - exercice 2

Le diagramme des efforts tranchants est présenté sur la deuxième partie de la figure (2.6).

•• Exercice 3 :

1. Calculer les moments des appuis du schéma de la figure (2.7),
2. Tracer le diagramme des moments fléchissants (DMF).

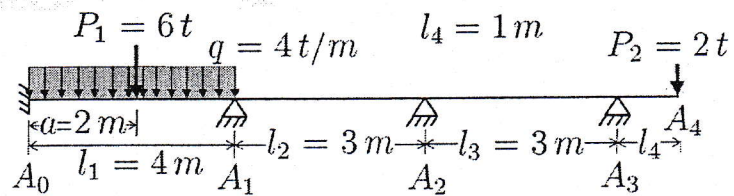


FIGURE 2.7 – Schéma de l'exercice 3

⇒ Solution 3 :

1. On a :

$$\theta_{i-1} = \theta''_{i-1} - a_i M_{i-1} - b_i M_i \quad (2.83)$$

la rotation d'encastrement est donc :

$$\theta_0 = \theta_0'' - a_1 M_0 - b_1 M_1 = 0 \quad (2.84)$$

la rigidité de flexion étant constante $EI = cte$:

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l_i}{3EI} \quad (2.85)$$

$$\rightarrow \theta_0'' - \frac{l_1}{3EI} M_0 - \frac{l_1}{6EI} M_1 = 0 \quad (2.86)$$

à partir des tableaux des rotations (Annexe A.2), on a :

$$\theta_0'' = -\frac{pl_1^3}{24EI} - \frac{P_1 a}{6EI l_1} (l_1 - a)(2l_1 - a) \quad (2.87)$$

$$(2.86) \rightarrow -\frac{pl_1^3}{24EI} - \frac{P_1 a}{6EI l_1} (l_1 - a)(2l_1 - a) - \frac{l_1}{3EI} M_0 - \frac{l_1}{6EI} M_1 = 0 \quad (2.88)$$

$$\rightarrow \frac{pl_1^3}{8} + \frac{P_1 a}{2l_1} (l_1 - a)(2l_1 - a) + l_1 M_0 + \frac{l_1}{2} M_1 = 0 \quad (2.89)$$

A.N. :

$$\frac{4.4^3}{8} + \frac{6.2}{2.4} \cdot 2.6 + 4M_0 + 2M_1 = 0 \quad (2.90)$$

$$\rightarrow 4M_0 + 2M_1 = -50 \quad (2.91)$$

On applique l'équation des trois moments aux appuis A_1 et A_2 :

$$\begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = 6EI(\theta_1'' - \theta_1') \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = 6EI(\theta_2'' - \theta_2') \end{cases} \quad (2.92)$$

à partir des tableaux des rotations on a :

$$\theta_1' = \frac{pl_1^3}{24EI} + \frac{P_1 a}{6EI l_1} (l_1^2 - a^2) \quad \nabla \quad \theta_1'' = 0 \quad (2.93)$$

$$\theta_2' = 0 \quad \nabla \quad \theta_2'' = 0 \quad (2.94)$$

$$\rightarrow \begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = 6EI \left(-\frac{pl_1^3}{24EI} - \frac{P_1 a}{6EI l_1} (l_1^2 - a^2) \right) \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

$$\rightarrow \begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = -\frac{pl_1^3}{4} - \frac{P_1 a}{l_1} (l_1^2 - a^2) \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

A.N. :

$$\rightarrow \begin{cases} 4M_0 + 14M_1 + 3M_2 = -\frac{4.4^3}{4} - \frac{6.2}{4}(4^2 - 2^2) \\ = -100 \\ 3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

(2.91) et (2.97) forment un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 4M_0 + 2M_1 = -50 \\ 4M_0 + 14M_1 + 3M_2 = -100 \\ 3M_1 + 12M_2 = 6 \end{cases} \quad (2.98)$$

sachant que $M_3 = -2 t.m$

Après résolution du système on trouve :

$$\begin{cases} M_0 = -10.21 N.m \\ M_1 = -4.58 N.m \\ M_2 = 1.64 N.m \end{cases} \quad (2.99)$$

