Université Internationale de Casablanca

Analyse 4

H. EL AMRI

–

2016-2017

Rappel

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note le produit scalaire de x et y par :

$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

Rappel

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note le produit scalaire de x et y par :

$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note sa norme euclidienne par :

$$\|x\| = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Rappel

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note le produit scalaire de x et y par :

$$x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note sa norme euclidienne par :

$$\|x\| = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

3. On désigne par $o(h)$ toute fonction $o : h \in \mathbb{R}^n \to o(h) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \to 0} o(h) = 0$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentaible en a si:

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + ho(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} o(h) = 0.$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + ho(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} o(h) = 0.$$

- Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note

$$l = f'(a).$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + ho(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$

- Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note

$$l = f'(a).$$

- Et la fonction

$$\left\{ \begin{array}{c} f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ a \to f'(a) \end{array} \right. .$$

est appelée **la fonction dérivée** de la fonction f.

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $]a-r, a+r[\subset D$. On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in D$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + lh + ho(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$

- Le réel l est appelé la dérivée de la fonction f au point a. On le note

$$l = f'(a).$$

- Et la fonction

$$\begin{cases} f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad a \to f'(a) \end{cases}.$$

  est appelée **la fonction dérivée** de la fonction f.
- On a aussi pour tout $x \in D$:

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)o(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} o(x-a) = 0.$$

Remarque :

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors

Remarque :

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors
- $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - lh}{h} = \lim_{h\to 0} o(h) = 0$$

Remarque :

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors
- $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - lh}{h} = \lim_{h \to 0} o(h) = 0$$
- $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l + \lim_{h \to 0} o(h) = l = f'(a)$$

Remarque :

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors
- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-lh}{h}=\lim_{h\to 0}o(h)=0$$
- $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l+\lim_{h\to 0}o(h)=l=f'(a)$$
- f est continue en a: En effet

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(f(a)+l(x-a)+(x-a)o(x-a))=f(a).$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a,r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a+h \in D$ on a :
- $$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\| \, o(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :
- $$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\, o(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$
- Le vecteur l est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note
$$L = f'(a).$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :
-
$$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\, o(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$
- Le vecteur l est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note
$$L = f'(a).$$
- On aura aussi $\forall x \in D$ on a:
$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + \|x-a\|\, o(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} o(x-a) = 0.$$

Définition

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$ tel que $\exists r > 0$ vérifiant $B(a, r) \subset D$.
- On dit que f est différentiable en a si:
- $\exists L \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in D$ on a :
- $$f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|\, o(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} o(h) = 0.$$
- Le vecteur l est appelé dérivée de la fonction f au point a. On le note
$$L = f'(a).$$
- On aura aussi $\forall x \in D$ on a:
$$f(x) = f(a) + L.(x-a) + \|x-a\|\, o(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} o(x-a) = 0.$$
- Et on note
$$f'(a) = \nabla f(a)$$

Remarque:

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors

Remarque:

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors
- On a
$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} |o(h)| = 0$$

Remarque:

- Si une fonction f est dérivable en un point a alors
- On a

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} |o(h)| = 0$$

- f est continue en a: En effet

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + L.(x-a) + \|x-a\| o(x-a)) = f(a)$$

Exemple 1:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = xy$

Exemple 1:

- On considère la fonction f définie par $f(x, y) = xy$
- $f(a + h, b + k) = (a + h)(b + k) = ab + bh + ak + hk$

$$= f(a, b) + bh + ak + \sqrt{h^2 + k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Et puisque $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$ alors :

Exemple 1:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = xy$
- $f(a+h, b+k) = (a+h)(b+k) = ab + bh + ak + hk$

$$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Et puisque $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$ alors :

- f est dérivable au point (a,b) et on

$$f'(a,b)(h,k) = bh + ak$$

$$f(a+h,b+k) = (a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab + ak + bh + hk \\ &= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\,o(h,k)$$

$$f(a+h,b+k) = (a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab + ak + bh + hk \\ &= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\,o(h,k)$$
- $$\text{avec} \quad o(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$f(a+h,b+k) = (a+h)(b+k)$$

$$\begin{aligned} &= ab + ak + bh + hk \\ &= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

