Université Internationale de Casablanca

CPI2, Groupe 1, ANALYSE 4, Contrôle 1.

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}\quad,\qquad g(x,y)=\frac{ln(y)}{\sqrt{x-y}}$$

Solution

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0<y\leq x^2\},\qquad D_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0<y<x\}$$

Exercice 2

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}\quad,\qquad g(x,y)=\frac{xy}{x+y}\ ,$$

2. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
3. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} g(x,y)$
4. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

Solution

1. $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0<y\leq x^2\},\qquad D_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq -y\}$
2. On pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ Donc

$$f(x,y)=\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^4\theta)}=r\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\cos^2\theta+\sin^4\theta}$$

tend vers 0 quand r tend vers 0

3.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} g(x,y)=\frac{-1}{0}=\infty$$

4. On pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ et donc

$$g(x,y)=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(\cos\theta+\sin\theta)}=r\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

tend vers 0 quand r tend vers 0.

Exercice 3
Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y)=ye^x$ au point $(0,3)$ suivant la direction $\theta=\frac{\pi}{6}$
Solution

Le vecteur directeur de la droite $\theta=\frac{\pi}{6}$ est $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

$$\frac{f\left((0,3)+t(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\right)-f(0,3)}{t}=\frac{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t,3+\frac{1}{2}t\right)-f(0,3)}{t}$$

$$=\frac{(3+\frac{1}{2}t)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t}-3}{t}$$

Quand t tend vers 0, $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t}$ est du même ordre de grandeur que $1+\frac{\sqrt{3}}{2}t$ et donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left((0,3)+t(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\right)-f(0,3)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(3+\frac{1}{2}t)(1+\frac{\sqrt{3}}{2}t)-3}{t}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y)=y^2-x^2+\frac{x^4}{2}$$

1. Déterminer les 3 points critiques de f
2. Déterminer la nature de chaque point critique.

Solution

1.
$$\begin{cases} f'_x(x,y)=-2x+2x^3 \\ \\ f'_y(x,y)=2y \end{cases}$$

Les points critiques s'obtiennent en résolvant

$$\begin{cases} -2x+2x^3=0 \\ \\ 2y=0 \end{cases}$$

qui s'écrit

$$\begin{cases} x(x-1)(x+1)=0 \\ \\ y=0 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc

$$(0,0), \quad (-1,0) \quad et \quad (1,0)$$

2.
$$\begin{cases} f"_{xx}(x,y)=-2+6x^2 \\ \\ f"_{yy}(x,y)=2 \\ \\ f"xy(x,y)=0 \end{cases}$$

Au point critique $(0,0)$ on a $\alpha=-2, \beta=2 \quad et \gamma=0$ et donc

$$f(h,k)-f(0,0)=\frac{1}{2}(-2h^2+k^2)$$

change de signe, c'est donc un point selle.
Au point critique $(-1,0)$ on a $\alpha=4, \beta=2 \quad et \gamma=0$ et donc

$$f(-1+h,k)-f(-1,0)=\frac{1}{2}(4h^2+k^2)\geq 0$$

c'est donc un minimum.
De même pour le dernier point $(1,0)$ (par parité)

Exercice 5
Soit g la fonction définie par :

$$g(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+5$$

1. Déterminer le point critique de g
2. Déterminer sa nature.

Solution

1. Les dérivées partielles de g

$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 2x - 2y \\ \\ g'_y(x,y) = 4y - 2x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

   Le point critique est donc le point $(1,1)$.

2. Pour obtenir sa nature on calcule les dérivées partielles secondes en ce point.

$$\begin{cases} g_{xx}"(x,y) = 2 \\ \\ g_{yy}"(x,y) = 4 \\ \\ g_{xy}"(x,y) = -2 \end{cases}$$

$$2h^2 - 4hk + 4k^2 = 2\left(h^2 - 2hk + 2k^2\right) = 2\left((h-k)^2 + k^2\right) \geq 0$$

c'est donc un minimum.