Matrices orthogonales

A. Ramadane, Ph.D.

Matrices orthogonales

Liaison entre 2 bases orthonormales

Théorème 14 *Soit* $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ *et* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ *deux bases orthonormales d'un espace vectoriel* V .

Alors $({}_B P_A)^t = ({}_B P_A)^{-1}$.

Exemple 2.7 p. 66

Soient base C = (i, j, k) classique et la base $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$\vec{b}_1 = (i - j)/\sqrt{2}$ $\vec{b}_2 = (-i + 2j - k)/\sqrt{6}$ $\vec{b}_3 = (i + j + k)/\sqrt{3}$

On vérifie que les bases C et B sont orthonormales

Déterminer la matrice de passage ${}_B P_C$ **de C à B**

<u>Exemple</u>

Soient base $C = (i, j, k)$ classique et la base $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$\vec{b}_1 = (i - k) /\sqrt{2}$ $\quad\quad$ $\vec{b}_2 = (-i + 2j - k) /\sqrt{6}$ $\quad\quad$ $\vec{b}_3 = (i + j + k) /\sqrt{3}$

On vérifie que les bases C et B sont orthonormales

Déterminer la matrice de passage ${}_BP_C$ de C à B

<u>SOLUTION</u> : la matrice de passage de B à C est

$$ {}_CP_B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} $$

matrice de passage de C à B = inversion matrice de passage de B à C

= transposition matrice de passage de B à C

$$ {}_BP_C = ({}_CP_B)^{-1} = ({}_CP_B)^{t} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} $$

Résultat

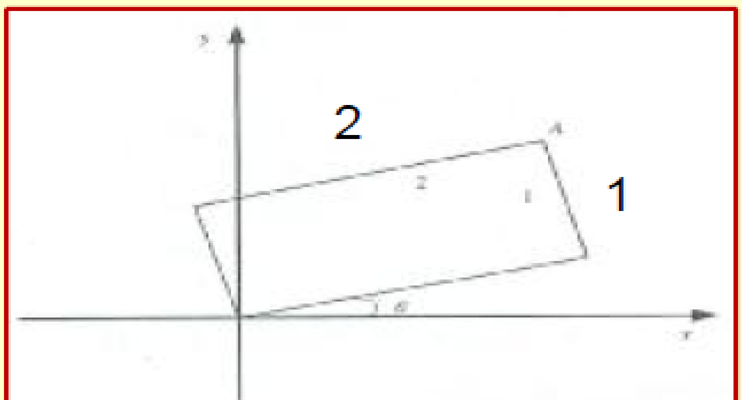
Supposons que A et B sont des bases orthonormales

$({}_BP_A)^t = ({}_BP_A)^{-1}$ alors $\det({}_BP_A)^2 = 1$ et $\det({}_BP_A) = \pm 1$

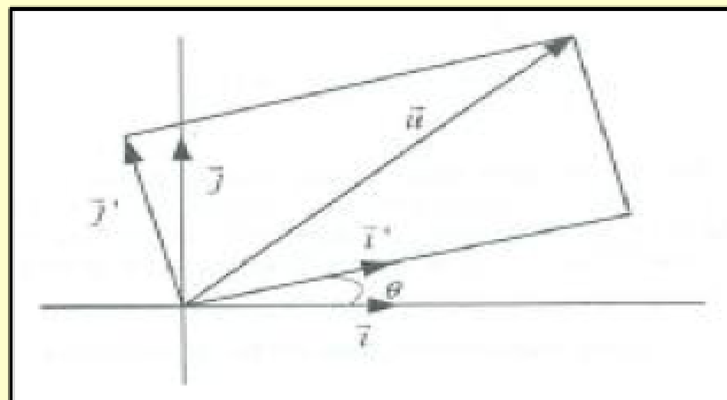
si $\det({}_BP_A) = 1$ A et B ont la même orientation
A et B sont des bases directes
A s'obtient de B au moyen d'une rotation

si $\det({}_BP_A) = -1$ A et B ont des orientations différentes

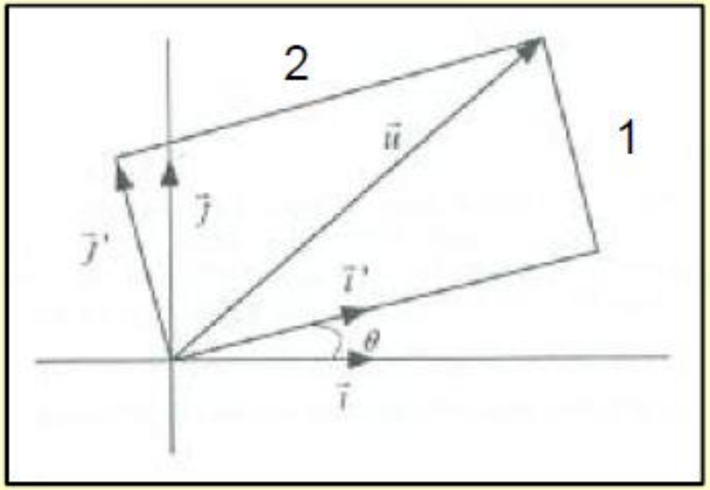
Exemple



base = (i, j)
coordonnées du point A =?



base = (i', j') $\vec{u} = 2i' + j'$



$$\text{base} = (i', j') \qquad \vec{u} = 2i' + j'$$

$$i' = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$$

$$j' = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$$

$${}_{B}P_{B'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\vec{u}]_B &= {}_{B}P_{B'}\, [\vec{u}]_{B'} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos\theta - \sin\theta \\ 2\sin\theta + \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{u} = (2\cos\theta - \sin\theta)\, i + (2\sin\theta + \cos\theta)\, j$$

Matrices orthogonales

Définition *Le* ***produit scalaire de deux vecteurs colonnes***

$$A = [a_1 \ \ a_2 \ \ \ldots \ \ a_n]^t \text{ et } B = [b_1 \ \ b_2 \ \ \ldots \ \ b_n]^t$$

est défini par

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = A^t B = B^t A .$$

Deux vecteurs colonnes sont dits ***orthogonaux*** *si* $A \cdot B = 0$.

Définition *La* ***longueur d'un vecteur colonne*** A ou la norme, *notée* $\|A\|$, *est définie par*

$$\|A\| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}} = \sqrt{A^t A} .$$

Un vecteur colonne est dit ***unitaire*** *si sa longueur est* 1 .

Définition *On appelle* ***matrice orthogonale*** *une matrice carrée A dont les colonnes constituent un ensemble de vecteurs colonnes orthonormal, c'est-à-dire un ensemble orthogonal et unitaire.*

Exemple **matrice orthogonale**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

RÉSUMÉ

- si B et B' sont 2 bases orthonormales alors ${}_{B}P_{B'}$ est orthogonale
  et $({}_{B}P_{B'})^{-1} = ({}_{B}P_{B'})^{t}$
- $\text{dét}({}_{B}P_{B'}) = \pm 1$
- $\text{dét}({}_{B}P_{B'}) = 1$ B' s'obtient de B par rotation et vice versa
- $\det({}_{B}P_{B'}) = -1$ B' s'obtient de B par symétrie + rotation