- $$= f(a,b) + bh + ak + \sqrt{h^2+k^2}\, o(h,k)$$
- $$\text{avec} \quad o(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
- Conclusion
$$f'(a,b) = \nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Exemple 2:

- On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(xy)$
  $f(a+h, b+k) = \sin(a+h)(b+k) = \sin(ab+bh+ak+hk)$

$$= \sin(ab) + (bh+ak+hk)\cos(ab) - \frac{1}{2}(bh+ak+hk)^2 \sin\theta_{(h,k)}$$

Exemple 2:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \sin(xy)$
  $f(a+h, b+k) = \sin(a+h)(b+k) = \sin(ab+bh+ak+hk)$

$$= \sin(ab) + (bh+ak+hk)\cos(ab) - \frac{1}{2}(bh+ak+hk)^2 \sin\theta_{(h,k)}$$

- Donc $f'(a,b).(h,k) = (bh+ak)\cos(ab) = (b\cos(ab))\,h + (a\cos(ab))\,k$

Exemple 3:

- On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x^2y + xy$

Exemple 3:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y + xy$
- $f(a+h, b+k) = (a+h)^2(b+k) + (a+h)(b+k)$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2 + 2ah + h^2)(b+k) + (a+h)(b+k) \\
&= a^2b + a^2k + 2abh + 2ahk + bh^2 + h^2k + ab + ak + bh + hk \\
&= f(a,b) + (2ab+b)h + (a^2+a)k + bh^2 + h^2k + 2ahk \\
&= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + bh^2 + h^2k + 2ahk \\
&= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{bh^2 + h^2k + 2ahk}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}
$$

Exemple 3:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y + xy$
- $f(a+h, b+k) = (a+h)^2(b+k) + (a+h)(b+k)$

$$\begin{aligned}
&= (a^2+2ah+h^2)(b+k)+(a+h)(b+k)\\
&= a^2b+a^2k+2abh+2ahk+bh^2+h^2k+ab+ak+bh+hk\\
&= f(a,b)+(2ab+b)h+(a^2+a)k+bh^2+h^2k+2ahk\\
&= f(a,b)+(2ab+b,a^2+a)(h,k)+bh^2+h^2k+2ahk\\
&= f(a,b)+(2ab+b,a^2+a)(h,k)+\sqrt{h^2+k^2}\,\frac{bh^2+h^2k+2ahk}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

- $$= f(a,b)+(2ab+b,a^2+a)(h,k)+\sqrt{h^2+k^2}\,o(h,k)$$

Exemple 3:

- On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y + xy$
- $f(a+h, b+k) = (a+h)^2(b+k) + (a+h)(b+k)$

$$\begin{aligned}
&= (a^2+2ah+h^2)(b+k) + (a+h)(b+k)\\
&= a^2b + a^2k + 2abh + 2ahk + bh^2 + h^2k + ab + ak + bh + hk\\
&= f(a,b) + (2ab+b)h + (a^2+a)k + bh^2 + h^2k + 2ahk\\
&= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + bh^2 + h^2k + 2ahk\\
&= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{bh^2+h^2k+2ahk}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

- $$= f(a,b) + (2ab+b, a^2+a)(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,o(h,k)$$

- On note alors $f'(a,b) = \nabla f(a,b) = (2ab+b, a^2+a) = (2ab, a^2) + (b,a)$

Définitions

1. Soit f une fonction diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On définit **le gradient** et **la divergence** de f en a par:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$div\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Définitions

1. Soit f une fonction diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On définit **le gradient** et **la divergence** de f en a par:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$div\ f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

2. Soit $V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3$. On définit la divergence et le rotationnel de V par:

$$div(V) = \nabla . V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

et

$$rot(V) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Théorème

1. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors elle est continue en a.

