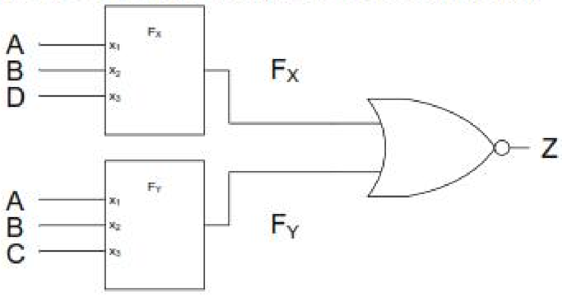
Correction TD.1

Exercice1

L'implantation d'une fonction logique **Z** relativement complexe repose sur un NOR de deux autres fonctions F_X et F_Y comme indiqué sur le schéma suivant :



1) La fonction F_X est spécifiée par sa table de vérité :

A	B	D	Fx
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Trouver l'expression disjonctive simplifiée de F_X au moyen de la table de Karnaugh suivante. Évaluez le coût minimal de la fonction.

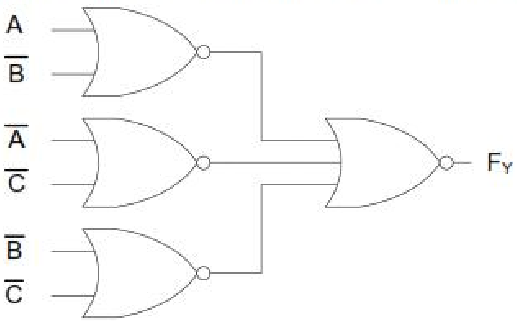
$F_X = B\overline{D} + \overline{A}D + A\overline{B}$

AB/CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	1	1	1

F_X

Coût	(3+1)+3(2+1)=13

2) La fonction F_Y a déjà été réalisée par un apprenti. Elle fonctionne bien mais le patron prétend que le circuit coûte trop cher pour rien. Faites l'analyse de cette fonction et proposez votre meilleur circuit en comparant les versions disjonctive et conjonctive.



a) Faites l'analyse de la fonction

A	B	C	Fx
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

AB/CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

b) Déterminez sa forme disjonctive optimale au moyen de la table de Karnaugh suivante:

$F_Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C}$

AB/CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

F_Y

Coût	3(2+1) = 9

c) Déterminez sa forme conjonctive optimale au moyen de la table de Karnaugh suivante:

$F_Y = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$

AB/CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

F_Y

Coût	3(2+1)=9

d) Votre patron vous demande de porter un regard critique sur la première implantation de F_Y. Qu'allez-vous lui dire ?

On relèvera que les expressions optimales disjonctive et conjonctive ont le même coup. Le choix de la première implémentation pour une expression conjonctive est pas a priori justifié, mais il n'est pas à être désavoué non plus. Néanmoins, la première implémentation utilisait une approche d'implémentation optimisée au moyen de portes NOR, mais elle n'utilisait pas une écriture totalement optimisée de la fonction F_Y, puisque le terme $\overline{B} + \overline{C}$ est redondant.

3) Sachant que finalement, seule la valeur de Z importe, proposez votre meilleur circuit pour implanter Z(A, B, C, D)

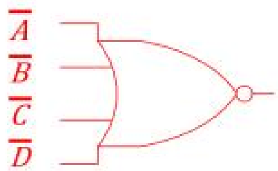
Z = $ABCD$

AB/CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Z

Coût	4+1=5

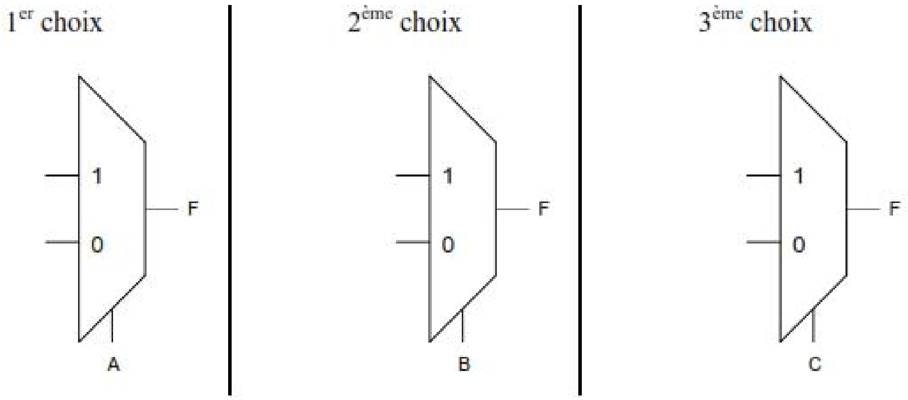
Dessinez le circuit optimisé (vous avez accès aux variables et leurs inverses).



