Exercice d’Algèbre Linéaire

A. Ramadane, Ph.D.

Exercice 1

Soit $U = \{ \vec{u} \in V^3 \,|\, \vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \;\; où \;\; 2x - y + 3z = 0 \}$.

a) Montrer que U est un sous-espace vectoriel de V^3.

b) Donner une base de U et sa dimension.

c) Compléter la base obtenue en b) afin d'obtenir une base de V^3.

Exercice 2

Soit $B=\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\right)=\left(\vec{\imath}-\vec{k},\vec{\imath}-\vec{\jmath},\vec{\jmath}\right)$ une base de V^3.

a) Remplacer B par une base orthogonale B' au moyen du procédé de Gram-Schmidt, et donner la base orthonormale B'' obtenue de B'.

b) Calculer la matrice de transition de B' à B, ${}_{B}P_{B'}$ ainsi que la matrice de transition de C à B''

$${}_{B''}P_C \quad où \quad C=\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right).$$

c) Soit $W_2=\left[\vec{b}_1,\vec{b}_2\right]$ et $\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$. Écrire $\vec{u}$ sous la forme

$$\vec{u}=\vec{w}_1+\vec{w}_2 \quad où \quad \vec{w}_1\in W_2 \text{ et } \vec{w}_2\in W_2^{\perp}.$$

d) Donner une description algébrique de W_2 et vérifier que le vecteur $\vec{w}_1$ calculé en c) appartient à W_2.

Exercice 3

Soit $B = \left(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k},\ \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k},\ \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)$ une base de V^3.

a) Est-ce que B est une base orthogonale?

b) Donner ${}_C P_B$ la matrice de transition de B à C où $C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

c) Donner la base orthogonale B' obtenue à partir de B au moyen du procédé de Gram-Schmidt.

d) Donner la matrice de transition de B' à B, ${}_B P_{B'}$.

Exercice avec solution

Soit $U = [\, i - j + k \,]$ une droite vectorielle de V^3

Compéter la base de U pour obtenir une base de V^3

Solution utilisation théorème 7(c)

les vecteurs i, j, k n'appartiennent pas à U

On peut donc ajouter à U le vecteur i choix arbitraire parmi (i, j, k)

le système $\{ i - j + k,\ i \}$ est libre et contient la base de U

On peut choisir le 3ième vecteur parmi (j, k).

Si on choisit j il faut vérifier que j n'appartient pas à (i – j + k, i)

c.-à-d. $j = c_1(i - j + k) + c_2\, i$ n'est pas possible

on a $c_1 + c_2 = 0$ $\quad - c_1 = -1$ $\quad c_1 = 0$ solution impossible

base de V^3 : $\{ i - j + k,\ i,\ j \}$

Exercice avec solution

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ base (à vérifier) de V^3 où $b_1 = \vec{i} + j + k$ $\quad \vec{b}_2 = i + j$ $\quad b_3 = i$

Remplacer B par une base orthogonale $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$

<u>étape</u> 1 : $\vec{b}'_1 = \vec{b}_1 = i + j + k$ $\qquad W1 = [\, \vec{b}'_1 \,]$

<u>étape</u> 2 : $\vec{b}'_2 = \vec{b}_2 - proj_{W1}\, \vec{b}_2 = \vec{b}_2 - [\, (\vec{b}_2 \bullet \vec{b}'_1) / (\vec{b}'_1 \bullet \vec{b}'_1) \,]\, \vec{b}'_1$

$= \vec{b}_2 - (2 / 3)\, \vec{b}'_1 = (i + j - 2k) / 3$ $\qquad W2 = [\, \vec{b}'_1, \vec{b}'_2 \,]$

<u>étape</u> 3 : $\vec{b}'_3 = \vec{b}_3 - proj_{W2}\, \vec{b}_3 = \vec{b}_3 - [\, (\vec{b}_3 \bullet \vec{b}'_1) / \vec{b}'_1 \bullet \vec{b}'_1 \,]\, \vec{b}'_1$

$- [\, (\vec{b}_3 \bullet \vec{b}'_2) / \vec{b}'_2 \bullet \vec{b}'_2 \,]\, \vec{b}'_2$