Théorème

1. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors elle est continue en a.
2. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors f admet des dérivées partielles en a et on a:

$$f'(a) = \nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Théorème

1. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors elle est continue en a.
2. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors f admet des dérivées partielles en a et on a:

$$f'(a) = \nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

3. Si f est différentiable en a, alors la la dérivée selon toute direction $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ (de norme 1) de f en a existe et on a:

$$f'_v(a) = v.\nabla f(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Théorème

1. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors elle est continue en a.
2. Si f est diférentiable en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ alors f admet des dérivées partielles en a et on a:

$$f'(a) = \nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

3. Si f est différentiable en a, alors la la dérivée selon toute direction $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ (de norme 1) de f en a existe et on a:

$$f'_v(a) = v.\nabla f(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

4. Si f est de classe C^1 dans un voisinage de a (c'est à dire les dérivées partielles existent et sont continues) alors f est différentiable en a.

Soient f et g deux fonctions différentiables en un point a. Alors:

1. $f+g$ est différentiable en a, et on a

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(a) &= \nabla f(a)+\nabla g(a) \\ d(f+g)(a) &= df(a)+dg(a) \end{aligned}$$

Opérations

Soient f et g deux fonctions différentiables en un point a. Alors:

1. $f+g$ est différentiable en a, et on a

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a) \\ d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a) \end{aligned}$$

2. fg est différentiable en a, et on a

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \\ d(fg)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a) \end{aligned}$$

Opérations

Soient f et g deux fonctions différentiables en un point a. Alors:

1. $f+g$ est différentiable en a, et on a

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a) \\ d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a) \end{aligned}$$

2. fg est différentiable en a, et on a

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \\ d(fg)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a) \end{aligned}$$

3. Si de plus $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable et on a:

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2}$$

Composées de fonctions différentiables

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in D$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable en $f(a) \in f(D)$ Alors $\varphi o\, f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et on a

$$(\varphi o f)'(a) = \nabla(\varphi o f)(a) = \varphi'(f(a))f'(a) = \varphi'(f(a))\nabla f(a)$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On dit que $x_0 \in D$ est un point critique de f si

$$\nabla f(x_0) = O,$$

c'est à dire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad pour \ tout \quad i = 1, ..., N$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On dit que $x_0 \in D$ est un point critique de f si

$$\nabla f(x_0) = O,$$

c'est à dire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad pour\ tout \quad i = 1, ..., N$$

Pour $N = 2$ (a, b) sera un point critique de f si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$.
x_0 est un maximum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$.
x_0 est un maximum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

x_0 est un maximum de f si

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$.
x_0 est un maximum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

x_0 est un maximum de f si

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$$

x_0 est un minimum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

Définition

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in D$.
x_0 est un maximum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

x_0 est un maximum de f si

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$$

x_0 est un minimum local de f si $\exists V$ voisinage de x_0 tel que

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V$$

x_0 est un minimum de f si

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$$

Propriétés des points critiques

Soit $f : D \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable . Soit (a, b) un point critique de f. On a donc $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. et donc

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2\right) + \|(h, k)\|^2 o(h, k)$$

où

$$\boxed{\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\ , \quad \beta = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\ , \quad \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)}$$

On aura

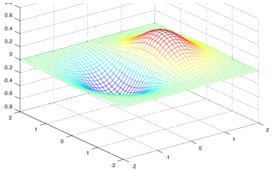


Figure: Figure 1

Le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ dépend du signe du polynôme du deuxième degré dans $\mathbb{R}^2$: $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$

Le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ dépend du signe du polynôme du deuxième degré dans $\mathbb{R}^2$: $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$
On calcule $\Delta' = \gamma^2 - \alpha\beta$.

maximum, minimum, point selle

Le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ dépend du signe du polynôme du deuxième degré dans $\mathbb{R}^2$: $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$
On calcule $\Delta' = \gamma^2 - \alpha\beta$.
Si $\Delta' < 0$ alors le polynôme $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ garde un signe constant: celui de α (et de β).