Exercice2

a) Vous devez réaliser un circuit qui implante la fonction F décrite par sa table de vérité ci-dessous au moyen d'un multiplexeur et d'une porte OR à deux entrées. Essayez de réduire le circuit sur chacune des variables A, B et C pour voir si il est possible d'implanter la fonction. Il se peut que vous ne trouviez pas de solution. Justifier votre réponse.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



Décomposons l'expression selon A:

$A = 0 \rightarrow F = B + C$

$A = 1 \rightarrow F = \overline{B \cdot C}$

Ainsi, on trouvera $F = \overline{A}(B + C) + A \cdot \overline{B \cdot C}$

Par symétrie, on trouvera également:

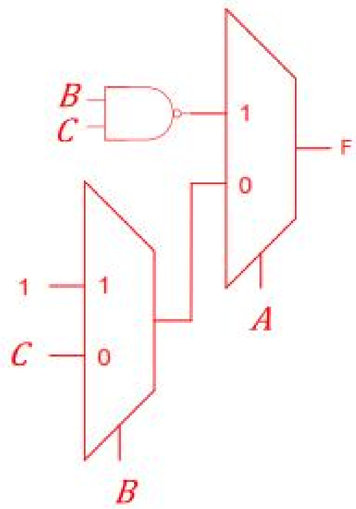
$F = \overline{B}(A + C) + B \cdot \overline{A \cdot C}$ et $F = \overline{C}(A + B) + C \cdot \overline{A \cdot B}$

Il en ressort qu'aucune des options n'est réalisable avec une seule porte OR.

b) Si aucun choix ne fonctionne, proposez une solution qui utilise deux multiplexeurs et un NAND à deux entrées ? Dessinez le schéma de la solution retenue

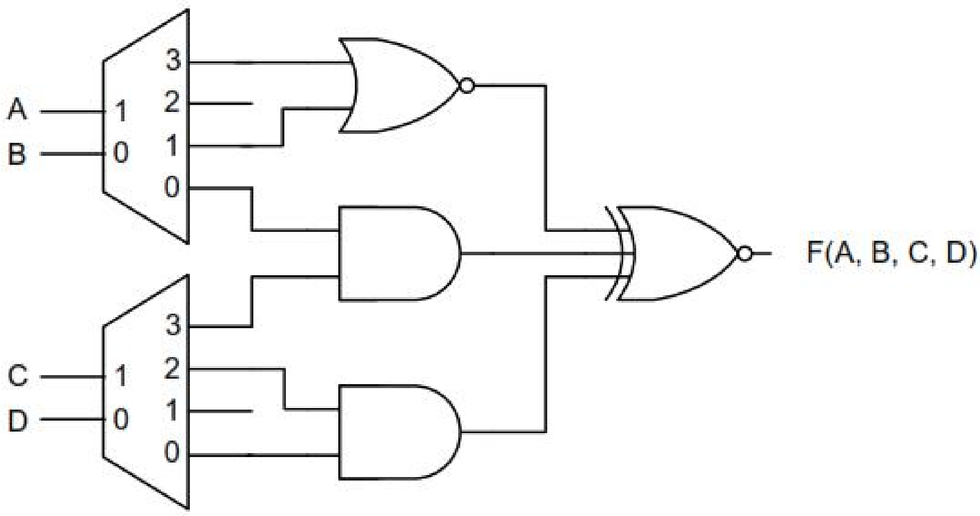
Sachant que $F = \overline{A}(B + C) + A \cdot \overline{B \cdot C}$
On trouvera : $F = \overline{A}(\overline{B} \cdot C + B \cdot 1) + A \cdot \overline{B \cdot C}$

Ce qui aboutit au circuit suivant:

