Université Internationale de Casablanca

CLASSES PRÉPARATOIRES INTÉGRÉES 2ème année

S4 - Analyse 4, TD : 1-2-3-4
Fonctions de plusieurs variables

1 Continuité

Exercice 1.1. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f_1(x,y)=\frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}\ ,\ f_2(x,y)=\frac{ln(y)}{\sqrt{x-y}}\ ,\ f_3(x,y)=ln(x+y)\ ,\ f_4(x,y,z)=\frac{ln(x^2+1)}{yz}$$

Exercice 1.2. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.*

$$f_1(x,y)=\frac{xy}{x+y}\ ,\ f_2(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\ ,\ f_3(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ ,\ f_4(x,y)=\frac{1+x^2y^2}{y}\sin y\ ,\ f_5(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$f_6(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\ ,\ f_7(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}\ ,\ f_8(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$$

$$f_9(x,y)=\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}\ ,\ f_{10}(x,y)=\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$$

Calculer la limite (si elle existe) quand (x,y) tend vers $(0,0)$ ou démontrer que la limite n'existe pas.

Exercice 1.3. *Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante*

$$f(x,y,z)=\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

1) Calculer la limite (si elle existe) de f quand (x,y,z) tend vers $(0,0,0)$
2) Calculer la limite (si elle existe) de f quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$:

Exercice 1.4. *Calculer les limites suivantes si elles existent :*

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x-y}\ ;\quad 2)\ \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}\ ;\quad 3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$$

$$4)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2}\ ;\quad 5)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x^2-\sin y^2}{x^2+y^2}$$

2 Dérivées partielles

Exercice 2.1. *Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=(x^2+y^2)^x$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=1$.*

1. *f est-elle continue ?*
2. *Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque différent de $(0,0)$.*
3. *La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en $(0,0)$?*

Exercice 2.2. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes*

1. $f(x, y) = x^y$ *(avec* $x > 0$*)*
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = x \sin(x + y)$

Exercice 2.3. *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ , & si\ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que* f *admet une dérivée au point* $(0, 0)$ *suivant tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
2. f *est-elle continue en* $(0, 0)$?

Exercice 2.4. *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\ , & sinon \end{cases} \tag{2}$$

1. *Montrer que* f *admet une dérivée au point* $(0, 0)$ *suivant tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
2. f *est-elle continue en* $(0, 0)$?

Exercice 2.5. *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\ , & sinon \end{cases} \tag{3}$$

1. *Justifier que* f *est continue en* $(0, 0)$
2. *Étudier les dérivées partielles de* f *en* $(0, 0)$.

Exercice 2.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = \dfrac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2}$ *pour* $(x, y) \neq (0, 0)$ *et* $f(0, 0) = 0$.

1. *La fonction* f *est-elle continue en* $(0, 0)$?
2. *La fonction admet-elle des dérivées partielles par rapport à* x *et à* y *en* $(0, 0)$?
3. *La fonction* f *est-elle différentiable en* $(0, 0)$?
4. *Déterminer les dérivées partielles de* f *en un point* $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$
5. *Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de* f *au point* $(1, 1, 2)$.
6. *Soit* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $F(x, y) = (f(x, y), f(y, x))$. *Déterminer la matrice jacobienne de* F *au point* $(1, 1)$. *La fonction* F *admet-elle une réciproque au voisinage de* $(2, 2)$?

3 Points critiques et extremums

Exercice 3.1. *Soit f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{4}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que f possède en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions*
3. *Montrer que f n'est pas dérivable en $(0,0)$.*

Exercice 3.2. *Soit f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+3xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{5}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées suivant toute direction en $(0,0)$*
3. *Calculer $\nabla f(0,0)$*
4. *f est-elle différentiable en $(0,0)$?*

Exercice 3.3. *Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant la direction $(1,-2)$ au point $(2,1)$.*

Exercice 3.4. *Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = ye^x$ au point $(0,3)$ suivant les direction*

1. $\theta = \frac{\pi}{6}$
2. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 3.5. *Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes et donner leur nature :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(ax,y) = y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$
8. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
9. $f(x,y) = y(x^2 + (\log y)^2)$ *(donner le domaine de définition)*
10. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 3.6. *(Le contre exemple de Peano) Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{6}$$

1. *Montrer que f est continue en $(0,0)$*
2. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$*
4. *Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$*
5. *Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$*

Exercice 3.7. *Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$*

1. *Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.*
2. *Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.*
3. *Déterminer les points critiques de f.*
4. *Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.*
5. *En déduire le minimum et le maximum de f sur D.*

Exercice 3.8. *Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.*

1. *$f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$*
2. *$f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1] \times [0,1]$*
3. *$f(x,y) = \sin x \ \sin y \ \sin(x+y)$ et $K = [0, \frac{\pi}{2}]^2$*

Exercice 3.9. *Extrema On pose $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.*

1. *Déterminer les points critiques de f, de g.*
2. *En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.*

Exercice 3.10. *Extrema locaux Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :*

1. *$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$*
2. *$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$*
3. *$f(x,y) = x^3 + y^3$*
4. *$f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$*

Exercice 3.11. *Extrema locaux Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :*

1. *$f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$;*
2. *$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;*
3. *$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.*

Exercice 3.12. *Extrema locaux et globaux Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :*

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ *sur* $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Exercice 3.13. *Beaucoup d'extrema Étudier les extrema locaux et globaux dans* $\mathbb{R}^2$ *de la fonction* $f(x,y) = x^2y^2(1+x+2y)$.

Exercice 3.14. *Extrema On pose* $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ *et* $g(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. *Déterminer les points critiques de* f*, de* g.
2. *En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de* f.
3. *En étudiant les valeurs de* g *sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de* g.

Exercice 3.15. *Extrema locaux et globaux Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :*

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ *sur* $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Exercice 3.16. *** ***Point de Torricelli-Fermat***
Soit A, B, C *trois points non alignés d'un espace euclidien. On pose, pour tout point* M, $f(M) = AM + BM + CM$.

1. *Étudier la différentiabilité de* $g(M) = AM$ *et calculer sa différentielle.*
2. *Démontrer que* f *atteint son minimum en au moins un point, et que tout point où* f *atteint son minimum est situé dans le plan affine* (ABC).
3. *Démontrer que* f *est strictement convexe, et en déduire que* f *atteint un unique minimum.*
4. *Soit* F *le point où* f *atteint son minimum. On suppose que* F *est distinct de* A, B *et* C. *Démontrer que*

$$\frac{1}{AF}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{BF}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{CF}\overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$