Diagonalisation

A. Ramadane, Ph.D.

Valeurs propres et vecteurs propres

Diagonalisation d’une application linéaire

Diagonalisation d’une matrice symétrique

matrices très importantes

4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Comment trouver une base pour que la matrice associée soit diagonale?

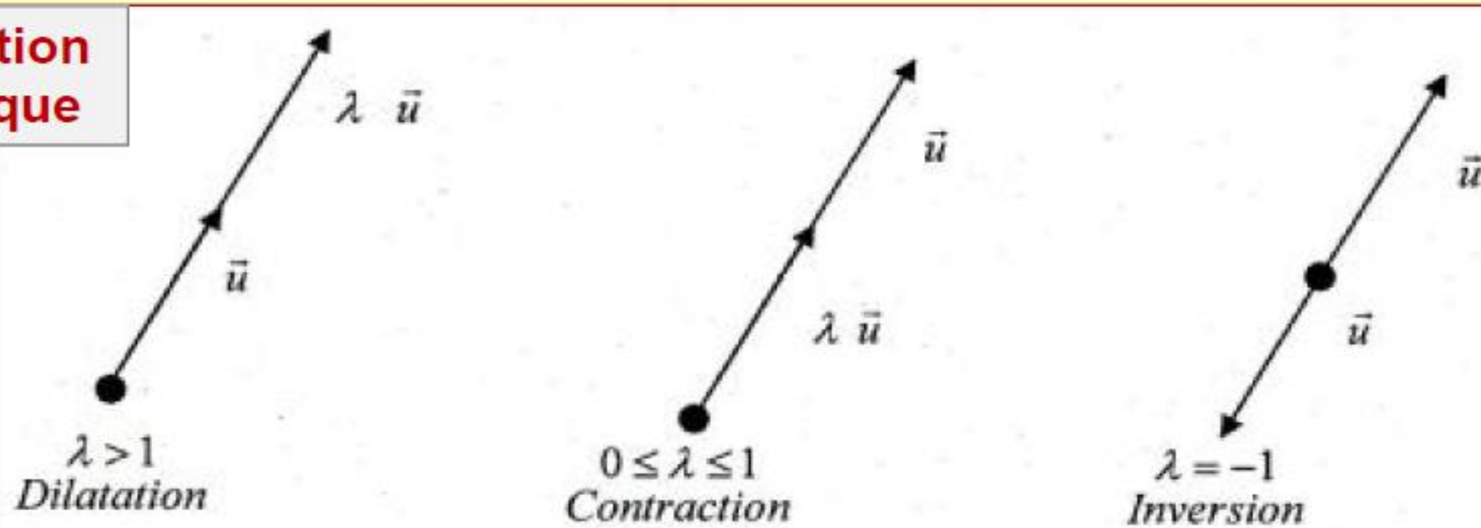
4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 4.1 *Soit V un espace vectoriel et T une application linéaire de V dans V. Un* ***vecteur propre*** *de $T : V \to V$ est un vecteur non nul parallèle à son image, c'est-à-dire*

$$\boxed{T(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u}, \qquad \vec{u} \neq 0}$$

où λ est un réel appelé la ***valeur propre*** *associée au vecteur propre $\vec{u}$.*

Interprétation géométrique



Exemple 4.1 $T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x - z)\vec{i} - (x + z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$

a) $T(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \neq \lambda(\vec{i} - \vec{j})$ $\vec{i} - \vec{j}$ n'est pas un vecteur propre

b) $T(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -2\vec{i} \neq \lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ n'est pas un vecteur propre

c) $T(\vec{i} - \vec{k}) = 2\vec{i} - 2\vec{k} = 2(\vec{i} - \vec{k})$ $\vec{i} - \vec{k}$ est un vecteur propre

avec valeur propre $\lambda = 2$

d) $T(\vec{j}) = \vec{0} = 0(\vec{j})$ $\vec{j}$ est un vecteur propre

avec valeur propre $\lambda = 0$

Définition 4.2 : Soit A une matrice carrée $n \times n$. Un vecteur propre de A est un vecteur colonne $n \times 1$, non nul, tel que

$$AU = \lambda U$$

où λ est un réel appelé la valeur propre associée au vecteur propre U.

