# Exercices avec solutions

A. Ramadane, Ph.D.

## QUESTION # 1

Soit $B = \left(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k},\ \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k},\ \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}\right)$ une base de $V^3$.

a) Est-ce que $B$ est une base orthogonale?

b) Donner ${}_C P_B$ la matrice de transition de $B$ à $C$ où $C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

c) Donner la base orthogonale $B'$ obtenue à partir de $B$ au moyen du procédé de Gram-Schmidt.

d) Donner la matrice de transition de $B'$ à $B$, ${}_B P_{B'}$.

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

a) $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 2 - 4 + 2 = 0 \quad , \quad \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 1 - 2 + 4 = 3$

Rép. : Non

b) $_C P_{\mathcal{B}} = \left[ [\vec{b}_1]_C \quad [\vec{b}_2]_C \quad [\vec{b}_3]_C \right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

c) $\mathcal{B}' = (\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3')$.

- $\vec{b}_1' = \vec{b}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \qquad W_1 = [\vec{b}_1] = [\vec{b}_1']$
- $\vec{b}_2' = \vec{b}_2$ car $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$ par a)

$= \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \qquad W_2 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = [\vec{b}_1', \vec{b}_2']$

- $\vec{b}_3' = \vec{b}_3 - \operatorname{proj}_{W_2} \vec{b}_3$

$= \vec{b}_3 - \dfrac{\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1'}{\vec{b}_1' \cdot \vec{b}_1'} \vec{b}_1' - \dfrac{\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2'}{\vec{b}_2' \cdot \vec{b}_2'} \vec{b}_2'$

$= \vec{b}_3 - \dfrac{2}{3} \vec{b}_1 - \dfrac{1}{3} \vec{b}_2$

$= \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} \qquad W_3 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3] = [\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3']$

Rép. : $\mathcal{B}' = \left( 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},\ \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} \right)$

1.). Puisque $\vec{b}_1' = \vec{b}_1$, $\vec{b}_2' = \vec{b}_2$ et que $\vec{b}_3' = \vec{b}_3 - \frac{2}{3}\vec{b}_1 - \frac{1}{3}\vec{b}_2$, on a

$$_{B}P_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## QUESTION # 2

Soit $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ une base de $V^3$ où $\vec{b}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ , $\vec{b}_2 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ *et* $\vec{b}_3 = \vec{\jmath} + \vec{k}$ .

**a)** En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, remplacer $B$ par les bases $B'$ et $B''$ où $B'$ est orthogonale et $B''$ est orthonormale.

**b)** Soit $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ . Donner $[\,\vec{u}\,]_{B''}$ .

**c)** Soit $W = \left[\vec{b}_1, \vec{b}_2\right]$. Exprimer $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ où $\vec{w}_1 \in W$ et $\vec{w}_2 \in W^{\perp}$ .

**d)** Donner ${}_{B''}P_C$ .

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ où $\vec{b}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{b}_3 = \vec{j} + \vec{k}$

a) On a $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 1$ et $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$, de sorte le procédé de Gram-Schmidt donne :

$$\vec{b}_1' = \vec{b}_1 = \vec{i} + \vec{j} \qquad W_1 = [\vec{b}_1] = [\vec{b}_1']$$

$$\vec{b}_2' = \vec{b}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \qquad W_2 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = [\vec{b}_1', \vec{b}_2']$$

$$\vec{b}_3' = \vec{b}_3 - \operatorname{proj}_{W_2} \vec{b}_3$$

$$= \vec{b}_3 - \frac{1}{2}\vec{b}_1' - 0\vec{b}_2'$$

$$= \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{2}$$

Rép. : $\mathcal{B}' = \left( \vec{i} + \vec{j},\ \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{2} \right)$.

$$\mathcal{B}'' = \left( \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}},\ \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}},\ \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}} \right)$$

b) Notons $\vec{b}_1''$, $\vec{b}_2''$ et $\vec{b}_3''$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}''$. Puisque $\mathcal{B}''$ est une base orthonormale, le théorème 9 entraîne