Le signe de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ dépend du signe du polynôme du deuxième degré dans $\mathbb{R}^2$: $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$
On calcule $\Delta' = \gamma^2 - \alpha\beta$.
Si $\Delta' < 0$ alors le polynôme $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ garde un signe constant: celui de α (et de β).
Si $\Delta' \leq 0$ et $\alpha < 0$ alors $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$ et donc

$$f(a+h, b+k) \leq f(a, b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a **un maximum relatif.**

Le signe de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ dépend du signe du polynôme du deuxième degré dans $\mathbb{R}^2$: $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$
On calcule $\Delta' = \gamma^2 - \alpha\beta$.
Si $\Delta' < 0$ alors le polynôme $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ garde un signe constant: celui de α (et de β).
Si $\Delta' \leq 0$ et $\alpha < 0$ alors $f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0$ et donc

$$f(a+h, b+k) \leq f(a,b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a **un maximum relatif.**
Si$\Delta' \leq 0$ et $\alpha > 0$ alors $f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq 0$ et donc

$$f(a+h, b+k) \geq f(a,b), \quad \textit{pour } h \textit{ et } k \textit{ assez petits}$$

c'est à dire on a un **minimum relatif**.

Si $\Delta' = 0$ alors le polynôme $\alpha h^2 + 2\gamma hk + \beta k^2$ change de signe. On peut parler de **point selle.**

Définition 1

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^N :\longrightarrow \mathbb{R}$, On suppose que ici que D est un produit d'intervalles de $\mathbb{R}$:

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_i, b_i] \times ... \times [a_N, b_N]$$

On appelle intégrale de f sur D le nombre réel noté

$$\int_D f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_2 ... dx_N$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} ... \left(\int_{a_i}^{b_i} ... \left(\int_{a_N}^{b_N} f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_N \right) ... \right) dx_i ... \right) dx_2 \right) dx_1$$

Exemple

$f : D \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ D = [a, b] \times [c, d]\ f(x, y) = sin(x + y)$

$$\int_D sin(x+y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \sin(x+y)dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\left[\cos(x+y) \right]_c^d \right) dx$$

$$= \int_a^b (\cos(x+d) - \cos(x+c))\, dx$$

$$= [-\sin(x+d) + \sin(x+c)]_a^b$$

$$= \sin(a+d) - \sin(b+d) + \sin(b+c) - \sin(a+c)$$

Définition 2

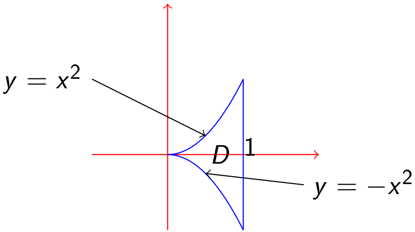
Cas où D est défini par des inéquations:

$$D = \{(x, y);\ tels\ que\ a \leq x \leq b,\ et\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Alors

$$\int_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$D = \left\{(x, y);\ tels\ que\ 0 \leq x \leq 1,\ et\ -x^2 \leq y \leq x^2\right\}$$



$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy \right) dx$$

l'aire par exemple de D est le résultat obtenu quand on prend $f(x,y) = 1$:

$$Aire(D) = \int_D 1dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Définition

On appelle forme différentielle dans $U \subset \mathbb{R}$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme

$$\omega(x) = f(x)dx$$

On appelle forme différentielle dans $U \subset \mathbb{R}^2$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme (ici $x = (x_1, x_2)$)

$$\omega(x) = \begin{cases} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 \quad d^o\ 1 \\ ou \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 \quad d^o\ 2 \end{cases}$$

On appelle forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^3$ toute quantité mathématique s'écrivant sous la forme (ici $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$\omega(x) = \begin{cases} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3\ ,\ d^o\ 1 \\ ou \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 + f_2(x)dx_2 \wedge dx_3 + f_3(x)dx_3 \wedge dx_1\ ,\ d^o\ 2 \\ ou \\ \omega(x) = f_1(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\ ,\ d^o\ 3 \end{cases}$$

La quantité $dx_1 \wedge dx_2$ s'appelle produit tensoriel de dx_1 et dx_2. Il vérifie

$$\boxed{\begin{array}{c}(dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 = dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ \textit{et} \\ dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1\end{array}}$$

D'où

$$dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

Et donc toute forme différentielle définie sur $U \subset \mathbb{R}^N$ et de degré supérieur à N **est nulle.** Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ on a: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0$