Exemple 4.2 soit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

vérifier que

$\vec{u}_1 = (4, 1, -3)^t$ vecteur propre avec valeur propre $\lambda = 1$

$\vec{u}_2 = (3, 1, -2)^t$ vecteur propre avec valeur propre $\lambda = 2$

Caractérisation d'une valeur propre λ_0 d'une application T

$\vec{u}_0 \neq \vec{0}$ vecteur propre associé à λ_0 $T(\vec{u}_0) = \lambda_0 \vec{u}_0$

$$T(\vec{u}_0) - \lambda_0 \vec{u}_0 = \vec{0}$$

$(T - \lambda_0 \vec{id})\, \vec{u}_0 = 0$ id : transformation identité

donc $\vec{u}_0 \in Ker(T - \lambda_0 id)$

Caractérisation d'une valeur propre λ_0 d'une application T

$\vec{u}_0 \neq \vec{0}$ vecteur propre associé à λ_0 $\quad T(\vec{u}_0) = \lambda_0 \vec{u}_0$

$$T(\vec{u}_0) - \lambda_0 \vec{u}_0 = 0$$

$$(T - \lambda_0 id)\, \vec{u}_0 = 0 \qquad \text{id : transformation identité}$$

$$\vec{u}_0 \in Ker(T - \lambda_0 id)$$

- si $T - \lambda_0 id$ est régulière alors $Ker(T - \lambda_0 id) = \{\vec{0}\}$

  alors il n'y a aucun vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $T(\vec{u}) = \lambda_0 \vec{u}$

  et λ_0 n'est pas une valeur propre

- si $T - \lambda_0 id$ est singulière alors $\dim Ker(T - \lambda_0 id) \geq 1$

  alors il existe au moins un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$

  et λ_0 est une valeur propre

<u>cas particulier</u> : si T est singulière alors $\lambda = 0$ est une valeur propre de T et Ker(T) est le sous-espace associé à $\lambda = 0$

Caractérisation d'une valeur propre λ_0 d'une application T

$\vec{u_0} \neq \vec{0}$ vecteur propre associé à λ_0 $\quad T(\vec{u_0}) = \lambda_0 \vec{u_0}$

$\vec{u_0} \in Ker(T - \lambda_0 id)$ $\quad$ id: transformation identité

notation: $E_{\lambda 0} = Ker(T - \lambda_0 id)$ $\quad$ sous-espace du noyau

Écriture matricielle

- λ_0 est une valeur propre $\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda_0 I) = 0$

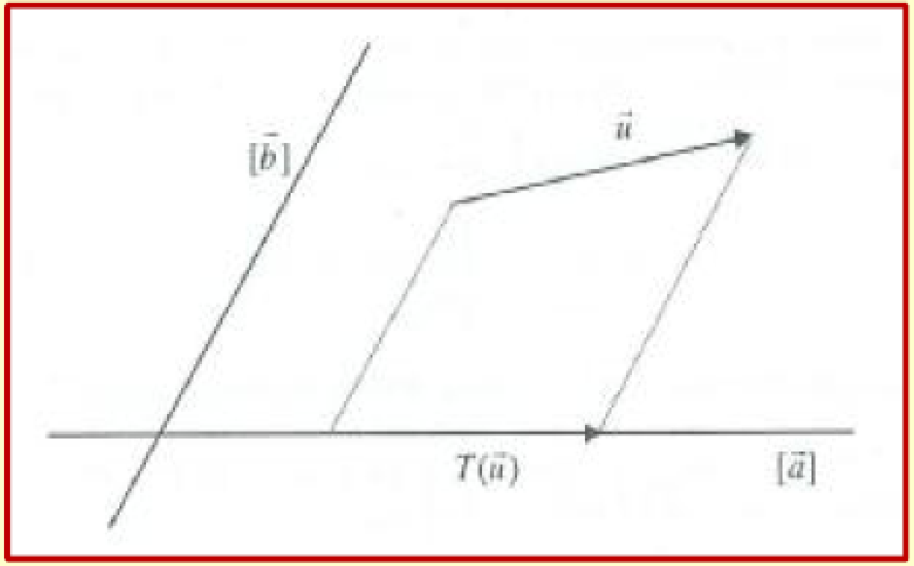
I : matrice identité

- $\vec{u}_0$ est un vecteur propre associé à λ_0 $\Longleftrightarrow$ $(A - \lambda_0 I)\, \vec{u}_0 = \vec{0}$

