Université Internationale de Casablanca
CPI2-Analyse 4- S4-2018-2019
TD Formes différentielles

Exercice 1. *Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :*

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz.$
5. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$

Exercice 2. *Soit ω la forme différentielle* $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$

1. *Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$.*

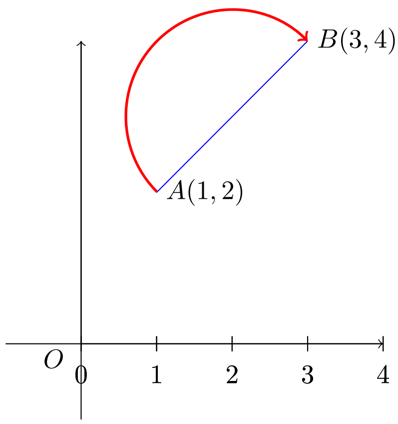

Figure 1: Le domaine D

Exercice 3. *On considère la forme différentielle* $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$

1. *Montrer que ω n'est pas exacte.*
2. *Trouver une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi(x)\omega$ soit exacte. Déterminer alors f.*

Exercice 4. *On considère le champ vectoriel*

$$V(x,y) = (1 + 2xy, x^3 - 3).$$

Ce champ est-il un champ de gradient ?

Exercice 5. *Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel*

$$U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Exercice 6. *Calculer la circulation du champ vectoriel* $V(x,y) = (3x, x+y)$ *le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.*

Exercice 7. *Calculer le travail W de la force* $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ *le long de l'hélice H paramétrée par*

$$x = cost \ , \quad y = sint \ , \quad z = t \ ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Exercice 8. *On donne le champ vectoriel*

$$V(x,y,z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. *Montrer que ce champ est un champ de gradient.*

2. *Déterminer le potentiel* $U(x,y,z)$ *dont dérive ce champ sachant qu'il vaut* 1 *à l'origine.*

3. *Quelle est la circulation de ce champ de* $A(0,1,0)$ *à* $B(\frac{\pi}{2},3,0)$?

Exercice 9. *On considère la forme différentielle*

$$\omega = (x^2+y^2+2x)dx + 2ydy.$$

1. *Montrer que* ω *n'est pas exacte.*

2. *Trouver une fonction* $\psi(x)$ *telle que* $\psi\omega = df$. *Préciser alors* f . *(On dit que* ψ *est un facteur intégrant.)*

Exercice 10. *Soit* $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$.
Calculer l'intégrale curviligne de ω *le long de la demi-cardioïde d'équation en polaire*

$$r = 1+\cos\theta \quad , \quad \theta \in [0,\pi]$$

.

Exercice 11. *Calculer l'intégrale curviligne de* $\omega = ydx + 2xdy$ *sur le contour du domaine défini par :*

$$D : \begin{cases} x^2+y^2-2x \leq 0 \\ x^2+y^2-2y \leq 0 \end{cases}$$

parcouru une fois en sens direct.

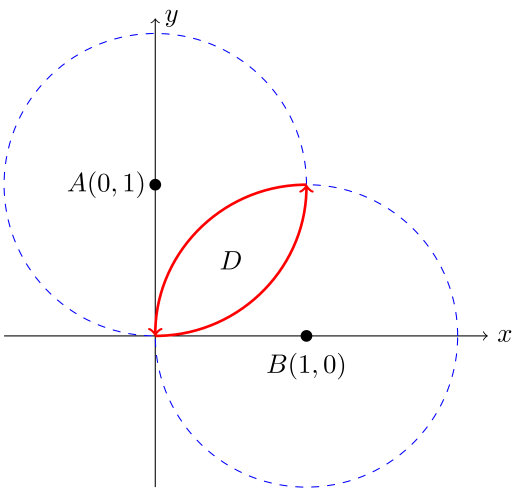

Figure 2: D est l'intersection des deux disques

Exercice 12. *On considère le changement de variable en coordonnées sphérique*

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\theta \\ y = r\cos\phi\sin\theta \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$

1. *Calculer* dx, dy, dz

2. *Vérifier que* $xdx + ydy + zdz = rdr$

3. *En déduire* $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$ *et* $\dfrac{\partial r}{\partial z}$.

Exercice 13. *Calculer* $\int_D xydxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 1\}$

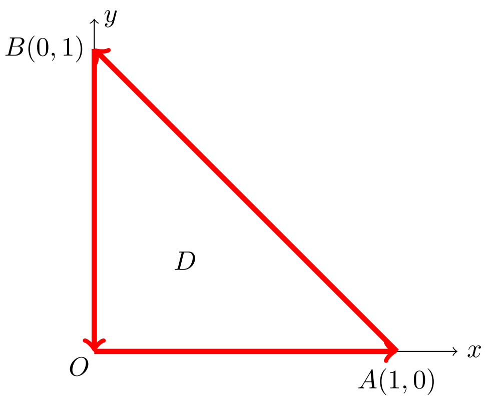

Figure 3: $C = 0A \cup AB \cup B0$ est la frontière de D