Université Internationale de Casablanca

TD N°1 : Logique combinatoire

Exercice1

Exprimez cette table de vérité sous les formes suivantes :

i) mintermes

ii) maxtermes

x	y	z	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

i) mintermes : $F(x,y,z)=\sum m(1,2,4,5,7)$

ii) maxtermes : $F(x,y,z)=\prod M(0,3,6)$

Exercice2

Utilisez la table de Karnaugh pour déterminer l'équation simplifiée du circuit :

a \ b	0	1
0	1	0
1	0	1

Équation simplifée : !a!b + ab

Avez-vous remarqué que c'est possible d'effectuer cet opération avec une seule porte ? Laquelle ? XNOR (non-ou exclusif)

Selon vous, est-ce-que les tables de Karnaugh sont utiles pour simplifier des fonctions à deux variables ? Non, c'est assez facile à simplifier directement de la table de vérité.

Exercice3

Utilisez les tables de Karnaugh pour déterminer l'équation simplifiée de chaque circuit :

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

f = !a + bc

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1

f = !c + !ab

Dans les deux cas, le circuit de coût minimum est réalisé en encerclant des '1'. Est-ce évident pourquoi ?

Ça prend deux regroupements pour encercler soit les '1' ou les '0'. Mais pour les '1', c'est possible de faire un regroupement de 4 et un regroupement de 2. Pour les '0' ce n'est que des regroupements de 2. On sait qu'un regroupement plus large porte un moindre coût parce-que ça implique moins de termes. Alors c'est moins coûteux d'encercler les '1'.

Exercice4

Utilisez les tables de Karnaugh pour déterminer l'équation le plus simplifié. Dans la table de gauche, encerclez les '1', et dans celle de droite, encerclez les '0'. Calculez le coût de chaque circuit. Lequel est le moins coûteux ?

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

f = !b!d + abd

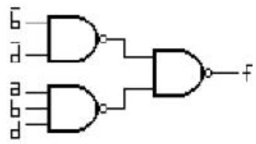
Coût = $7 + 3 \cdot 2 = 13$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

f = b!d + !bd + (!ab ou !ad)

Coût = $9 + 4 \cdot 2 = 17$

Maintenant dessinez le circuit de moindre coût en n'utilisant soit que des portes NON-ET ou des portes NON-OU. Calculez le coût de ce circuit.



Coût = $7 + 3 \cdot 1 = 10$ (7 entrées aux portes, 3 portes au coût de 1)

Exercice5

Utilisez la table de Karnaugh pour simplifier cette fonction à cinq variables.

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	1
11	0	0	1	1
10	0	1	1	0

e = 0

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

e = 1

f = !a!b!e + !bd!e + !b!ce + abc + bc!d (plusieurs réponses valides)

Exercice6

Obtenez une expression simplifiée de cette table de vérité en utilisant une table de Karnaugh à variable inscrite. Trouvez la meilleure solution conjonctive et la meilleure solution disjonctive et comparez leurs coûts.

a) Variable **D** inscrite

A	B	C	D	S	
0	0	0	0	0	D
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	D
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	D
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	D'
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	

A \ BC	00	01	11	10
0	D	D	1	1
1	0	D	1	D'

Forme disjonctive

A \ BC	00	01	11	10
0	D	D	D+D'	D+D'
1	0	D	D+D'	D'

F(A,B,C,D) = A'D + CD + BD'

Coût = 3x(2+2) + 2+3 = 17

Et si l'on utilise la logique négative* :

Coût = 3x(2+1) + 1+3 = 13

Forme conjonctive

A \ BC	00	01	11	10
0	D	D	1	1
1	D'D	D	1	D'

F(A,B,C,D) = (B+D)(A'+C+D')

Coût = (2+2)+(3+2)+(2+2) =13

Et si l'on utilise la logique négative* :

Coût = (2+1)+(3+1)+(2+1) =10

(*) Ce n'est pas obligatoire de faire cela, mais c'est bien de réaliser que si on utilise la logique négative pour réaliser un circuit, il est (souvent) possible de réduire le coût final. Pour l'exemple précédent, l'utilisation de la logique négative voudrait dire implémenter le circuit de la façon suivante pour la forme disjonctive (on applique DeMorgan): F(A,B,C,D) = ((A'D)'(CD)'(BD'))'

b) Variable **B** inscrite : il faut commencer par réorganiser la table :

A	C	D	B	S	
0	0	0	0	0	B
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	B
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	B
1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	B'
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	

A \ CD	00	01	11	10
0	B	B	1	1
1	0	0	1	B'

Forme disjonctive

A \ CD	00	01	11	10
0	B	B	B+B'	B+B'
1	0	0	B+B'	B'

F(A,B,C,D) = A'B + CD + CB'

Coût = 3x(2+2) + 2+3 = 17

Et si l'on utilise la logique négative* :

Coût = 3x(2+1) + 1+3 = 13

Forme conjonctive

A \ CD	00	01	11	10
0	B	B	1	1
1	B'B	BB'	1	B'

F(A,B,C,D) = (B+C)(A'+C+B')(A'+C)

Coût = 2x(2+2)+(3+2)+(2+3) =18

Et si l'on utilise la logique négative* :

Coût = 2x(2+1)+(3+1)+(2+1) =14

c)

Variables **D et E** inscrites

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*S*	
0	0	0	0	0	0	DE'
0	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	1	
0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	0	0	D+E
0	0	1	0	1	1	
0	0	1	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	E'
0	1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*S*	
1	0	0	0	0	0	D
1	0	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	0	0	D+E
1	0	1	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	0	D
1	1	0	0	1	0	
1	1	0	1	0	1	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	0	0	1	D+E'
1	1	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	

A \ BC	00	01	11	10
0	DE'	D+E	1	E'
1	D	D+E	D+E'	D

Forme disjonctive

A \ BC	00	01	11	10
0	DE'	D+E	1	E'
1	D	D+E	D+E'	D

F(A,B,C,D) = AD + B'CE + CD + A'BC + ABE' + BCE' + C'DE'(1)

Coût = 4x(3+2) + 2x(2+2) + 6+2 = 36

Et si l'on utilise la logique négative* :
Coût = 4x(3+1) + 2x(2+1) + 6+1 = 29

Forme conjonctive

A \ BC	00	01	11	10
0	DE'	D+E	1	E'
1	D	D+E	D+E'	D

F(A,B,C,D) = (C'+D+E)(2)(A+C+E')(B+C+D)(A'+B'+D+E')(3)
(A'+C+D)

Coût = 1x(4+2)+4x(3+2)+(5+2) =33

Et si l'on utilise la logique négative* :
Coût = 1x(4+1)+4x(3+1)+(5+1) =27

(1) Le but de ce groupe est de venir chercher le DE' dans la case ABC = 000. On peut faire un groupe de 4 puisque D = D(E+E') = DE + DE' et que E' = E'(D+D') = E'D + E'D'.
(2) Le but de ce groupe est de venir chercher les D+E dans les cases ABC = 001 et 101. On peut faire un groupe de 4 puisque D = D(D+E) et que DE'(D+E) = DE'+DE'E = DE'.
(3) Le but de ce groupe est de venir chercher le D+E' dans la case ABC = 111. On peut faire un groupe de 2 puisque D = D(D+E')