UNIVERSITÉ INERNATIONALE DE CASABLANCA
SEMESTRE 4, MATHÉMATIQUE 4, ANALYSE 4, 2018-2019

TD6
Intégrales multiples

Exercice 1. *Donner la représentation graphique de A et calculer l'intégrale $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :*

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$ *et* $f(x,y) = x + y$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ *et* $f(x,y) = x + y$
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2\}$ *et* $f(x,y) = ye^{x/y}$
4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-2y \ge 0,\ x^2+y^2-1 \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ *et* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Exercice 2. *(I) Donner la représentation graphique du domaine D et calculer l'intégrale $\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants:*

1. $f(x,y) = x$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \ge 0, x - y + 1 \ge 0; x + 2y - 4 \le 0\}$
2. $f(x,y) = x + y$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1; x^2 \le y \le x\}$
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ *et* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x \le 2; 0 \le xy \le \frac{\pi}{2}\right\}$
4. $f(x,y) = xy$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \ge 0; y \ge 0, xy + x + y \le 1\}$
5. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x \le 3; y \ge 2, x + y \le 5\}$
6. $f(x,y) = x^2$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \le 1, y \ge 0;\ y^2 \le x\}$
7. $f(x,y) = x^2$ *et D est l'intérieur de l'ellipse d'équation*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b \in \mathbb{R}^{+*}$$
8. $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le y \le x \le 1\}$
9. $f(x,y) = \sin(x+y)$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \ge 0, y \ge 0, x + y \le \pi\}$
10. $f(x,y) = yx^2$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \le 1, y \ge 0, y^2 \le x\}$
11. *On pose* $D = [0,1] \times [0,1]$ *Dérminer la limite quand* $n \mapsto +\infty$ *de*
$$\int_D \frac{dxdy}{1 + x^n + y^n}$$
12. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$

Exercice 3. *Calculer l'aire du domaine D suivant* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \le x \le 1; x^2 \le y \le 4 - x^3\}$

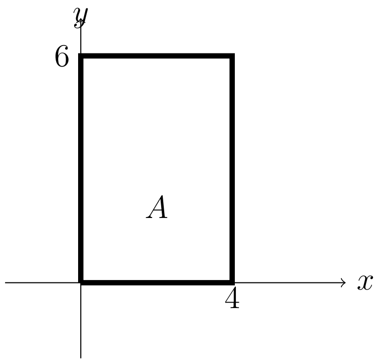
Exercice 4. *Le but de l'exercice est de calculer l'inégrale*
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

1. *Montrer que* $\forall x \in]-1, +\infty[$, *o, a*
$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$
En déduire que
$$I = \int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dxdy$$
où $D = [0,1] \times [0,1]$.

2. *En interverrtissant les rôles de* x *et* y, *motrer que*
$$2I = \int_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy$$
En déduire que
$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Solution

1. Tracer un rectangle.



$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 dx$$
$$= \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1$$

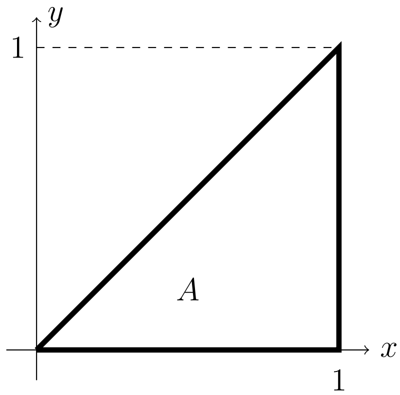
2. Tracer un triangle (j'ai changé d'échelle).

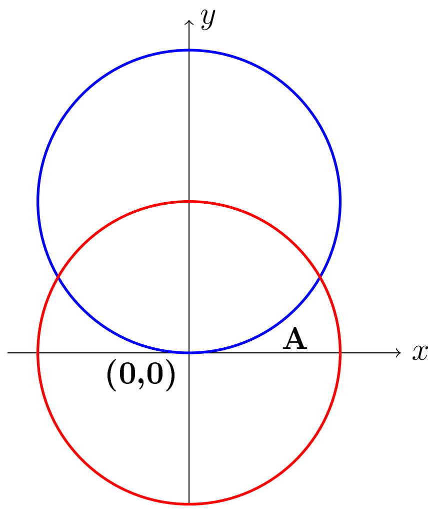
3. Calcul de l'intégrale:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 5. *Soient* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0,\ x \geq 0; y \geq 0\}$ *et* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. *Donner la représentation graphique de* A.