Exemple 4.4 $T : V^2 \longrightarrow V^2$ projection sur $[\vec{a}]$ parallèlement à $[\vec{b}]$

recherche **directe**
des valeurs propres

= basée sur la
définition de la
transformation



$\vec{u} \in [\vec{b}]$ $T(\vec{u}) = 0 = 0\,\vec{u}$ $\lambda = 0$ valeur propre associée à $\vec{u} \in [\vec{b}]$

$\vec{u} \in [\vec{a}]$ $T(\vec{u}) = 1\,\vec{u}$ $\lambda = 1$ valeur propre associée à $\vec{u} \in [\vec{a}]$

méthode de la recherche directe des valeurs propres et vecteurs propres est très rarement employée en pratique
existe-t-il une autre méthode?

oui, avec le langage matriciel

recherche des valeurs propres

$$A\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u}$$

$$(A - \lambda I)\,\vec{u} = 0$$ système homogène

pour que λ soit une valeur propre : $A - \lambda I$ doit être singulière

$\det(A - \lambda I) = 0$: équation caractéristique de A

polynôme de degré n : polynôme caractéristique de A

si λ est une racine d'ordre k : λ est de multiplicité algébrique k

4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Exemple 4.5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{dét}\,(A - \lambda I) = (3 - \lambda)\,(6 - \lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 7)$$

$\text{dét}\,(A - \lambda I) = 0$ 2 valeurs propres réelles

$\lambda = 2$ de multiplicité 1

$\lambda = 7$ de multiplicité 1

Exemple 4.6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{dét}\,(A - \lambda I) = (2 - \lambda)\,(-2 - \lambda) - 5*(-1)$$

$$= \lambda^2 + 1$$

$\text{dét}\,(A - \lambda I) = 0$ pas de valeurs propres réelles

solution avec des nombres complexes

4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

<u>Exemple</u> 4.7

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}\,(A - \lambda I) &= (5 - \lambda) * [\,(1 - \lambda)*(0 - \lambda) - 1*0\,] \\
&\quad - 0 * [\,1*0 - (-7)*0\,] \quad + \; 1 * [\,1*1 - (-7)*(1 - \lambda)\,] \\
&= (5 - \lambda) * [\,(1 - \lambda)*(-\lambda)\,] \quad + \; 1 * [1 + 7\,(1 - \lambda)\,] \\
&= (5 - \lambda) * [\,-\lambda + \lambda^2\,] \; + \; [\,8 - 7\,\lambda\,] \\
&= -\lambda^3 \; + \; 6\,\lambda^2 - 12\,\lambda \; + 8 \\
&= -(\lambda - 2)^3
\end{aligned}$$

$\text{dét}\,(A - \lambda I) = 0$ $\quad\quad \lambda = 2$ racine triple (ordre 3)

une seule valeur propre de multiplicité 3

<u>remarque</u> : matrice 3 x 3 donne polynôme de degré 3

donc au moins une valeur propre réelle

recherche des vecteurs propres

pour chaque valeur propre λ

les vecteurs propres associés sont dans $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id})$

sous-espace associé noté E_λ

dimension de E_λ = multiplicité géométrique de λ

peut-on prévoir la dimension de E_λ ?

réponse : pas toujours ……. mais on a le résultat suivant

Théorème 20 *Soit A une matrice carrée. La multiplicité géométrique d'une valeur propre de A est plus petite ou égale à sa multiplicité algébrique.*

multiplicité géométrique $\leq$ multiplicité algébrique

si multiplicité algébrique = 1 alors multiplicité géométrique = 1

Exemple 4.8 déterminer les espaces associés à chaque valeur propre de l'application dont la matrice représentative dans la base $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ est