2. Diagramme des moments fléchissants :

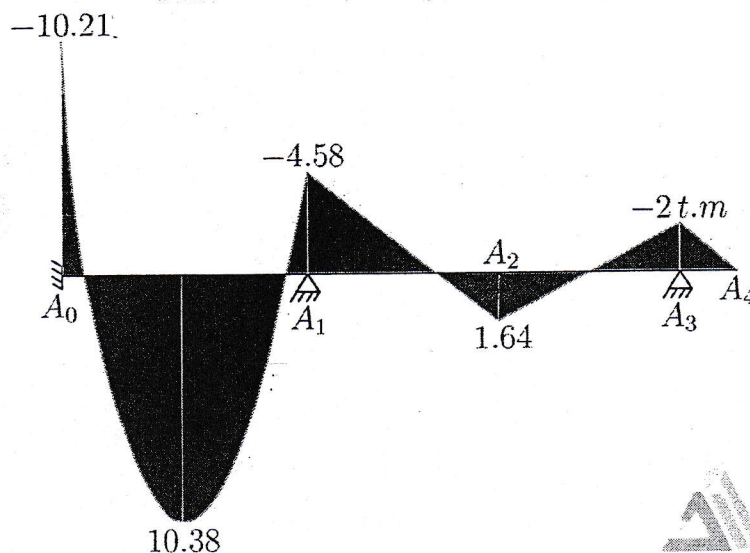
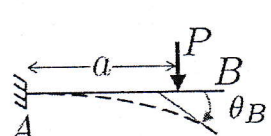
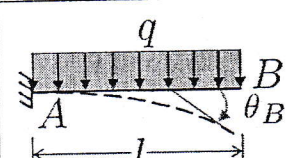
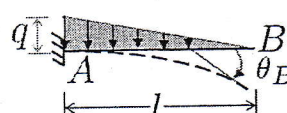
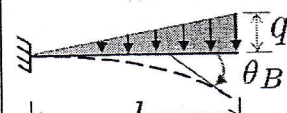
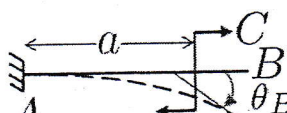
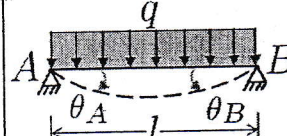
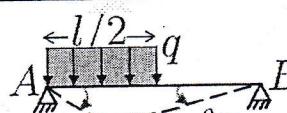
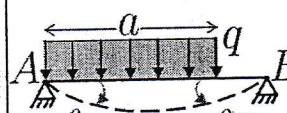
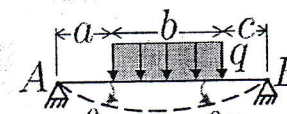

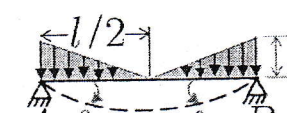


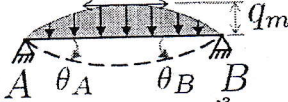
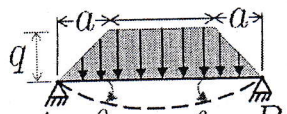

