UNIVERSITÉ INERNATIONALE DE CASABLANCA
SEMESTRE 4, MATHÉMATIQUE 4, ANALYSE 4, 2018-2019

TD7

Transformée de Laplace et transformée de Laplace inverse

On rappelle que $\mathcal{U}$ est la fonction nulle à gauche de 0 et égale à 1 à sa droite :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

et Γ est le fonction définie pour tout $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Tableau des transformées de Laplace des fonctions usuelles

	Fonction $f(t)$	$\mathcal{L}[f](p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
1	$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$t^n\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\alpha t}\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
5	$\sin(at)\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
6	$\cos(at)\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
7	$sh(at)\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
8	$ch(at)\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
9	$f(t-a)$	$e^{-pa}F(p)$
10	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
11	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
12	$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
13	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
14	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{n-k}(0^+)$
15	$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
16	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
17	f de période T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
18	$(fog)(t)$	$F(p)G(p)$
19	Si $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ existe	$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{p\to +\infty} pF(p)$
20	Si $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)$ existe	$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$
21	$t^ne^{-at}\,\mathcal{U}(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

Exercice 1. *Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :*

$$f(t) = \left(t^2 + t - e^{-3t}\right)\ \mathcal{U}(t), \quad g(t) = (t+2)\ \mathcal{U}(t) + (t+3)\,\mathcal{U}(t-2), \quad h(t) = \left(t^2 + t + 1\right) e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)$$

Solution :

Il suffit d'utiliser le tableau de la première page :

$$f(t) = t^2\,\mathcal{U}(t) + t\,\mathcal{U}(t) - e^{-3t}\,\mathcal{U}(t)$$

En utilisant le tableau :

$$F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+3}\ , \qquad \Re(p) > 0$$

$$\textit{Pour}\ \ g(t) = t\,\mathcal{U}(t) + 2\,\mathcal{U}(t) + (t-2)\,\mathcal{U}(t-2) + 5\,\mathcal{U}(t-2)$$

On utilise encore le tableau :

$$G(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + 5\frac{e^{-2p}}{p} = \frac{2p+1}{p^2} + \left(\frac{5p+1}{p^2}\right) e^{-2p}$$

$$\textit{Pour}\ \ h(t) = t^2 e^{-2t}\,\mathcal{U}(t) + te^{-2t}\,\mathcal{U}(t) + e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)\ , \qquad \Re(p) > 0$$

$$H(p) = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}\ , \qquad \Re(p) > -2$$

Exercice 2. *Calculer les originaux suivants (ie, les transformées inverses)*

$$a)\ \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right], \qquad b)\ \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(p+5)^2}\right], \qquad c)\ \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right]$$

Solution :

a) $\dfrac{p+2}{(p+3)(p+4)} = -\dfrac{1}{p+3} + \dfrac{2}{p+4}$ Donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right](t) = \left(-e^{-3t} + 2e^{-4t}\right)\mathcal{U}(t)$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+5)^2}\right](t)$ on utilise la formule numéro 21 du tableau.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(p+5)^2}\right](t) = 3te^{-5t}\mathcal{U}(t)$$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{p^2+2p+5}\right](t)$

$$\frac{p-1}{p^2+2p+5} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

et on utilise les formules 6 et 5 du tableau :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(p+5)^2}\right](t) = (\cos(2t) - \sin(2t))\,e^{-t}\,\mathcal{U}(t)$$

Exercice 3. *Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations différentielles suivantes*

$$\begin{array}{lll} a) & x'(t)+x(t)=t\,\mathcal{U}(t)-t\,U(t-1), & x(0)=0 \\ b) & x''(t)+x'(t)=\ \mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=0 \\ c) & x''(t)+4x(t)=2\,\mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=1 \\ d) & x''(t)+5x'(t)+4x(t)=e^{-2t}\,\mathcal{U}(t), & x(0)=1,\quad x'(0)=0 \\ e) & x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0, & x(0)=1,\quad x'(0)=1 \end{array}$$

Solution :

a) On passe à la transformée de Laplace en posant $\mathcal{L}[x](p)=X(p)$ On remarque que :

$$t\,\mathcal{U}(t-1)=(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)+\mathcal{U}(t-1)$$

