Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ANALYSE 4, TD4 Pr. H. EL AMRI

Exercice 0.0.1. *Soit f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que f possède en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions*
3. *Montrer que f n'est pas dérivable en $(0,0)$.*

Exercice 0.0.2. *Soit f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées suivant toute direction en $(0,0)$*
3. *Calculer $\nabla f(0,0)$*
4. *f est-elle différentiable en $(0,0)$?*

Exercice 0.0.3. *Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant la direction $(1,-2)$ au point $(2,1)$.*

Exercice 0.0.4. *Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = ye^x$ au point $(0,3)$ suivant les direction*

1. $\theta = \frac{\pi}{6}$
2. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 0.0.5. *Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes et donner leur nature :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(ax,y) = y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
7. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$
8. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
9. $f(x,y) = y(x^2 + (\log y)^2)$ *(donner le domaine de définition)*
10. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 0.0.6. *(Le contre exemple de Peano) Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 \quad si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3}$$

1. *Montrer que f est continue en $(0,0)$*
2. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$*
4. *Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$*
5. *Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$*

Exercice 0.0.7. *Soit $f(x,y)=y^2-x^2y+x^2$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2-1\leq y\leq 1-x^2\}$*

1. *Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.*
2. *Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.*
3. *Déterminer les points critiques de f.*
4. *Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.*
5. *En déduire le minimum et le maximum de f sur D.*

Exercice 0.0.8. *Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.*

1. *$f(x,y)=xy(1-x-y)$ et $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x,y\geq 0, x+y\leq 1\}$*
2. *$f(x,y)=x-y+x^3+y^3$ et $K=[0,1]\times[0,1]$*
3. *$f(x,y)=\sin x\ \sin y\ \sin(x+y)$ et $K=[0,\frac{\pi}{2}]^2$*