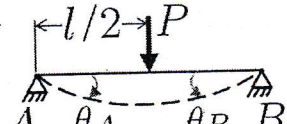
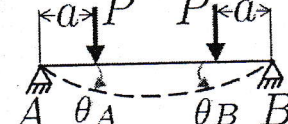
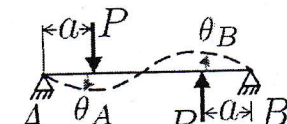
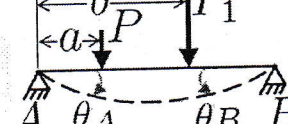
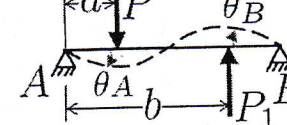
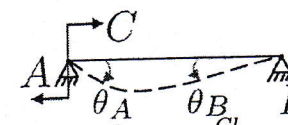
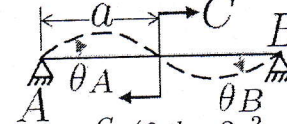
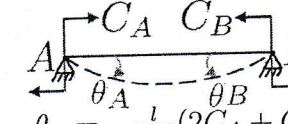
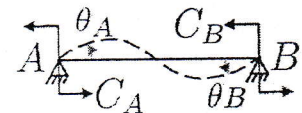
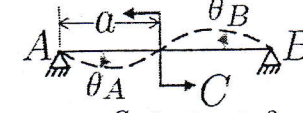
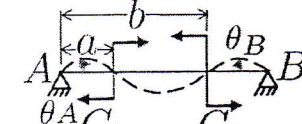
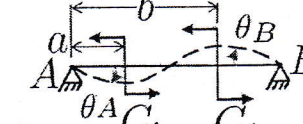
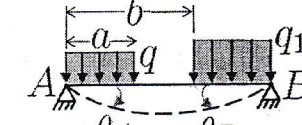
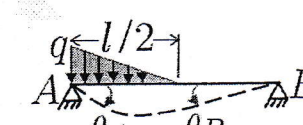
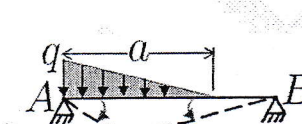
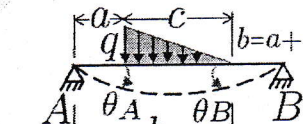
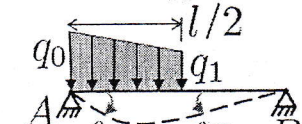
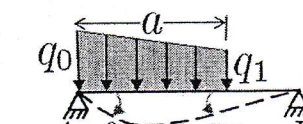
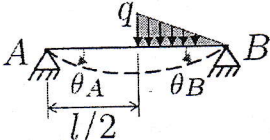
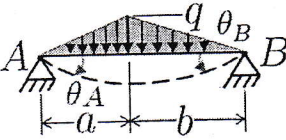
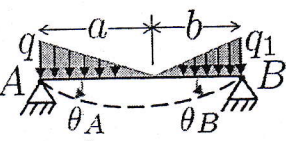
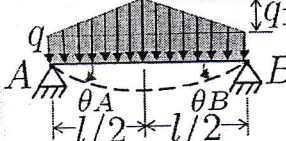
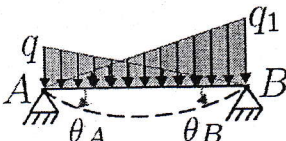
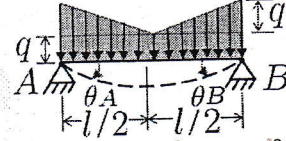
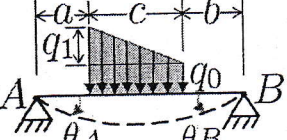


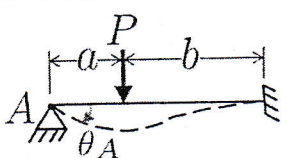
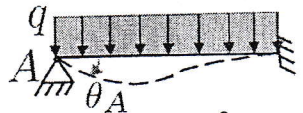
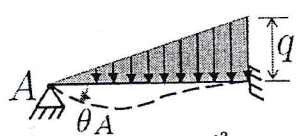
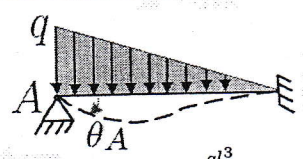
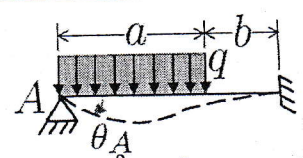
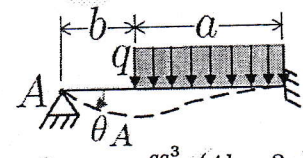
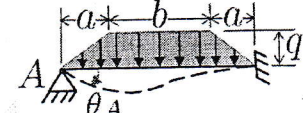
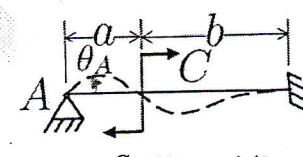
FIGURE 2.8 – DMF de l'exercice 3