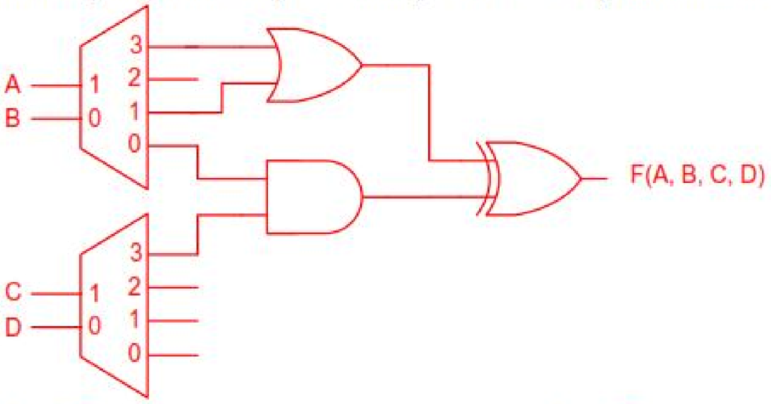


Exercice3

Aidez-vous des tables de Karnaugh de la page suivante pour trouver l'expression conjonctive optimisée de la fonction F(A, B, C, D) :



Commençons par relever que le circuit précédent est l'équivalent du suivant:



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$\oplus$

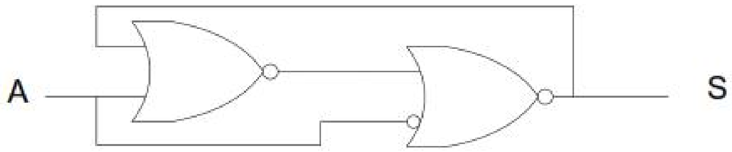
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0_1

Ce qui donne $F = (\overline{A} + B)(B + C)(B + D)$

Exercice4

La fonction S n'est pas une fonction combinatoire. Mais alors, quel est son comportement en fonction de A ?



Soyez précis et complet dans votre réponse !

Si S=0
Alors si A=0, S restera à 0
Et si A=1, S passera à 1

Si S=1
Alors si A=0, S passera à 0
Et si A=1, S restera à 1

En gros, il s'avère que S imite A avec un léger délai.

Exercice5

Vous devez réaliser un jeu de roche-papier-ciseau numérique. Il y a donc deux joueurs A et B qui disposent chacun d'un interrupteur à trois positions qui encode le choix sur deux bits, selon l'encodage suivant, pour chacun des joueurs (A_1A_0) et (B_1B_0)

00	:	Roche
01	:	Papier
10	:	Ciseaux

Le système a deux lumières (sorties) S_A et S_B. La roche l'emporte sur le ciseau. Le ciseau l'emporte sur le papier et le papier l'emporte sur la roche. Donc, par exemple, si A_1A_0 = 01 (Papier) et B_1B_0 = 10 (Ciseau), c'est le joueur B qui l'emporte et la lampe B s'allume ($S_A = 0$ et $S_B = 1$).

En cas d'égalité, aucune lumière ne s'allume.

Proposez votre meilleur circuit (le moins couteux) pour réaliser la fonction demandée. Vous devez remplir la table de vérité ci-dessous.

A_1	A_0	B_1	B_0	S_A	S_B
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	-	-
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	-	-
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	-	-
1	1	0	0	-	-
1	1	0	1	-	-
1	1	1	0	-	-
1	1	1	1	-	-

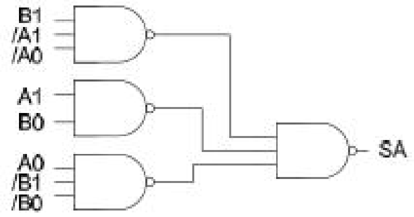
A10 \ B10	00	01	11	10
00	0	0	-	1
01	1	0	-	0
11	-	-	-	-
10	0	1	-	0

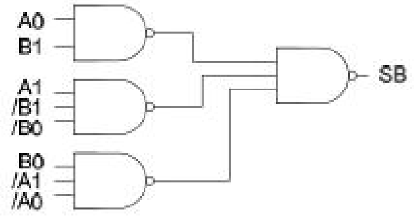
A10 \ B10	00	01	11	10
00	0	1	-	0
01	0	0	-	1
11	-	-	-	-
10	1	0	-	0

Dessinez votre meilleur circuit ci-dessous :

SA = B1/A1/A0 + A0/B1/B0 +A1B0

SB = B0/A1/A0 + A1/B1/B0 +A0B1





Exercice6

a)

AB		B = 0	B = 1
A	0	-	C
	1	1 ou C	$\overline{C}$

b)

i)

ABC		00	01	11	10
A	0	-	D	D ou 0	$\overline{D}$
	1	$(\overline{D}+D)$ 1	1 ou D	D	$(D+\overline{D})$ 1