La formule 9 du tableau dit que la transformée de Laplace de $f(t-a)$ est $e^{-pa}F(p)$. C'est le cas de la fonction $(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$ lorsqu'on pose $f(t)=t\,\mathcal{U}(t)$ et $a=1$.
l'équation devient

$$pX(p)-x(0^+)+X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p}$$

Comme $x(0)=0$ alors il reste :

$$(p+1)X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{(p+1)e^{-p}}{p^2}$$

c'est à dire :

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}-\frac{e^{-p}}{p^2}$$

On décompose $\dfrac{1}{p^2(p+1)}$ en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p^2}+\frac{c}{p+1}$$

On utilise n'importe quelle technique pour trouver que

$$a=-1,\ b=1,\ c=1$$

Et donc

$$X(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}-\frac{e^{-p}}{p^2}$$

On en déduit que

$$x(t)=-\,\mathcal{U}(t)+t\,\mathcal{U}(t)+e^{-t}\,\mathcal{U}(t)-(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$$

ou encore

$$x(t)=\left(t-1+e^{-t}\right)\,\mathcal{U}(t)-(t-1)\,\mathcal{U}(t-1)$$

b) $x''(t) + x'(t) = \mathcal{U}(t), \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0$ devient en passant à la transformée de Laplace :

$$p^2 X(p) - p x(0) - x'(0) + p X(p) - x(0) = \frac{1}{p}$$

Les conditions initiales étant nulles, il reste :

$$p^2 X(p) + p X(p) = \frac{1}{p}$$

, c'est à dire :

$$p(p+1) X(p) = \frac{1}{p}$$

et donc

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}, \quad voir\ a)$$

On conclut que

$$x(t) = \left(t - 1 + e^{-t}\right)\ \mathcal{U}(t)$$

c) $x''(t) + 4x(t) = 2\,\mathcal{U}(t), \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 1$

$$p^2 X(p) - p x(0) - x'(0) + 4X(p) = \frac{2}{p}$$

Il reste

$$p^2 X(p) - 1 + 4X(p) = \frac{2}{p}$$

d'où

$$\left(p^2 + 4\right) X(p) = \frac{2}{p} + 1 = \frac{p+2}{p}$$

$$X(p) = \frac{p+2}{p\left(p^2+4\right)} = \frac{a}{p} + \frac{bp}{p^2+4} + \frac{c}{p^2+4}$$

Un petit calcul nous donne $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad et \quad c = 1.$

$$X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\right)$$

et donc

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2t) + \sin(2t)\right)\ \mathcal{U}(t)$$

d) L'équation $(x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}\,\mathcal{U}(t), \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0)$, se transforme selon Laplace en

$$p^2 X(p) - p x(0) - x'(0) + 5\left(pX(p) - x(0)\right) + 4X(p) = \frac{1}{p+2} \quad formule\ 10$$

Ceci devient

$$p^2 X(p) - p + 5\left(pX(p) - 1\right) + 4X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$\left(p^2 + 5p + 4\right) X(p) - p - 5 = \frac{1}{p+2}$$

$$\left(p^2 + 5p + 4\right) X(p) = \frac{1}{p+2} + p + 5 = \frac{p^2 + 7p + 11}{p+2}$$

et comme

$$p^2 + 5p + 4 = (p+4)(p+1)$$

alors

$$X(p) = \frac{p^2 + 7p + 11}{(p+1)(p+2)(p+4)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+4}$$

avec

$$a = \frac{5}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad et \quad c = -\frac{1}{6}.$$

D'où

$$x(t) = \left(\frac{5}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right) \mathcal{U}(t)$$

e) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$ devient après après application de la transformée de Laplace :

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 2pX(p) - 2x(0) + 2X(p) = 0$$

Elle devient d'après les conditions initiales : :

$$p^2 X(p) - p - 1 + 2pX(p) - 2 + 2X(p) = 0$$

$$\left(p^2 + 2p + 2\right) X(p) = p + 3$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2 + 2p + 2} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{2}{(p+1)^2 + 1}$$

$$x(t) = (\cos(t) + 2\sin(t))\, e^{-t}\, \mathcal{U}(t)$$

Exercice 4. *Calculer les transformées de Laplace suivantes :*

a) $\mathcal{L}\left[\cos(t)e^{-t}\,\mathcal{U}(t)\right]$, *b)* $\mathcal{L}\left[(5t)^2 e^{-5t}\,\mathcal{U}(t)\right]$

c) $\mathcal{L}\left[(\cos(2t) - \sin(t))e^{-3t}\,\mathcal{U}(t)\right]$, *d)* $\mathcal{L}\left[(t^2 + t + 1)e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)\right]$