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUTION

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25$$

$$= (\lambda - 5)^2 (1 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ de multiplicité 1

$\lambda_2 = 5$ de multiplicité 2

$\boxed{\text{cas } \lambda_1 = 1}$ trouver le vecteur propre $\vec{u}_1$ correspondant

$\vec{u}_1 = (x, y, z)$ $(A - I)\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$2x \quad -2y \quad +0z = 0$$

$$4z = 0$$

$$y = x \quad z = 0$$

$$(x, y, z)^t = (x, x, 0)^t = x\,(1, 1, 0)^t \qquad x \, \varepsilon \, \bullet$$

$$\vec{u}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

espace vectoriel associé à $\lambda_1 = 1$ est $[\,\vec{u}_1\,]$

multiplicité géométrique $= 1$

cas $\lambda_2 = 5$ trouver le vecteur propre $\vec{u}_2$ correspondant

$$(A - I)\,\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - 2y + 0z = 0$$

$y = -x$ $\quad$ z quelconque

$$(x, y, z)^t = (x, -x, z)^t = x\,(1, -1, 0)^t + z(0, 0, 1)^t \quad x, z\ \varepsilon\ \bullet$$

$$\vec{u}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \vec{b}_3$$

espace vectoriel associé à $\lambda_2 = 5$ est $[\vec{u}_2, \vec{u}_3]$

multiplicité géométrique $= 2$

Exemple 4.9 déterminer les espaces associés à chaque valeur propre de l'application dont la matrice représentative dans la base usuelle $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est

$$A = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

SOLUTION

$$\text{dét}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3/5 - \lambda & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3/5 - \lambda)(3/5 - \lambda) - (4/5)(4/5)$$

$$= -9/25 + (3/5)\lambda - (3/5)\lambda + \lambda^2 - 16/25$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ de multiplicité 1

$\lambda_2 = -1$ de multiplicité 1

$\lambda_1 = 1$

$$(A - I)\,\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -8/5 & 4/5 \\ 4/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -8/5\,x + 4/5\,y &= 0 \\ 4/5\,x - 2/5\,y &= 0 \end{aligned} \quad \text{donne} \quad y = 2x$$

$$(x, y)^t = (x, 2x)^t = x(1, 2)^t \quad x \in \bullet$$

droite vectorielle $[\vec{u}_1]$ $\vec{u}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$