$F(A,B,C,D) = \overline{C}\,\overline{D}+A\overline{C}+CD$

Note : D'autres bonnes solutions sont :

$F(A,B,C,D) = \overline{C}\,\overline{D}+AD+CD$ et $F(A,B,C,D) = \overline{C}\,\overline{D}+AD+BD$

ii)

ABC		00	01	11	10
A	0	-	D	D ou 0 $(D\,\overline{D})$	$\overline{D}$
	1	1	1 ou D	D	1

$F(A,B,C,D) = (\overline{C}+D)(A+\overline{B}+\overline{D})$

Note : Une autre bonne solution est :

$F(A,B,C,D) = (\overline{C}+D)(A+C+\overline{D})$

Exercice7

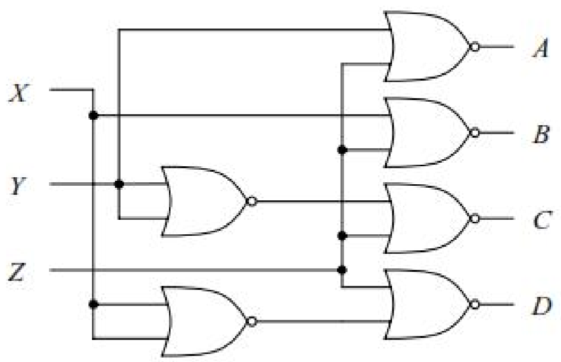
Table de vérité :

X	Y	Z	A	B	C	D
0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
×	×	1	0	0	0	0

On observe les relations suivantes :

$$A = \overline{Y}\,\overline{Z} = \overline{\left(\overline{\overline{Y}\,\overline{Z}}\right)} = \overline{Y+Z} \qquad B = \overline{X}\,\overline{Z} = \overline{\left(\overline{\overline{X}\,\overline{Z}}\right)} = \overline{X+Z}$$

$$C = Y\,\overline{Z} = \overline{\left(\overline{Y\,\overline{Z}}\right)} = \overline{\overline{Y}+Z} \qquad D = X\,\overline{Z} = \overline{\left(\overline{X\,\overline{Z}}\right)} = \overline{\overline{X}+Z}$$



Exercice8

a) $S = AB + A\overline{C} + \overline{A}D$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

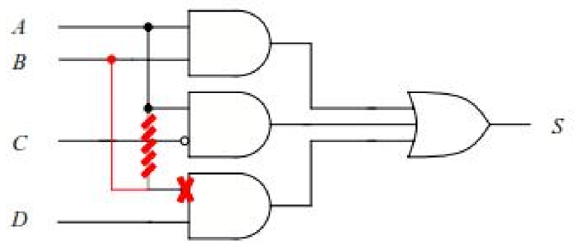
Étant donné que la fonction est réalisée selon une formulation disjonctive, il n'y a aucun aléa statique de « 0 ». D'après la table de Karnaugh, il y a trois aléas statiques de « 1 » :

$$ABCD = \begin{cases} 1101 \leftrightarrow 0101 \\ 1111 \leftrightarrow 0111 \\ 1001 \leftrightarrow 0001 \end{cases}$$

b)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	-	-	-
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

$S = AB + A\overline{C} + BD$



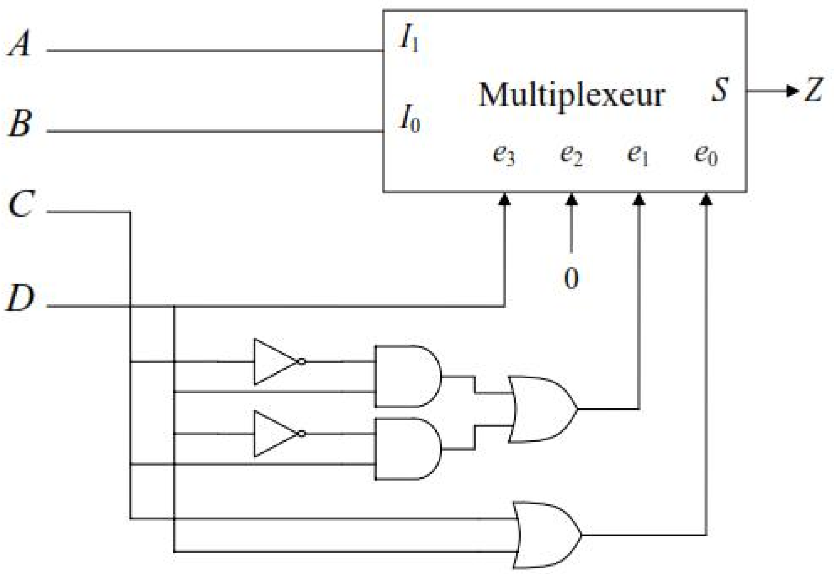
À noter que la forme conjonctive est plus simple : $S = (A + D)(B + \overline{C})$

