Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ANALYSE 4 TD2,
H. EL AMRI

Exercice 0.0.1. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ *pour* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 1$.

1. *f est-elle continue ?*
2. *Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque différent de* $(0,0)$.
3. *La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en* $(0,0)$?

Exercice 0.0.2. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes*

1. $f(x,y) = x^y$ *(avec* $x > 0$*)*
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = x\sin(x+y)$

Exercice 0.0.3. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ , & si\ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
2. *f est-elle continue en* $(0,0)$?

Exercice 0.0.4. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & sinon \end{cases} \tag{2}$$

1. *Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$.
2. *f est-elle continue en* $(0,0)$?

Exercice 0.0.5. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & sinon \end{cases} \tag{3}$$

1. *Justifier que f est continue en* $(0,0)$
2. *Étudier les dérivées partielles de f en* $(0,0)$.

Exercice 0.0.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}$ *pour* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$.

1. *La fonction f est-elle continue en* $(0,0)$?
2. *La fonction admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en* $(0,0)$?
3. *La fonction f est-elle différentiable en* $(0,0)$?
4. *Déterminer les dérivées partielles de f en un point* $(x_0,y_0) \neq (0,0)$
5. *Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point* $(1,1,2)$.
6. *Soit* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. *Déterminer la matrice jacobienne de F au point* $(1,1)$. *La fonction F admet-elle une réciproque au voisinage de* $(2,2)$?

Exercice 0.0.7.

Exercice 0.0.8.