Exercice 1

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz.$

Solution

1. Le domaine de définition de ω_1 étant étoilé, alors il suffit de vérifier si la forme ω_1 est fermée.

$$P(x, y) = 2xy \ , \quad Q(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \ , \quad et \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Donc la FD ω_1 est fermée donc exacte.
Il existe donc une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\omega_1 = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

On écrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad (1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 \quad (2) \end{cases}$$

d'où d'après la ligne (1)

$$f(x, y) = x^2y + c(y)$$

On dérive par rapport à y et on remplace dans la ligne (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2$$

ce qui donne $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = cte = k$ Conclusion

$$f(x, y) = x^2y + k$$

2. Pour $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$ on a

$$P(x, y, z) = xy \ , \quad Q(x, y, z) = -z \ , \quad R(x, y, z) = xz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

La FD ω_2 n'est pas fermée, elle ne peut donc être exacte.

3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
n'est pas fermée donc n'a aucune chance d'être exacte.

4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz.$ On vérifie facilement que

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{array}}$$

La FD ω_4 est exacte. On cherche alors une fonction f de classe C^1 telle que

$$\omega_4 = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

D'où le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz^2 \quad (1) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z \quad (2) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \quad (3) \end{cases}$$

(1) donne $f(x, y, z) = xyz^2 + g(y, z)$ qu'on dérive par rapport à y et on remplace dans l'équation (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = xz^2 + z$$

D'où

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z$$

et donc

$$g(y, z) = yz + c(z)$$

Récapitulons

$$f(x, y, z) = xyz^2 + yz + c(z)$$

On dérive par rapport à z et on remplace dans l'équation (3)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + y + c'(z) = 2xyz + 2z + y$$

d'où $c'(z) = 0$ et donc $c(z) = cte = k$
On conclut alors que :

$$f(x, y, z) = xyz^2 + yz + k$$

Exercice 2

Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$

1. Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur C_1 de diamètre $[AB]$ de $A(1, 2)$ vers $B(3, 4)$.

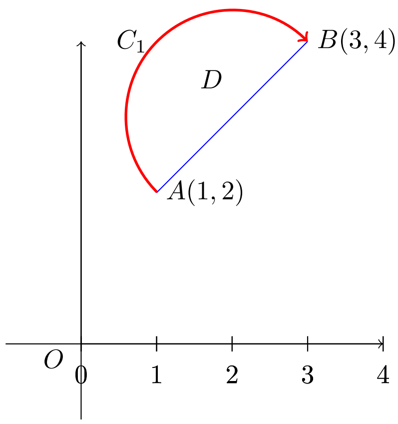

Figure 1 – Le domaine D

Solution

1. Comme le domaine est étoilé il suffit de démontrer que ω est fermée.
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ alors ω est exacte.

2. Première méthode : On cherche f de classe C^1 telle que $\omega = df$ c'est à dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2 \quad (1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne $f(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2 + c(y)$ On dérive par rapport à y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y + c'(y)$$

et on remplace dans (2)

$$3xy^2 - 6x^2y + c'(y) = 3xy^2 - 6x^2y$$

qui donne $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = Cte = k$

$$f(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2 + k = xy^2(y - 3x)$$

$$W = \int_{C_1} \omega = \int_{C_1} df = f(B) - f(A) = f(3,4) - f(1,2)$$

$$W = 3 * 16 * (4 - 9) - 4(2 - 3) = 4 - 15 * 16 = -236$$

Comme ω est exacte alors

$$\int_{C_1} \omega + \int_{BA} \omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Exercice 3

On considère le champ vectoriel

$$V(x,y) = (1 + 2xy, x^3 - 3).$$

Ce champ est-il un champ de gradient ?

Solution

La forme différentielle associée

$$\omega = 1 + 2xydx + (x^3 - 3)dy$$

n'est pas exacte. Le champ vectoriel V n'est donc pas un gradient.

Exercice 4

Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Solution

Le champ vectoriel V qui dérive du potentiel U est

$$V(x,y,z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (1 + y + yz, x + xz, xy)$$

Exercice 5

Calculer la circulation du champ vectoriel $V(x,y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Solution

La circulation de V le long du cercle $C(O,1)$ peut se calculer de deux manières différentes :

1. Calcul direct :

$$I = \int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_C 3xdx + (x+y)dy$$

On termine les calculs en passant aux cordonnées polaires sur le cercle

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = -\sin\theta d\theta \\ dy = \cos\theta d\theta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-3\cos\theta\sin\theta + (\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin(2\theta)\right) d\theta = \pi$$

2. Par la formule de Green-Riemann, $D = B(O,1)$:

$$I = \int_C (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \int_D 1dxdy = Aire(D) = \pi$$

Exercice 6

Calculer le travail W de la force $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par

$$x = \cos t\ ,\quad y = \sin t\ ,\quad z = t\ ;\quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Solution

1. Calcul direct :

$$W = \int_H \vec{F}.\vec{dl} = \int_H Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\boxed{dx = -\sin t dt\ ,\quad dy = \cos t dt\ ,\quad dz = dt}$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \cos t \sin t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t\frac{1}{2}\sin(2t)\right)' dt$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

2. En remarquant que la forme différentielle associée

$$\omega = yzdx + zxdy + xydz$$

est exacte, en effet :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Et donc on cherche f telle $\omega = df$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = zx & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy & (3) \end{cases}$$

On trouve que

$$f(x,y,z) = xyz + k$$

et donc

$$W = f(B) - f(A)$$

où

— $A(1,0,0)$ est le point correspondant à $t = 0$ et

— $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ le point correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$.

$$W = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) - f(1, 0, 0) = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 7

On donne le champ vectoriel

$$V(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel $U(x, y, z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.
3. Quelle est la circulation de ce champ de $A(0, 1, 0)$ $B(\frac{\pi}{2}, 3, 0)$?