Exercice9

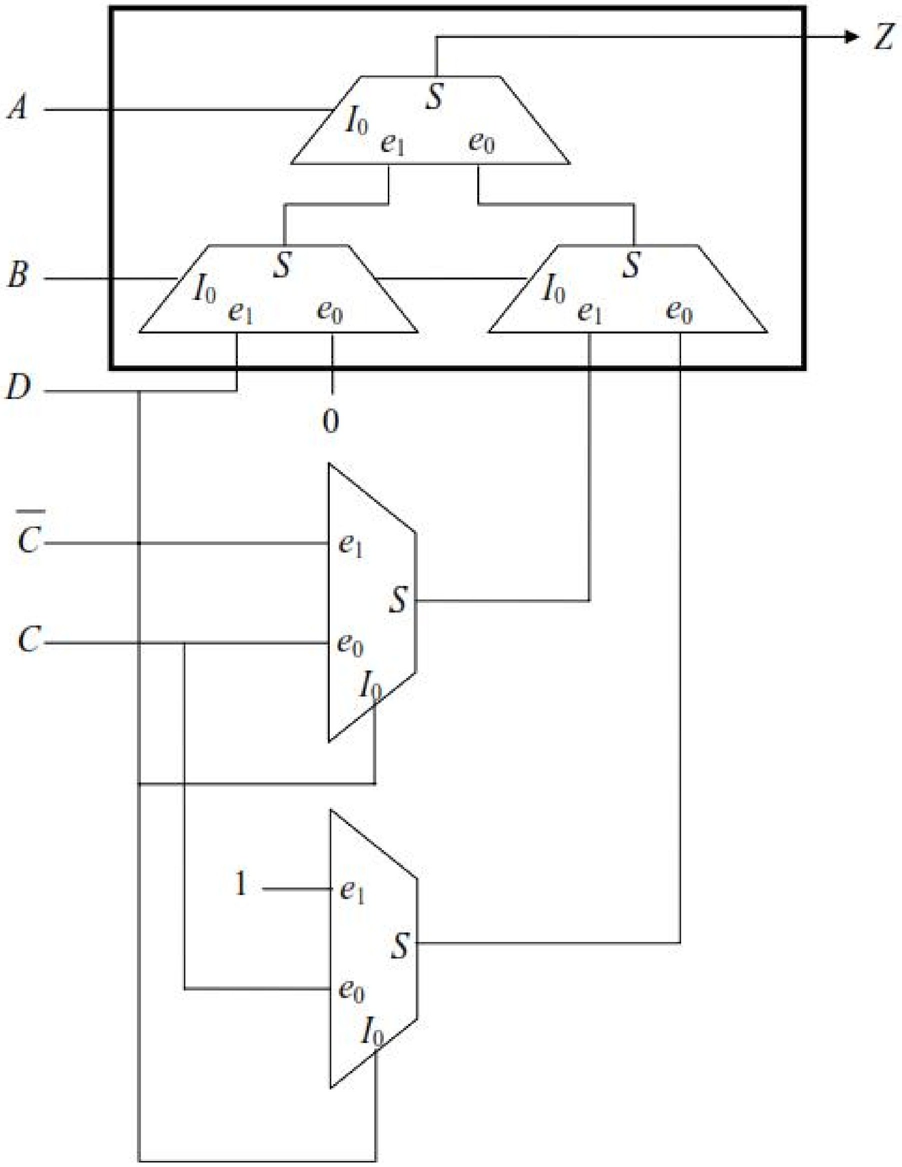
a)

$AB \backslash CD$	00	01	11	10	
00	0	1	1	1	$\Leftrightarrow C+D$
01	0	1	0	1	$\Leftrightarrow \overline{C}D+C\overline{D}$
11	0	1	1	0	$\Leftrightarrow D$
10	0	0	0	0	$\Leftrightarrow 0$

$A \backslash B$	0	1
0	$C+D$	$\overline{C}D+$ $C\overline{D}$
1	0	D



b)



Z
S
A
I_0
e_1
e_0
B
S
I_0
e_1
e_0
S
I_0
e_1
e_0
D
0
$\overline{C}$
e_1
S
C
e_0
I_0
1
e_1
S
e_0
I_0

