Série n°5

Intégrales multiples

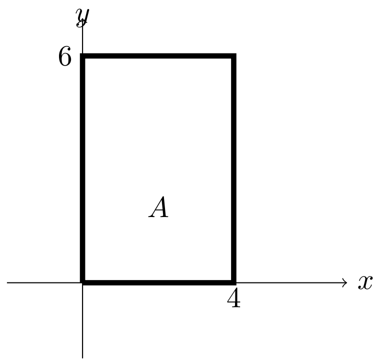
Exercice 1

Donner la représentation graphique de A et calculer l'intégrale $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2\}$ et $f(x,y) = x + y$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\}$ et $f(x,y) = x + y$

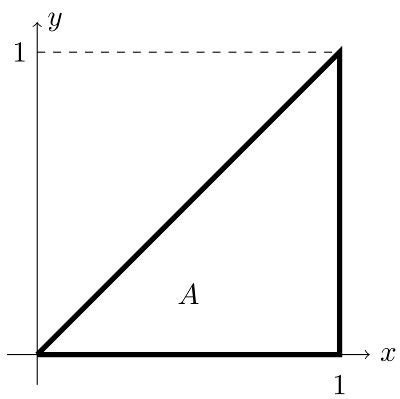
Solution

1. Tracer un rectangle.



$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 dx$$
$$= \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1$$

2. Tracer un triangle (j'ai changé d'échelle).



3. Calcul de l'intégrale :

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}$$

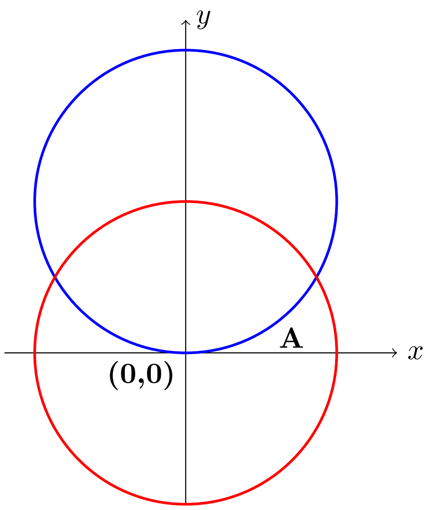
Exercice 2

Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-2y \geq 0,\, x^2+y^2-1 \leq 0,\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Donner la représentation graphique de A.
2. Calculer en utilisant le changement de variable approprié l'intégrale $I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

Solution

1. La figure de A est la partie extérieure au cercle $C((0,1),1)$ et intérieure au cercle $C((0,0),1)$.



2. On pose

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

Pour chaque $r \in [0,1]$ l'angle θ peut varier de 0 jusqu'à un certain angle $\theta(r)$ dépendant de r. En cet angle et à la distance r on a

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ x^2+y^2 = 2y \end{cases} \tag{2}$$

et donc

$$y = \frac{r^2}{2} = r\sin\theta(r)$$

c'est à dire :

$$\sin\theta(r) = \frac{r}{2}$$

ou encore

$$\theta(r) = \arcsin\frac{r}{2}$$

$$\begin{aligned}
I = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\theta(r)} \sqrt{r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\theta(r)dr \\
&= \int_0^1 r^2 \arcsin\frac{r}{2}dr
\end{aligned}$$

On pose $\frac{r}{2} = \sin t$ et donc $dr = 2\cos t dt$ On :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} r=0 & \Longrightarrow & \sin t = 0 & \Longrightarrow & t=0 \\ r=1 & \Longrightarrow & \sin t = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & t = \frac{\pi}{6} \end{array}}$$

$$I = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin^2 t\cos t dt$$

On pose par parties :

$$\begin{cases} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \sin^2 t\cos t \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin^3 t \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\frac{I}{8} &= \frac{1}{3}\left[t\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}\sin^3 t dt \\
&= \frac{1}{3}\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1-\cos^2 t\right) sint dt \\
&= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t sint dt\right) \\
&= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{3}\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 1\right)
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{I = \frac{\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{16}{3}}$$

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale $I = \iint_D x^y\, dx\, dy$ avec $D = [0,1]\times[a,b]$, $b > a > 0$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$

Solution

1. On intègre selon x puis selon y dans cet ordre.

$$I = \iint_D x^y\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy$$
$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2. On intègre selon y puis selon x

$$I = \iint_D x^y\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

On déduit de (1) que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Exercice 4

Déterminer la représentation graphique de A et calculer son aire dans les cas suivants :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x + y| \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Solution

1. Le graphe :

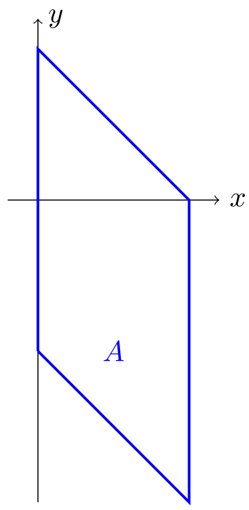


FIGURE 1 – Le graphe de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x + y| \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$

$$Aire(A) = \iint_A 1dxdy = \int_0^1 1\left(\int_{-1-x}^{1-x} 1dy\right)dx = \int_0^1 (1-x+1+x)dx = \int_0^1 2dx = 2$$

2. Le graphe de A de cette question est dans la solution de l'exercice 2.

$$Aire(A) = \iint_A 1dxdy = \int_0^1 \int_0^{\theta(r)} rdrd\theta$$
$$= \int_0^1 r\theta(r)dr = \int_0^1 r\arcsin\frac{r}{2}dr$$

On pose $\frac{r}{2} = \sin t$ et donc $dr = 2\cos tdt$

$$Aire(A) = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin t\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2t\sin(2t)dt$$

On pose

$$\boxed{\begin{array}{llll} u = t & et & donc & u' = 1 \\ v' = 2\sin(2t) & et & donc & v = -\cos(2t). \end{array}}$$

D'où

$$Aire(A) = [uv]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} u'vdt$$

$$Aire(A) = [-t\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)dt$$

$$-\frac{\pi}{6}\cos(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}[\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$$Aire(A) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}$$

SI CE N'EST PAS FAUX C'EST QUE C'EST JUSTE !