Formes différentielles de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(U)$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N$$

$$= \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

est une forme différentielle de degré 1.

forme différentielle exacte

Une forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$,
$\omega(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + ... + f_N(x)dx_N$ est dite **exacte** si il existe une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(U)$ telle que

$$\boxed{\omega(x) = df(x) \ , \forall x \in U}$$

c'est à dire telle que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x) \ , \forall i = 1, ..., N}$$

La fonction f est dite une **primitive** de ω.
Exercice : $\omega(x, y) = ydx + xdy$ définie dans $\mathbb{R}^2$ est-elle exacte?

On cherche $f(x,y)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f(x,y)(= yx + c(y) \\ et \\ x + c'(y) = x \end{cases}$$

c'est à dire $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k = constante$

$$f(x,y) = xy + k \ , \ k \ constante \ quelconque$$

On cherche $f(x,y)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y)(= yx + c(y) \\ et \\ x + c'(y) = x \end{array}\right.$$

c'est à dire $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k = constante$

$$f(x,y) = xy + k \ , \ k \ constante \ quelconque$$

On conclut que la forme différentielle $\omega(x,y) = ydx + xdy$ **est exacte dans** $\mathbb{R}^2$. Exercice : $\omega(x,y) = xdx + ydy$ définie dans $\mathbb{R}^2$ est-elle exacte?

Forme différentielle fermée

Une forme différentielle $\omega(x) = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + ... + f_N(x)dx_N$ est dite fermée si

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \ , \forall i, j = 1, ..., N}$$

Dans $\mathbb{R}^2$ une forme différentielle $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est **fermée** si

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Dans $\mathbb{R}^3$ une forme différentielle
$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ est **fermée** si

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z)$$

Theoreme de Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

La forme différentielle ω est donc fermée.

Chemin

On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ toute application continue

$$\left\{\begin{array}{rl} \gamma & : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \gamma(t) \end{array}\right.$$

Chemin

On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ toute application continue

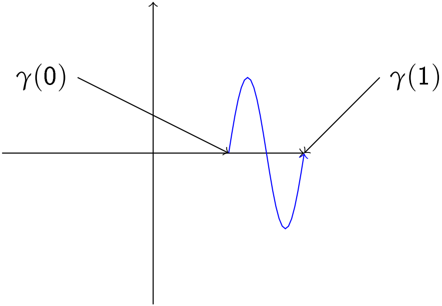
$$\begin{cases} \gamma & : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \gamma(t) \end{cases}$$

$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ est aussi appelé le chemin. C'est une courbe dans le plan d'extrémité les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

On appelle chemin dans $\mathbb{R}^2$ toute application continue

$$\begin{cases} \gamma & : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ & \quad t \to \gamma(t) \end{cases}$$

$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ est aussi appelé le chemin. C'est une courbe dans le plan d'extrémité les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.
Dans l'exemple ci dessous $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec
$x(t) = 1 + t$, *et* $y(t) = \sin(2\pi t)$



Définition

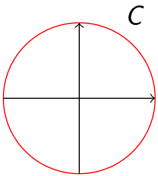
Soient ω une FD exacte et f une primitive de ω. Si $\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré (chemin) de U alors on a:

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

On en déduit que si le chemin est fermé, c'est dire $\gamma(1) = \gamma(0)$ alors

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Le chemin défini par $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ vérifie $\gamma(0) = (1,0)$ et $\gamma(1) = (1,0)$



Exercice

Calculer $\int_C \omega$ pour $\omega(x,y) = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$.

$$\int_C \omega = \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

Sur C

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2\pi t) & \Rightarrow \quad dx = -2\pi\sin(2\pi t)dt \\ et & \\ y(t) = \sin(2\pi t) & \Rightarrow \quad dy = 2\pi\cos(2\pi t)dt \end{cases}$$

$$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{2\pi\sin^2(2\pi t) + 2\pi\cos^2(2\pi t)}{1} dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\right) dt$$

$$= 2\pi$$

Elle n'est donc pas exacte, car si elle l'était, son intégrale sur le contour C serait nulle. **Pourtant elle est fermée.**