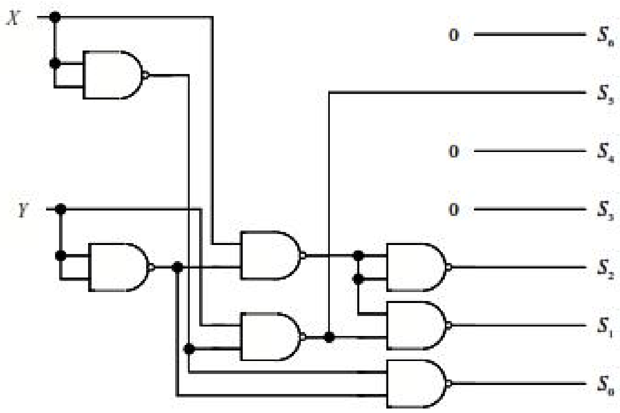
Exercice10

Table de vérité :

X	Y	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

$S_0 = X + Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$ $\qquad S_1 = \overline{X}Y + X\overline{Y} = \overline{\left(\overline{\overline{X}Y}\right)\left(\overline{X\overline{Y}}\right)}$ $\qquad S_2 = X\overline{Y} = \overline{\left(\overline{X\overline{Y}}\right)}$

$S_3 = 0 \qquad S_4 = 0 \qquad S_5 = \overline{\overline{X}Y} \qquad S_6 = 0$



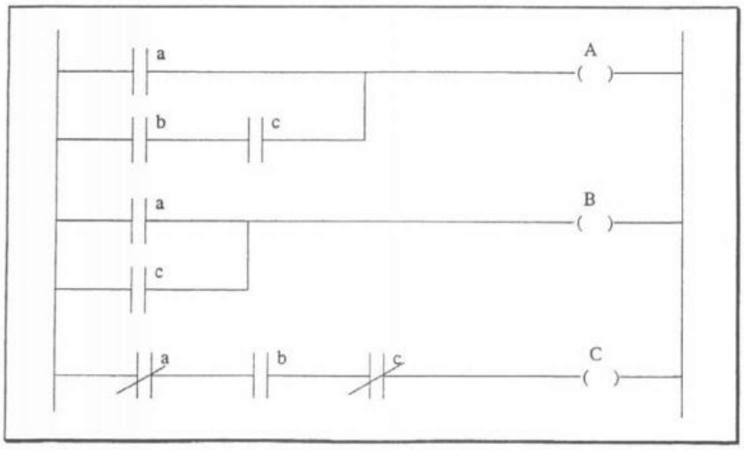
Exercice11

a	b	c	A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a	b	c	B
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a	b	c	C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$A = a + b.c$ $B = a + c$ $C = \overline{a}.b.\overline{c}$



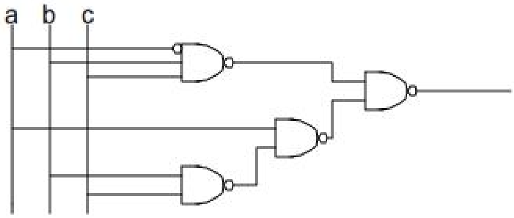
Exercice 12

2-A)

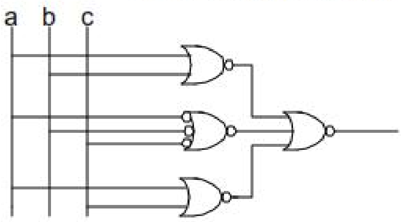
c \ ba	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1

$E = a \oplus bc$

NON-ET) $E = \overline{\overline{\overline{a}bc}\ \ \overline{a\overline{bc}}}$



NON-OU) $E = \overline{\overline{a+b}+\overline{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}+\overline{a+c}}$

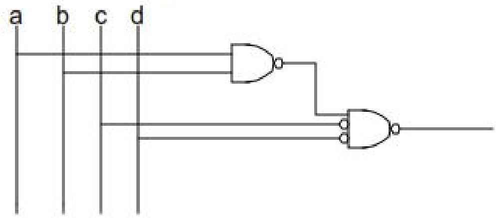


2-B)

dc \ ba	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$E = ab + c + d$$

NON-ET) $E = \overline{\overline{ab}\;\bar{c}\;\bar{d}}$



NON-OU) $E = \overline{\overline{a+c+d}+\overline{b+c+d}}$