Poutres isostatiques	
 $\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}$	 $\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$
 $\theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$	 $\theta_B = -\frac{ql^3}{8EI}$
 $\theta_B = -\frac{Ca}{EI}$	 $\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
 $\theta_A = -\frac{3ql^3}{128EI}$ $\theta_B = \frac{7ql^3}{384EI}$	 $\theta_A = -\frac{qa^2(2l-a)^2}{24EI}$ $\theta_B = \frac{qa^2(2l^2-a^2)}{24EI}$
 $\theta_A = -\frac{qb(2c+b)}{24EI} [2l^2 - b(2c+b) - 2c^2]$ $\theta_B = \frac{qb}{24EI} [-4lc^2 + (2c+b)^2b + (2c+b)(2c^2 + 4la)]$	 $\theta_A = -\frac{7ql^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{8ql^3}{360EI}$
 $\theta_A = -\frac{ql^3}{64EI}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{64EI}$	 $\theta_A = -\frac{5ql^3}{192EI}$ $\theta_B = \frac{5ql^3}{192EI}$

 $\theta_A = -\frac{(8q_1+7q_2)l^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{(7q_1+8q_2)l^3}{360EI}$	<p>charge parabolique</p>  $\theta_A = -\frac{q_m l^3}{30EI}$ $\theta_B = \frac{q_m l^3}{30EI}$
 $\theta_A = -\frac{q}{24EI}(l^3 - 2a^2l + a^3)$ $\theta_B = \frac{q}{24EI}(l^3 - 2a^2l + a^3)$	 $\theta_A = -\frac{Pa}{6EI}(l-a)(2l-a)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EI}(l^2 - a^2)$
 $\theta_A = -\frac{Pl^2}{16EI}$ $\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$	 $\theta_A = -\frac{Pa}{2EI}(l-a)$ $\theta_B = \frac{Pa}{2EI}(l-a)$
 $\theta_A = -\frac{Pa(l-a)(l-2a)}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{Pa(l-a)(l-2a)}{6EI}$	 $\theta_A = -\frac{Pa}{6EI}(l-a)(2l-a) - \frac{P_1 b}{6EI}(l-b)(2l-b)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EI}(l^2 - a^2) + \frac{P_1 b}{6EI}(l^2 - b^2)$
 $\theta_A = -\frac{Pa}{6EI}(l-a)(2l-a) + \frac{P_1 b}{6EI}(l-b)(2l-b)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EI}(l^2 - a^2) + \frac{P_1 b}{6EI}(l^2 - b^2)$	 $\theta_A = -\frac{Cl}{3EI}$ $\theta_B = \frac{Cl}{6EI}$
 $\theta_A = \frac{C}{6EI}(6al - 3a^2 - 2l^2)$ $\theta_B = -\frac{C}{6EI}(3a^2 - l^2)$	 $\theta_A = -\frac{l}{6EI}(2C_A + C_B)$ $\theta_B = \frac{l}{6EI}(2C_B + C_A)$