Exercice 5

Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iiint_A \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

Solution

On passe aux coordonnées sphériques :

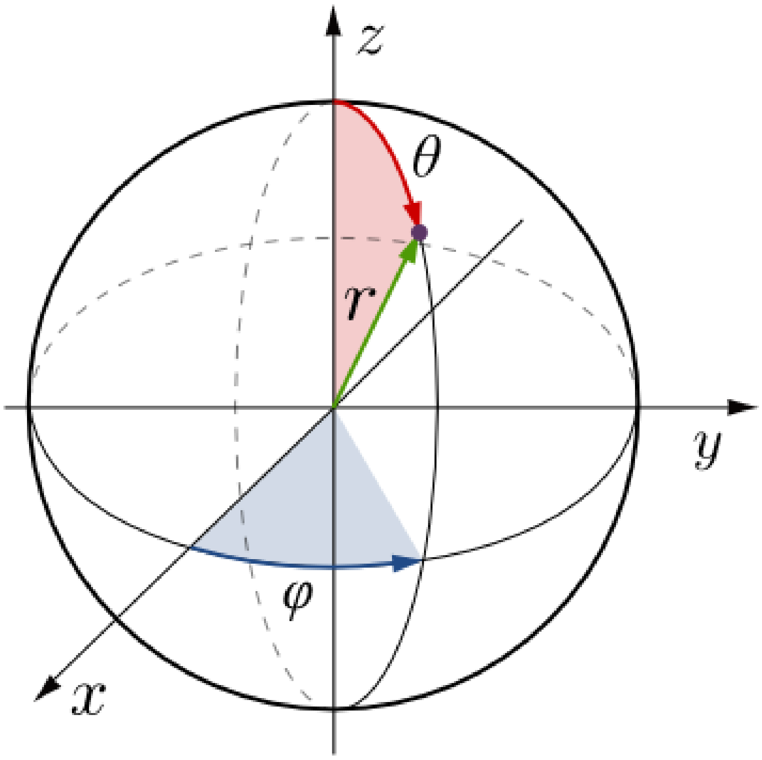


Figure 2 – Coordonnées sphériques

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$$

et donc

$$\boxed{\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ dy = \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{cases}}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}}$$

Quand on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques $dxdydz$ est remplacé par $det(J)drd\theta d\varphi$.
On calcule le déterminant de la matrice J, et si on ne se trompe pas on obtient.

$$\det(J) = r^2\sin\theta$$

Calculons l'intégrale :
$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$ correspond à $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ correspond à $0 \leq r \leq 1$.

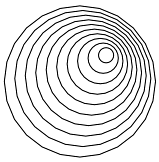
$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^3 \sin\varphi \cos\varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$
$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{9}$$

Exercice 6

On pose
$$I = \iiint_A xyz\, dx\, dy\, dz$$
avec
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \leq 0,\, y \leq 0,\, 0 \leq z \leq 1 \text{ et } z^2 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

1. Ecrire I sous la forme $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} z \left(\iint_{D_z} xy\, dx\, dy\right) dz$,en précisant z_1, z_2 et D_z.
2. Par passage en coordonnées polaires calculer $\displaystyle\iint_{D_z} xy\, dx\, dy$.
3. En déduire la valeur de I.



1.

Solution

$$I = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} xy\, dx\, dy\right) dz \text{ avec}$$

$$D_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

2. $\iint_{D_z} xy\, dx\, dy =?$
   On passe aux cordonnées polaires
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
   avec, puisque x et y sont négatifs et $x^2 + y^2 = r^2 \leq z^2$
$$0 \leq r \leq z\ , \quad et \quad \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\iint_{D_z} xy\,dx\,dy = \int_0^z \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta$$
$$= \frac{z^4}{4}\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{z^4}{8}$$

3. La calcul de l'intégrale globale

$$I = \int_0^1 \frac{z^4}{8} dz = \frac{1}{40}$$

Exercice 7

Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \text{ avec } a,b,c > 0.$$

1. Calculer le volume de V.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$.

Exercice 8

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (X,Y)$.

1. Vérifier que$X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2)^2$.
2. Calculer le Jacobien de ϕ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \text{ et } 1 \leq xy \leq 2\}$.
   a) Donner la représentation graphique de D.
   b) En utilisant le changement de variables $X = x^2 - y^2$, $Y = 2xy$, calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^3\,dx\,dy$.

Exercice 9

On considère l'intégrale $I_a = \displaystyle\iint_{A_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ avec $A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$.

1. Calculer I_a en fonction de a. En déduire $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I_a$.
2. On considère le rectangle $R_a = [-a,a] \times [-a,a]$ et $J_a = \displaystyle\iint_{R_a} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.Calculer l'intégrale simple $\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ en fonction de J_a.

3. En utilisant les questions 1 et 2, calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

Exercice 10

1. a) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\iint_{C_n} e^{-x}\cos y\,dx\,dy$ avec $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le x \le n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) En déduire $I = \displaystyle\iint_{C} e^{-x}\cos y\,dx\,dy$ avec $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le x\}$.

2. a) Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_{D_n} (x-y)\cos(x+y)\,dx\,dy$ avec $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x-y \le x+y \le n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\iint_{D} (x-y)\cos(x+y)\,dx\,dy$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x-y \le x+y\}$.