Exercices

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes, dans ce cas les intégrer (En trouver des primitives):

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_3 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$

Solutions de 1

Pour la première $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$. On voit que ω_1 est fermée. En effet $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.
Cherchons une fonction $f(x,y)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = \omega_1$, c'est à dire telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \\ et \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \end{cases}$$

La deuxième identité donne $f(x,y) = x^2y + c(x)$. Reporté dans la première $2xy + c'(x) = 2xy$ et donc $c'(x) = 0$ qui veut dire que $c(x) = k$.

$$f(x,y) = x^2y + k$$

ω_1 est donc exacte.

Solutions de 2 et 4

On voit que ω_2 n'est pas fermée. Elle n'a aucune chance d'être exacte (parce que exacte $\Rightarrow$ fermée).
On voit que ω_3 n'est pas fermée. Elle n'a aucune chance d'être exacte (parce que exacte $\Rightarrow$ fermée).

Solution de 4

On vérifie facilement que f est fermée. Elle peut être exacte. Cherchons donc $f(x, y, z)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz^2 \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz^2 + z \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

La première équation donne

$$f(x, y, z) = xyz^2 + g(y, z)$$

On remplace dans la deuxième

$$xz^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = xz^2 + z.$$

C'est à dire

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z.$$

On l'intègre

$$g(y, z) = yz + c(z)$$

$f(x, y, z)$ devient

$$f(x, y, z) = xyz^2 + yz + c(z).$$

On reporte dans la troisième équation:

$$2xyz + y + c'(z) = 2xyz + 2z + y$$

$$c'(z) = 2z \;\Rightarrow\; c(z) = z^2 + k$$

Conclusion: $f(x, y, z) = xyz^2 + yz + z^2 + k$

Exercices

En coordonnées polaires on a

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$

1. Calculer dx et dy et fonction de dr et $d\theta$
2. Calculer $dx \wedge dy$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

DEF 2: Soit $\omega = Pdx$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy}$$

Définition: Différentielle extérieure d'une forme différentielle

DEF 1: Si $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est une fonction de classe C^1 (c'est à dire une forme différentielle de degré 0) sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$, alors la différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 1 définie par:

$$\boxed{d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N}$$

DEF 2: Soit $\omega = Pdx$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy}$$

DEF 3: Soit $\omega = Qdy$ une forme différentielle sur $U \subset \mathbb{R}^2$ de degré 1. La différentielle extérieure de ω est la forme différentielle de degré 2:

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy}$$

Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$ alors

$$d\omega = d(Pdx) + d(Qdy) = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$

c'est à dire

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Si $\omega = Pdx$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx$$

c'est à dire :$d\left(Pdx\right) = \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy$ de même pour les FD de la forme Qdy et Rdz

$$d\left(Qdy\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz;\ d\left(Rdz\right) = \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d\left(Pdx\right) = \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy \\[2ex] d\left(Qdy\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz \\[2ex] d\left(Rdz\right) = \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx \end{array}}$$

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$ alors

Si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est une FD de degré 1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$ alors

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega = &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}}$$

Dans $U \subset \mathbb{R}^2$ on a pour $\omega = Pdx + Qdy$

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \ , \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx \wedge dy = rdr \wedge d\theta$$

Lemme de Poincaré

$$\boxed{\text{Pour toute forme } \omega \text{ définie sur un ouvert } U \subset \mathbb{R}^N \text{ on a : } d\left(d\omega\right) = 0}$$

Par exemple si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$
$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ et donc d'après Schwarz :

$$d\left(df\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dx \wedge dy = 0$$

Corollaire 1

1. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Alors
$$rot(\nabla f) = 0$$
2. Soit V un champ de vecteurs de classe C^2 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Alors
$$div(rotV) = 0$$

Définition + corollaire 2

Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ est dit **étoilé** (en $a \in U$)si

$$\forall x \in U \ , \quad [a, x] \subset U$$

Corollaire 2 : Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert étoilé en un point $a \in U$. Soit ω une FD de degré $p \geq 1$ de classe C^1 sur U. Alors on a l'équivalence suivante

$$\boxed{d\omega = 0 \Leftrightarrow \omega \ exacte.}$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