 $\theta_A = \frac{l}{6EI} (2C_A - C_B)$ $\theta_B = \frac{l}{6EI} (2C_B - C_A)$	 $\theta_A = -\frac{C}{6EI} (6al - 3a^2 - 2l^2)$ $\theta_B = \frac{C}{6EI} (3a^2 - l^2)$
 $\theta_A = \frac{C_i}{6EI} (6al - 3a^2 - 2l^2) - \frac{C_j}{6EI} (6bl - 3b^2 - 2l^2)$ $\theta_B = -\frac{C_i}{6EI} (3a^2 - l^2) + \frac{C_j}{6EI} (3b^2 - l^2)$	 $\theta_A = -\frac{C_i}{6EI} (6al - 3a^2 - 2l^2) - \frac{C_j}{6EI} (6bl - 3b^2 - 2l^2)$ $\theta_B = \frac{C_i}{6EI} (3a^2 - l^2) + \frac{C_j}{6EI} (3b^2 - l^2)$
 $\theta_A = -\frac{qa^2}{24EI} (2l^2 - a^2) - \frac{q_1 b^2}{24EI} (2l^2 - b^2)$ $\theta_B = \frac{qa^2}{24EI} (2l^2 - a^2) + \frac{q_1 b^2}{24EI} (2l - b)^2$	 $\theta_A = -\frac{53ql^3}{5760EI}$ $\theta_B = \frac{37ql^3}{5760EI}$
 $\theta_A = -\frac{qa^2}{360EI} (20l^2 + 3a^2 - 15al)$ $\theta_B = \frac{qa^2}{360EI} (10l^2 - 3a^2)$	 $\theta_A = -\frac{q}{360EI} [10cl^2(2c + 3l - 3b) - 15(l - a)^4 + \frac{3}{c} [(l - a)^5 - (l - b)^5]]$ $\theta_B = \theta_A + \frac{qc}{12EI} (2c + 3l - 3b) - \frac{q(l - a)^3}{6EI} + \frac{q}{24EIc} [(l - a)^4 - (l - b)^4]$
 $\theta_A = -\frac{l^3}{5760EI} (82q_1 + 53q_0)$ $\theta_B = \frac{l^3}{5760EI} (68q_1 + 37q_0)$	 $\theta_A = \frac{q_1 a^2}{360EI l^2} (20a^3 - a^2 l - 40l^3) + \frac{q_0 a^2}{360EI l^2} (31a^2 l + 10a^3 - 75a l^2 - 20l^3)$ $\theta_B = \frac{q_0 a^2}{360EI l^2} (31a^2 l + 10a^3 + 10l^3) + \frac{q_1 a^2}{360EI l^2} (-16a^2 l + 20a^3 + 20l^3)$

 $\theta_A = -\frac{17ql^3}{1440EI}$ $\theta_B = \frac{41ql^3}{2880EI}$	 $\theta_A = -\frac{qb^2}{90EI}(5l^2 - 3b^2) - \frac{qa^2}{360EI}(40l^2 + 12a^2 - 45al)$ $\theta_B = \frac{qa^2}{90EI}(5l^2 - 3a^2) + \frac{qb^2}{360EI}(40l^2 + 12b^2 - 45bl)$
 $\theta_A = -\frac{qa^2}{360EI}(20l^2 + 3a^2 - 15al) - \frac{q_1b^2}{360EI}(10l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = \frac{qa^2}{360EI}(10l^2 - 3a^2) + \frac{q_1b^2}{360EI}(20l^2 + 3b^2 - 15bl)$	 $\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{5q_1l^3}{192EI}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{5q_1l^3}{192EI}$
 $\theta_A = -\frac{ql^3}{45EI} - \frac{7q_1l^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{7ql^3}{360EI} + \frac{q_1l^3}{45EI}$	 $\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI} - \frac{q_1l^3}{64EI}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{q_1l^3}{64EI}$
 $\theta_A = -\frac{q_1}{360EIc} [10c^2l^2(3b + 2c) - 15c(l - a)^4 + 3(l - a)^5 - 3b^5] - \frac{q_0}{24EI} [2cl^2(2b + c) - (l - a)^4 + b^4]$ $\theta_B = \theta_A + \frac{q_1}{24EIc} [2lc^2(3b + 2c) - 4c(l - a)^3 + (l - a)^4 - b^4] + \frac{q_0}{12EI} [3cl(2b + c) - 2(l - a)^3 + 2b^3]$	

Poutres hyperstatiques	
 $\theta_A = -\frac{Pa(l-a)^2}{4EI}$ <p>si $a = b = \frac{l}{2}$: $\theta_A = -\frac{Pl^2}{32EI}$</p>	 $\theta_A = -\frac{ql^3}{48EI}$
 $\theta_A = -\frac{ql^3}{120EI}$	 $\theta_A = -\frac{ql^3}{80EI}$
 $\theta_A = -\frac{qa^2}{48EI}(6l^2 - 8al + 3a^2)$	 $\theta_A = -\frac{qa^3}{48EI}(4l - 3a)$
 $\theta_A = -\frac{q}{48EI}[l^3 - a^2(2l - a)]$	 $\theta_A = -\frac{C}{4EI}[(l-a)(l-3a)]$