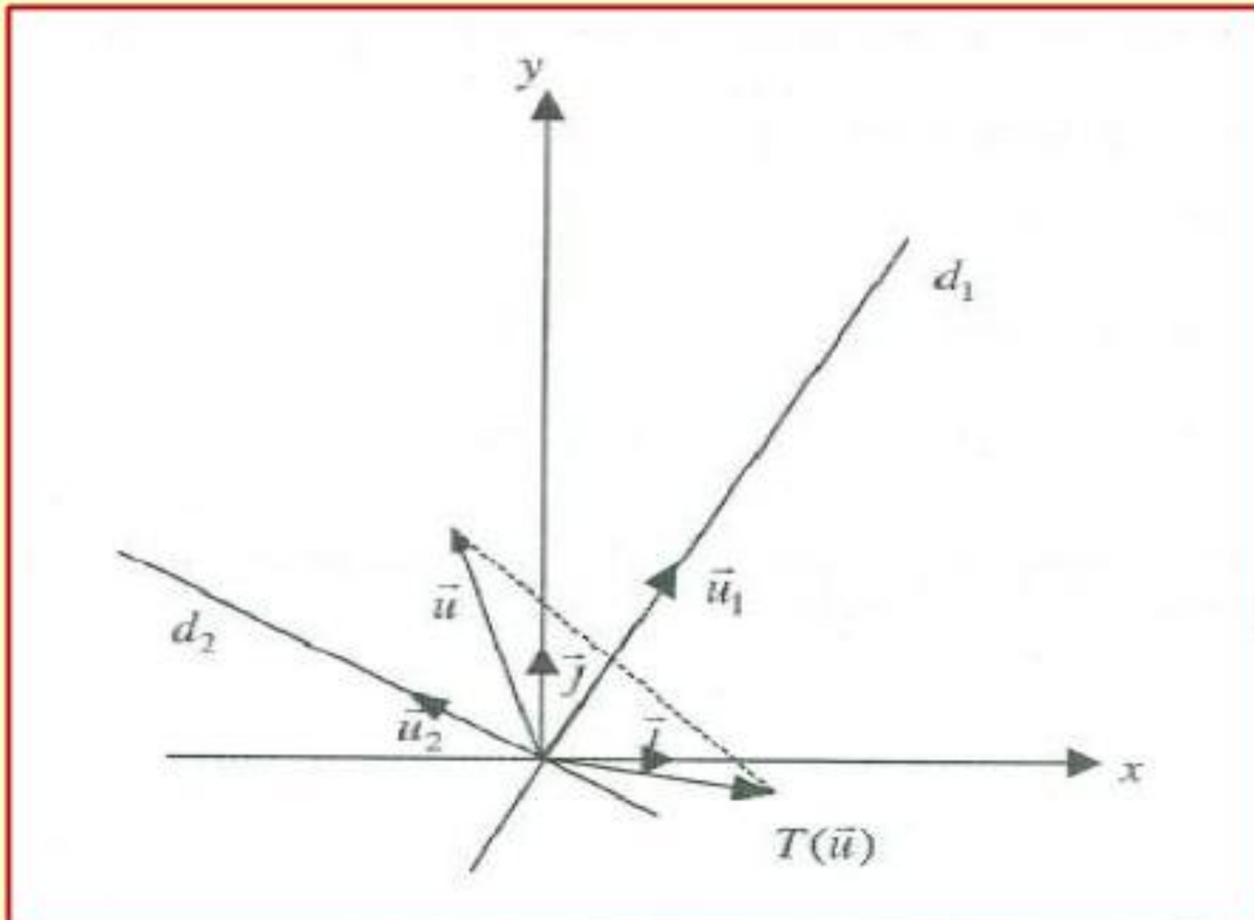
$\lambda_2 = -1$ donne $x = -2y$ $[\vec{u}_2]$ $\vec{u}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$

2 droites d_1 : $y = 2x$ et d_2 : $x = -2y$

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux : $\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$ forment base B'

$T(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 = \vec{u}_1$ et $T(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 = -\vec{u}_2$

matrice de la transformation $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est diagonale



interprétation géométrique de la transformation T :

symétrie orthogonale de $\vec{u}$ par rapport à la droite $[\vec{u}_1]$

4.2 Diagonalisation d'une application linéaire

Définition : *Une application linéaire T est dite diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de T est diagonale. Autrement dit, si T est donnée par sa matrice représentative $[T]_B$ dans la base B, T est diagonalisable s'il existe une base B' dans laquelle*

$$[T]_{B'} = {}_{B'}P_B[T]_B \; {}_B P_{B'}$$

est une matrice diagonale.

En termes matriciels

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice régulière P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale et on dit que P diagonalise A.

$T : V^3 \longrightarrow V^3$ application linéaire

$[T]_B$ matrice représentative base B

si T possède 3 vecteurs propres $\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$ $\vec{u}_3$ linéairement indépendants

alors $\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$ $\vec{u}_3$ forment une base B'

matrice de transition de B' à B $\quad {}_BP_{B'} = [\, [\vec{u}_1]_B \;\; [\vec{u}_2]_B \;\; [\vec{u}_3]_B \,]$

$$T(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 \qquad T(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 \qquad T(\vec{u}_3) = \lambda_3 \vec{u}_3$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Théorème 21 *Si A est une matrice d'ordre $n \times n$ alors*

A diagonalisable $\Leftrightarrow$ *A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Exemple 4.10 déterminer la matrice P qui diagonalise la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{bmatrix}$$

valeurs propres : $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$

équations

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$
$$(2/3) \cdot x + (-2) \cdot y = 0$$

donne $y = x/3$ $\quad x = 3y$ $\qquad \vec{u}_1 = (3, 1)^t$

vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$

équations

$$2 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$
$$(2/3) \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

donne $x = 0$ $\quad y =$ quelconque $\qquad \vec{u}_2 = (0, 1)^t$

matrice P qui diagonalise A est

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

4.2 Diagonalisation d'une application linéaire

Théorème 22 *Si* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ *sont des vecteurs propres de* T *correspondant aux valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *alors l'ensemble* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ *est linéairement indépendant.*