Solution :

a)

$$\mathcal{L}\left[\cos(t)\,\mathcal{U}(t)\right] = \frac{p}{p^2+1} = F(p)$$

Le fait de multiplier la fonction $f(t) = \cos(t)\,\mathcal{U}(t)$ par e^{at} revient à prendre $F(p+a)$. Donc

$$\mathcal{L}\left[\cos(t)e^{-t}\,\mathcal{U}(t)\right] = F(p+1) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} = \frac{p+1}{p^2+2p+2}$$

b)

$$\mathcal{L}\left[(5t)^2\,\mathcal{U}(t)\right] = 25\frac{2}{p^3} = \frac{50}{p^3}$$

et comme on a e^{-5t} en facteur alors il faut translater de $+5$:

$$\mathcal{L}\left[(5t)^2 e^{-5t}\,\mathcal{U}(t)\right](p) = \frac{50}{(p+5)^3}$$

c) $\mathcal{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))e^{-3t}\,\mathcal{U}(t)\right]$

$$\mathcal{L}\left[\cos(2t)-\sin(t)\right](p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p^2+1}$$

puis on prend cette fonction au point $p+3$ à cause de e^{-3t} :

$$\mathcal{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))e^{-3t}\,\mathcal{U}(t)\right](p)=\frac{p+3}{(p+3)^2+4}-\frac{1}{(p+3)^2+1}$$

d)

$$\mathcal{L}\left[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)\right](p)=\frac{2}{(p+2)^3}+\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}$$

Exercice 5. *Calculer les originaux suivants :*

$$a)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{p+2}-\frac{1}{p^3}\right]\qquad b)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(p+3)^2}\right]\qquad c)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\right]$$

$$d)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{p^2+4p+6}\right]\qquad e)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)^2}\right]\qquad f)\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p+3}{2p^2+4p+5}\right]$$

Solution :

a) $\quad f(t)=\left(3e^{-2t}-\frac{1}{2}t^2\right)\,\mathcal{U}(t)$

b) $\quad f(t)=-2te^{-3t}\,\mathcal{U}(t)$

c) $\quad f(t)=exo$

d) $\quad F(p)=\dfrac{5}{p^2+4p+6}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{(p+2)^2+\sqrt{2}^2}$ d'où

$$f(t)=\frac{5}{\sqrt{2}}e^{-2t}\cos(\sqrt{2}\,t)\,\mathcal{U}(t)$$

e)

$$F(p)=\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{p+1}{(p+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}$$

D'où

$$f(t)=e^{-t}\,\mathcal{U}(t)-te^{-t}\,\mathcal{U}(t)=(1-t)\,e^{-t}\,\mathcal{U}(t)$$

f) Exo

Exercice 6. *Utiliser la TL (transformée de Laplace) pour résoudre les équations différentielles suivantes*

$$\begin{array}{lll}
a) & x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0, & x(0)=1,\quad x'(0)=0\\
b) & x''(t)+6x'(t)+9x(t)=e^{-2t}\,\mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=0\\
c) & x''(t)-x(t)=(3e^{-2t}+t^2+1)\,\mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=0\\
d) & x''(t)-4x(t)=(3e^{-t}-t^2)\,\mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=1\\
e) & x''(t)+x(t)=e^{t}\cos(t)\,\mathcal{U}(t), & x(0)=0,\quad x'(0)=0\\
f) & x''(t)+x(t)=\ \mathcal{U}(t)-U(t-1), & x(0)=2,\quad x'(0)=0
\end{array}$$

Solution :

a) l'équation différentielle $(x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0\ )$ se transforme en :

$$p^2 X(p) - x'(0) - px(0) + 3pX(p) - 3x(0) + 2X(p) = 0$$

c'est à dire

$$p^2 X(p) - p + 3pX(p) - 3 + 2X(p) = 0$$

ou encore

$$\left(p^2 + 3p + 2\right) X(p) = p + 3$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\ \mathcal{U}(t)$$

Ne pas imprimer. Attendre la suite de la solution.