2. *Calculer en utilisant le changement de variable approprié l'intégrale* $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

Solution

1. La figure de A est la partie extérieure au cercle $C\,((0,1),1)$ et intérieure au cercle $C((0,0),1)$.

2. On pose
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$
Pour chaque $r \in [0,1]$ l'angle θ peut varier de 0 jusqu'à un certain angle $\theta(r)$ dépendant de r. En cet angle et à la distance r on a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \tag{2}$$
et donc
$$y = \frac{r^2}{2} = r\sin\theta(r)$$
c'est à dire :
$$\sin\theta(r) = \frac{r}{2}$$
ou encore
$$\theta(r) = \arcsin\frac{r}{2}$$

$$I = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 \int_0^{\theta(r)} \sqrt{r^2}rdrd\theta$$

$$= \int_0^1 r^2\theta(r)dr$$
$$= \int_0^1 r^2 \arcsin\frac{r}{2}dr$$

On pose $\frac{r}{2} = \sin t$ et donc $dr = 2\cos t dt$ On a:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} r=0 & \Longrightarrow & \sin t = 0 & \Longrightarrow & t=0 \\ r=1 & \Longrightarrow & \sin t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & t=\frac{\pi}{6} \end{array}}$$

$$I = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin^2 t\cos t dt$$

On pose par parties :

$$\begin{cases} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \sin^2 t\cos t \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin^3 t \end{cases}$$

Et donc

$$\frac{I}{8} = \frac{1}{3}\left[t\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}\sin^3 t dt$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1-\cos^2 t\right) sint dt$$
$$= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t sint dt\right)$$
$$= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{3}\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 1\right)$$

c'est à dire

$$\boxed{I = \frac{\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{16}{3}}$$

Exercice 6. *1. Calculer l'intégrale $I = \int_D x^y\, dx\, dy$ avec $D = [0,1]\times[a,b]$, $b > a > 0$.*

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$.

Solution

1. On intègre selon x puis selon y dans cet ordre.

$$I = \iint_D x^y\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy$$
$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2. On intègre selon y puis selon x

$$I = \iint_D x^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

On déduit de (1) que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

Exercice 7. *Déterminer la représentation graphique de A et calculer son aire dans les cas suivants :*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, |x + y| \leq 1, \, 0 \leq x \leq 1\}$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 - 2y \geq 0, \; x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$

Solution

1. Le graphe :

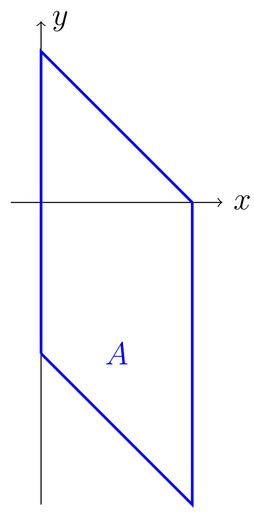


Figure 1: Le graphe de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, |x + y| \leq 1, \, 0 \leq x \leq 1\}$

$$Aire(A) = \iint_A 1 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-1-x}^{1-x} 1 dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x + 1 + x) dx = \int_0^1 2 dx = 2$$

2. Le graphe de A de cette question est dans la solution de l'exercice 2.

$$Aire(A) = \iint_A 1 dx dy = \int_0^1 \int_0^{\theta(r)} r dr d\theta$$
$$= \int_0^1 r\theta(r) dr = \int_0^1 r \arcsin \frac{r}{2} dr$$

On pose $\frac{r}{2} = \sin t$ et donc $dr = 2 \cos t dt$

$$Aire(A) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} t \sin t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2t \sin(2t) dt$$

On pose

$$\boxed{\begin{array}{lll} u = t & et\ \ donc & u' = 1 \\ v' = 2\sin(2t) & et\ \ donc & v = -\cos(2t). \end{array}}$$

D'où

$$Aire(A) = [uv]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} u'vdt$$

$$Aire(A) = [-t\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)dt$$

$$-\frac{\pi}{6}\cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}[\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$$Aire(A) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}$$

SI CE N'EST PAS FAUX C'EST QUE C'EST JUSTE!

Exercice 8. *Soit* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$*. Calculer* $\iiint_A \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz.$

Solution

On passe aux coordonnées sphériques:

