Université Internationale de Casablanca

CPI2, Groupe 2, ANALYSE 4, Contrôle 1.

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = ln(x+y) \ , \ g(x,y,z) = \frac{ln(x^2+1)}{yz}$$

Solution

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > -x\}, \qquad D_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

Exercice 2

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ , \ g(x,y) = \frac{1+x^2y^2}{y}\sin y$$

2. Calculer si elle existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
3. Calculer si elle existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} g(x,y)$, $\quad (a \in \mathbb{R})$

Solution

1. On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ Donc

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\theta + \sin\theta)}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

Pas de limite.

2.

$$g(x,y) = \frac{1+x^2y^2}{y}\sin y = g(x,y) = (1+x^2y^2)\frac{\sin y}{y}$$

$\frac{\sin y}{y}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. La limite demandée est donc 1.

Exercice 3
Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = ye^x$ au point $(0,3)$ suivant la direction $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Solution Le vecteur directeur de la droite $\theta = \frac{2\pi}{3}$ est $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\frac{f\left((0,3) + t(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\right) - f(0,3)}{t} = \frac{f\left(-\frac{1}{2}t, 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)\right) - f(0,3)}{t}$$

$$= \frac{(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-\frac{1}{2}t} - 3}{t}$$

Quand t tend vers 0, $e^{-\frac{1}{2}t}$ est du même ordre de grandeur que $1 - \frac{1}{2}t$ et donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left((0,3) + t(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\right) - f(0,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)(1 - \frac{1}{2}t) - 3}{t} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 4
Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

1. Déterminer le point critique de f
2. Déterminer sa nature.

Solution

1. Le point critique
$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + y - 3 \\ \\ f'_y(x,y) = 2y + x - 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ \\ 2y + x - 6 = 0 \end{cases}$$
C'est un système linéaire dont l'unique solution est le point $(0,1)$
2.
$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 2 \\ \\ f''_{yy}(x,y) = 2 \\ f''_{xy}(x,y) = 0 \end{cases}$$
$$f(h, 1+k) - f(0,1) = h^2 + k^2 + RESTE \geq 0$$
donc MINIMUM

Exercice 5

Soit g la fonction définie par :
$$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1. Déterminer les 2 points critiques de g
2. Déterminer la nature de chaque point critique.

Solution

1.
$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 3x^2 - 3y \\ \\ g'_y(x,y) = 3y^2 - 3x \end{cases}$$
Les points critiques s'obtiennent en résolvant
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$
qui donne $x^4 = x$ donc $x = 1$ ou $x = 0$
Les deux points critiques sont
$$(0,0), \quad et \quad (1,1)$$
2. Pour obtenir leur nature on calcule les dérivées partielles secondes en ces point.
$$\begin{cases} g"_{xx}(x,y) = 6x \\ \\ g"_{yy}(x,y) = 6y \\ \\ g"_{xy}(x,y) = -3 \end{cases}$$
En $(0,0)$
$$g(h,k) = -6hk + RESTE$$
et cette quantité change de signe.
Le point $(0,0)$ est un point SELLE. En $(1,1)$
$$g(1+h, 1+k) - g(1,1) = 6h^2 - 6hk + 6k^2 + RESTE = 6\left(h^2 - hk + k^2\right) + RESTE > 0$$
.
Car $h^2 - hk + k^2 = k^2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)$
Le discriminant est $1 - 4 = -3 < 0$
$(1,1)$ est donc un MINIMUM.