Série n°1

Domaine de définition, limite et continuité

Exercice 1. *Déterminer et présenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f_1(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-2x}} \quad ; \quad f_2(x,y)=\frac{1}{2x+y-1} \quad ; \quad f_3(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$$

$$f_4(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x-y+2}} \quad ; \quad f_5(x,y)=\ln(x^2+y^2-2y+1) \quad ; \quad f_6(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+2}.$$

Exercice 2. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f_1(x,y,z)=\ln(x+2y+z-1) \quad ; \quad f_2(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad f_3(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z}$$

Exercice 3. *Étudier l'existence des limites suivantes :*

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y} \qquad b)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} \qquad c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

$$d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y}{x^2-y^2} \qquad e)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}.$$

Exercice 4. *Étudier la continuité des fonctions suivantes :*

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ -1 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad f_4(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2-2x+1} & si\ (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

$$f_5(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3-z^3}{2x^2+3y^2+z^2} & si\ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 1 & si\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases} \qquad f_6(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{|x||y||z|}{x^2+y^2} & si\ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 1/2 & si\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

Exercice 5. *On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x)\ ;\ x\in\mathbb{R}\}$ par*

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\ .$$

Prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?