Théorème 23 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n *ayant toutes ses valeurs propres réelles. Alors*

A *diagonalisable* $\Leftrightarrow$ *chaque valeur propre est telle que sa multiplicité algébrique est égale à sa multiplicité géométrique*

multiplicité algébrique = multiplicité géométrique

Exemple 4.13 déterminer si la matrice A est diagonalisable
si possible trouver 3 vecteurs propres linéairement indépendants

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)^2$$

$\lambda_1 = 2$ racine simple $\lambda_2 = 3$ racine double

à priori : A est diagonalisable
3 vecteurs propres linéairement indépendants?

$\lambda_1 = 2$ $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)^t$

$\lambda_2 = 3$ $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)^t$ et $\vec{u}_3 = (-2, 0, 1)^t$

$\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$ $\vec{u}_3$ sont linéairement indépendants

A est diagonalisable matrice P qui diagonalise A

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

4.4 Diagonalisation matrice symétrique

Diagonalisation d'une matrice carré quelconque présentent 2 difficultés:

- valeurs propres sont peuvent être des nombres complexes
- multiplicité géométrique v. p. < multiplicité géométrique v. p.

Cas des matrices symétriques : difficultés ne se posent pas

<u>Définition</u> : une matrice carré A est symétrique si $A^t = A$

La classe des matrices symétriques a <u>beaucoup d'applications</u> géométriques ou physiques.

<u>exemples</u> : projections orthogonales , symétries

THÉORÈME 27 : si A est une matrice réelle symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

THÉORÈME 28 : si A est une matrice réelle symétrique, alors les vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux

4.4 Diagonalisation matrice symétrique

Exemple étude d'une matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

valeur propre	$\lambda = 1$	$\lambda = 4$
multiplicité algébrique	2	1
base de E_λ	$(-1, 0, 1)^t$ et $(-1, 1, 0)^t$	$(1, 1, 1)^t$

THÉORÈME 29 Soit A une matrice réelle symétrique.
ALORS A est diagonalisable
et multiplicité algébrique = multiplicité géométrique

La méthode pour diagonaliser A est simplifiée

$D = P^{-1} A P$ D : matrice diagonale

matrice P est orthogonale $P^{-1} = P^t$

valeur propre	$\lambda = 1$	$\lambda = 4$
multiplicité algébrique	2	1
base de E_λ	$(-1, 0, 1)^t$ $(-1, 1, 0)^t$	$(1, 1, 1)^t$

On remplace la base de E_λ par une base orthonormale

4.4 Diagonalisation matrice symétrique

Exemple

$\lambda = 4$ on remplace $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)^t$ par $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\|$

$= (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

$\lambda = 1$ on remplace $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)^t$ par $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\|$

$= (-\sqrt{2}/2, \; 0, \sqrt{2}/2)$

on utilise de procédé de Gram-Schmidt

$\vec{u}_3 = (-1, 1, 0)^t$ devient $\vec{v}_3 = (-\sqrt{6}/6, 2\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6)^t$

Valeurs propres	$\lambda=1$	$\lambda=4$
Base de E_λ	$\begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-\sqrt{6}/6\\2\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3\\ 0 & 2\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} P.$$

4.4 Diagonalisation matrice symétrique

RÉSUMÉ : propriétés des matrices A symétriques $A^t = A$

- les valeurs propres sont réelles
- les vecteurs propres sont orthogonaux
- A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale D

$$D = P^t A P \quad \text{avec} \quad P^t = P^{-1}$$

- la matrice P peut être obtenue avec les vecteurs propres normalisés de A pour les vecteurs propres de multiplicité 1
- dans le cas de vecteurs propres de multiplicité 2 ou plus on utilise le procédé Gram-Schmidt pour obtenir une ensemble de vecteurs orthonormaux