Solution

1. En posant

$$P = y^2 \cos x \ , \quad Q = 2y \sin x + e^{2z} \ , \quad R = 2ye^{2z}$$

on vérifie facilement que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

et donc V dérive d'un potentiel (c'est à dire que V est un champ de gradient)

2. On cherche une fonction $U(x, y, z)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \cos x & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x + e^{2z} & (2) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 2ye^{2z} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow U = y^2 \sin x + g(y, z)$$

On dérive par rapport à y et on remplace dans (2)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 2y \sin x + e^{2z}$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = e^{2z}$$

et donc

$$g(y, z) = ye^{2z} + c(z)$$

c'est à dire

$$U(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + c(z)$$

On dérive par rapport à z et on remplace dans (3)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2ye^{2z} + c'(z) = 2ye^{2z}$$

il reste $c'z) = 0$ c'est à dire $c(z) = Cte = k$ et

$$U(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + k$$

Le potentiel qui prend la valeur 1 en $(0, 0, 0)$ est

$$\boxed{U(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + 1}$$

Exercice 8

On considère la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy.$$

1. Montrer que ω n'est pas exacte.
2. Trouver une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi\omega = df$. Préciser alors f . (On dit que ψ est un facteur intégrant.)

Solution

1. La forme différentielle ω n'est pas exacte, puisqu'elle n'est pas fermée.
2. On pose
$$\omega_1 = \psi(x)\omega = \psi(x)(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\psi(x)$$
Et on impose que cette nouvelle FD est exacte , c'est à dire que
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \ on \ \ a \ \ : \ \ 2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$$
Qui donne
$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ on \ \ a \ \ : \ \ \psi'(x) = \psi(x)$$
c'est à dire
$$\psi(x) = ke^x$$
On cherche f telle que
$$df = ke^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2kye^x$$
On cherche $g = \frac{f}{k}$ pour alléger l'écriture et on multiplie par k à la fin. On doit avoir
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x) \quad (1) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2ye^x \quad (2) \end{cases}$$
On intègre l'équation (2)
$$g(x, y) = y^2e^x + c(x)$$
On dérive par rapport à x et on remplace dans l'équation (1) :
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2e^x + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$
Il reste
$$c'(x) = e^x(x^2 + 2x) = \frac{d}{dx}(x^2e^x)$$
D'où $c(x) = x^2e^x + \alpha$ et on conclut que
$$g(x, y) = (x^2 + y^2)e^x + \alpha$$
et donc
$$\boxed{f(x, y) = k(x^2 + y^2)e^x + \beta}$$

Exercice 9

Soit
$$\omega = (x + y)dx + (x - y)dy.$$
Calculer l'intégrale curviligne de ω le long de la demi-cardioïde d'équation en polaire
$$r = 1 + \cos\theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi]$$
.

Solution

La forme différentielle ω est exacte, $\omega = df$ où
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + xy + k$$
Donc
$$\int_C \omega = \int_C df = f(O) - f(A) = f(0, 0) - f(2, 0) = 0$$

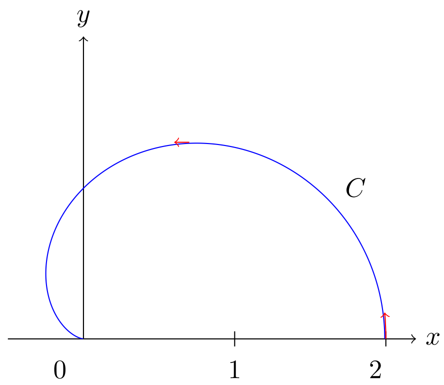

FIGURE 2 – Demi-cardioïde

Exercice 10

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = ydx + 2xdy$ sur le contour du domaine défini par :

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \end{cases}$$

parcouru une fois en sens direct.

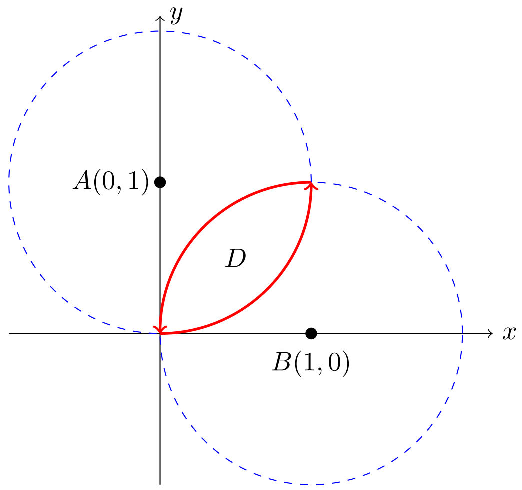

FIGURE 3 – D est l'intersection des deux disques