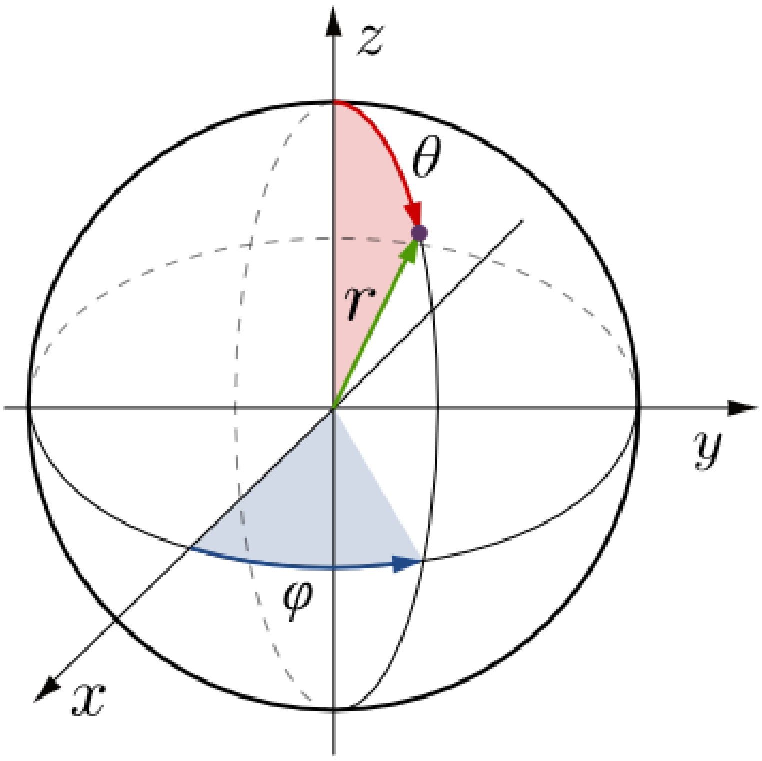


Figure 2: Coordonnées sphériques

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$$

et donc

$$\boxed{\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ dy = \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{cases}}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx \\ \\ dy \\ \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ \\ d\theta \\ \\ d\varphi \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dr \\ \\ d\theta \\ \\ d\varphi \end{pmatrix}}$$

Quand on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques, $dxdydz$ est remplacé par $det(J)drd\theta d\varphi$. On calcule le déterminant de la matrice J, et si on ne se trompe pas on obtient.

$$\det(J) = r^2\sin\theta$$

Calculons l'intégrale :
$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ correspond à $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
et $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ correspond à $0 \leq r \leq 1$.

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^3 \sin\varphi\cos\varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

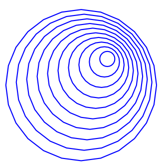
$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{9}$$

Exercice 9. *On pose*

$$I = \iiint_A xyz dx dy dz$$

avec

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \leq 0,\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 1 \ et\ z^2 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

1. *Ecrire I sous la forme $\int_{z_1}^{z_2} z \left(\iint_{D_z} xy\, dx\, dy\right) dz$, en précisant z_1, z_2 et D_z.*
2. *Par passage en coordonnées polaires calculer $\iint_{D_z} xy\, dx\, dy$.*
3. *En déduire la valeur de I.*
4. 

Solution

$I = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} xy\, dx\, dy \right)\, dz$ avec

$$D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

1. $\iint_{D_z} xy\, dx\, dy =?$
   On passe aux cordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

avec, puisque x et y sont négatifs et $x^2+y^2 = r^2 \leq z^2$

$$0 \leq r \leq z\ , \quad et \quad \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\iint_{D_z} xy\, dx\, dy = \int_0^z \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta$$

$$= \frac{z^4}{4}\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{z^4}{8}$$

2. La calcul de l'intégrale globale

$$I = \int_0^1 \frac{z^4}{8} dz = \frac{1}{40}$$

Exercice 10. *Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \text{ avec } a,b,c > 0.$$

1. *Calculer le volume de V.*
2. *Calculer l'intégrale $\iiint_V x\, dx\, dy\, dz$.*

Exercice 11. *Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) = (X,Y)$.*

1. *Vérifier que $X^2+Y^2 = (x^2+y^2)^2$.*
2. *Calculer le Jacobien de ϕ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
3. *Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x^2-y^2 \leq 4 \text{ et } 1 \leq xy \leq 2\}$.*
   a) *Donner la représentation graphique de D.*
   b) *En utilisant le changement de variables $X = x^2-y^2$, $Y = 2xy$, calculer l'intégrale $\iint_D (x^2+y^2)^3\, dx\, dy$.*

Exercice 12. *On considère l'intégrale $I_a = \iint_{A_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ avec $A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$.*

1. *Calculer I_a en fonction de a. En déduire $\lim\limits_{a \to +\infty} I_a$.*

2. *On considère le rectangle* $R_a = [-a, a] \times [-a, a]$ *et* $J_a = \iint_{R_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx\, dy$. *Calculer l'intégrale simple* $\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$ *en fonction de* J_a.

3. *En utilisant les questions 1 et 2, calculer la valeur de l'intégrale de Gauss* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$.

Exercice 13. 1. a) *Calculer l'intégrale* $I_n = \iint_{C_n} e^{-x} \cos y\, dx\, dy$ *avec* $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq y \leq x \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) *En déduire* $I = \iint_{C} e^{-x} \cos y\, dx\, dy$ *avec* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq y \leq x\}$.

2. a) *Calculer l'intégrale* $J_n = \int_{D_n} (x - y) \cos(x + y)\, dx\, dy$ *avec* $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x - y \leq x + y \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) *Étudier la nature de l'intégrale* $\iint_{D} (x - y) \cos(x + y)\, dx\, dy$ *avec* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x - y \leq x + y\}$.