$= \vec{b}_3 - (1 / 3)\, \vec{b}'_1 - (1 / 3) / (6 / 9)\, \vec{b}'_2 = (i - j) / 2$

base orthonormale $B'' = \left((i + j + k)/\sqrt{3} \,,\, (i + j - 2k)/\sqrt{6} \,,\, (i - j)/\sqrt{2} \right)$

Exercice avec solution

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ $\quad \vec{b}_1 = i + 2j + k \quad \vec{b}_2 = 2i + 9j + 0k \quad \vec{b}_3 = 3i + 3j + 4k$

$C = (i, j, k)$ base classique

a) Déterminer les composantes de $\vec{u} = i + 2j + 3k$ dans la base B

b) Écrire le vecteur $\vec{v}$ de V^3 dans la base C si $[\vec{v}]_B = [3 \ 2 \ 1]^t$

SOLUTION

a) $${}_CP_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad {}_BP_C = ({}_CP_B)^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u}]_B = {}_BP_C\,[\vec{u}]_C = [43 \ \ -6 \ \ -10]^t = 43\vec{b1} - 6\vec{b2} - 10\vec{b3}$$

b) $$\vec{v} = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 3(i + 2j + k) + 2(2i + 9j) + (3i + 3j + 4k)$$

$$= 10i + 27j + 7k$$

Exercice avec solution

Soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de V^2 $\quad \vec{b}_1 = (i - j) / \sqrt{2} \quad \vec{b}_2 = (i + j) / \sqrt{2}$

$C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ une base de V^2 $\quad \vec{c}_1 = i + 2j \quad \vec{c}_2 = 3i - j$

Déterminer la matrice de transition ${}_BP_C$ de C à B

<u>SOLUTION</u>

par définition $\quad {}_BP_C = [\ [c_1]_B \quad [c_2]_B\ ]$

Mais B est orthonormale + théorème 9 (transp. 40)

$$\vec{c}_1 = (\vec{c}_1 \bullet \vec{b}_1)\vec{b}_1 + (\vec{c}_1 \bullet \vec{b}_2)\vec{b}_2 = (-1/\sqrt{2})\,\vec{b}_1 + (3/\sqrt{2})\vec{b}_2$$
$$\vec{c}_2 = (\vec{c}_2 \bullet \vec{b}_1)b_1 + (\vec{c}_2 \bullet \vec{b}_2)\vec{b}_2 = (4/\sqrt{2})\,\vec{b}_1 + (2/\sqrt{2})\vec{b}_2$$

$${}_BP_C = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

REMARQUE

si on applique le procédé de Gram-Schmidt à une base B

pour obtenir un base orthogonale B' ou une base orthonormale B''

ALORS toutes les matrices de transition entre les bases B, B' et B'' sont

des matrices triangulaires supérieures.

${}_{B}P_{B'}$ par le calcul des combinaisons linéaires des vecteurs de B'

selon B : calcul simple avec diagonale principale constitué de 1

${}_{B}P_{B''}$ calcul est simplifié

Exercice avec solution

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ $\qquad \vec{b}_1 = i + j + k \qquad \vec{b}_2 = i + j \qquad \vec{b}_3 = i$

B' base orthogonale obtenue de B par Gram-Schmidt

B'' base orthonormale obtenue de B par Gram-Schmidt

Déterminer $_{B}P_{B'}$ et $_{B}P_{B''}$

<u>SOLUTION</u>

étape 1 : $\vec{b'}_1 = \vec{b}_1 = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3$

étape 2 : $\vec{b'}_2 = \vec{b}_2 - (2/3)\, b'_1 = (-2/3)\, \vec{b}_1 + 1\, \vec{b}_2 + 0\, \vec{b3}$

étape 3 : $\vec{b'}_3 = \vec{b}_3 - (1/3)\, \vec{b'}_1 - (1/\,2)\, (\vec{b'}_2 - (2/3)\vec{b}_1 = 0\vec{b}_1 - (1/2)\vec{b}_2 + 1\vec{b}_3$

$$_{B}P_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad _{B}P_{B''} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

avec la base orthonormale B''