Écrire $dx \wedge dy$ en fonction de $dr \wedge d\theta$

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \ , \quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx \wedge dy = rdr \wedge d\theta$$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta\sin\varphi, \quad , z = r\cos\theta$$

Écrire $dx \wedge dy \wedge dz$ en fonction de $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$

Exercice: Si on fait le changement de variables

$$x(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y(r,\theta)=r\sin\theta\sin\varphi,\quad ,z=r\cos\theta$$

Écrire $dx\wedge dy\wedge dz$ en fonction de $dr\wedge d\theta\wedge d\varphi$

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta\ ,\quad dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$$

D'où

$$\begin{aligned}dx\wedge dy&=(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)\wedge(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)\\&=r\cos^2\theta dr\wedge d\theta-r\sin^2\theta d\theta\wedge dr\\&=r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)dr\wedge d\theta\end{aligned}$$

C'est à dire

$$dx\wedge dy=rdr\wedge d\theta$$

Formule de Green-Riemann

Soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une FD de degré 1, de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$
Soit D un domaine compact de U délimité par un lacet simple C, orienté dans le sens trigonométrique et C^1 par morceaux.
Alors

$$\boxed{\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x,y) = 3x, \quad Q(x,y) = x+y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3x dx + (x+y) dy.$$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x,y) = 3x, \quad Q(x,y) = x+y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3x dx + (x+y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0:2\pi]$ $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Solution:

Ici

$$P(x,y) = 3x, \quad Q(x,y) = x+y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x+y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0:2\pi]$ $\left\{\begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array}\right. \quad ======\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx = -\sin\theta d\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{array}\right.$

Exercice

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
Solution:
Ici

$$P(x,y) = 3x, \quad Q(x,y) = x+y$$

La circulation du vecteur V est donnée par:

$$I = \int_C 3xdx + (x+y)dy.$$

On pose pour $\theta \in [0:2\pi]$ $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -\sin\theta d\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-3\cos\theta\sin\theta + (\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin 2\theta + \cos^2\theta)\right) d\theta = \pi$$

Autre méthode:
$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ et donc, d'après le formule de Green-Riemann, il suffit de calculer $\int_{B(O,1)} 1dxdy$ qui n'est autre le volume de la boule unité.

Calculer le travail W de la force $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $(x = \cos t, y = \sin t, z = t)$ où $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Définition: Le travail d'une force $\vec{F} = (P, Q, R)$ le long d'un chemin H est donné par

$$\int_H \vec{F}.\vec{dl} = \int_H Pdx + Qdy + Rdz$$

Ici :

$$dx = -\sin t dt; dy = \cos t dt; dz = dt$$

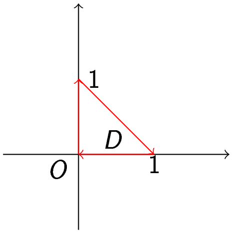
et donc

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t \cos t\right) dt$$

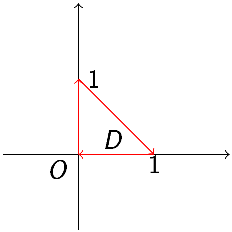
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt = \frac{\pi}{8}$$

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.



En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, | x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1\}$.

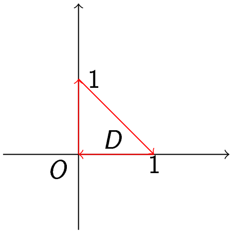


On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire:

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.

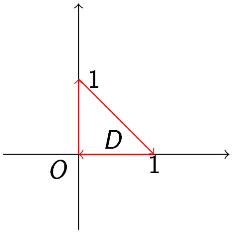


On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire: $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$.

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \int_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.



On cherche une forme différentielle de degré 1 telle que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy.$$

On peut choisir par exemple $P = 0$ et il reste $\frac{\partial Q}{\partial x} = xy$ c'est à dire: $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y$. Green-Riemann donne

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}$$