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{b}_1'')\vec{b}_1'' + (\vec{u} \cdot \vec{b}_2'')\vec{b}_2'' + (\vec{u} \cdot \vec{b}_3'')\vec{b}_3''$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{b}_1'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{b}_2'' + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{b}_3''$$

Rép. : $[\vec{u}]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

c) Puisque $W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = [\vec{b}'_1, \vec{b}'_2] = [\vec{b}''_1, \vec{b}''_2]$ et que $W^\perp = [\vec{b}'_3] = [\vec{b}''_3]$,

par b) on a donc $\vec{\omega}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{b}''_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{b}''_2$ et $\vec{\omega}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{b}''_3$

ou encore $\vec{\omega}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \left(\frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{3}\right)$ et $\vec{\omega}_2 = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

<u>Rép.</u>: $\vec{\omega}_1 = \frac{4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$ et $\vec{\omega}_2 = \frac{-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$

d) $_{B''}P_C \underset{\text{propriété des matrices de transition}}{=} {}_CP_{B''}^{-1} \underset{\text{car } B'' \text{ et } C \text{ sont des bases orthonormales}}{=} {}_CP_{B''}^{t}$

Or ${}_CP_{B''}$ est immédiate puisque les vecteurs de $B''$ sont déjà décomposés selon la base $C$; en effet

$$_CP_{B''} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

<u>Rép.</u>: $$_{B''}P_C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Soit $B=\left(2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k},\ \vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k},\ \vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)$ une base de $V^3$.

**a)** Est-ce que $B$ est une base orthogonale?

**b)** Donner ${}_{C}P_{B}$ la matrice de transition de $B$ à $C$ où $C=\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

**c)** Donner la base orthogonale $B'$ obtenue à partir de $B$ au moyen du procédé de Gram-Schmidt.

**d)** Donner la matrice de transition de $B'$ à $B$, ${}_{B}P_{B'}$.

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

a) $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 2 - 4 + 2 = 0$ , $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 1 - 2 + 4 = 3$

Rép. : Non

b) $_C P_B = \begin{bmatrix} [\vec{b}_1]_C & [\vec{b}_2]_C & [\vec{b}_3]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $\mathcal{B}' = (\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3')$.

- $\vec{b}_1' = \vec{b}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\qquad W_1 = [\vec{b}_1] = [\vec{b}_1']$
- $\vec{b}_2' = \vec{b}_2$ car $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$ par a)

$= \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $\qquad W_2 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2] = [\vec{b}_1', \vec{b}_2']$

- $\vec{b}_3' = \vec{b}_3 - \operatorname{proj}_{W_2} \vec{b}_3$

$= \vec{b}_3 - \dfrac{\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1'}{\vec{b}_1' \cdot \vec{b}_1'} \vec{b}_1' - \dfrac{\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2'}{\vec{b}_2' \cdot \vec{b}_2'} \vec{b}_2'$

$= \vec{b}_3 - \dfrac{2}{3} \vec{b}_1 - \dfrac{1}{3} \vec{b}_2$

$= \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3}$ $\qquad W_3 = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3] = [\vec{b}_1', \vec{b}_2', \vec{b}_3']$

Rép. : $\mathcal{B}' = \left( 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},\ \dfrac{-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{3} \right)$

Soit $T$ une application linéaire de $V^3$ dans $V^3$ définie par :

$$T\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = (y-z)\vec{\imath} + (x+z)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}$$

a) Donner $[T]_C$ la matrice représentative de $T$ dans la base de $C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

b) Trouver une base de noyau de $T$.

c) Déterminer une base de l'image $T$.

d) Donner les valeurs propres de $T$ ainsi que leurs vecteurs propres.

e) Est-ce que $T$ est diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, donner une base $B$ telle que $[T]_B$ est diagonale et préciser alors $[T]_B$.

$$T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (y-z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

a) On sait que $[T]_C = \left[\, [T(\vec{i})]_C \;\; [T(\vec{j})]_C \;\; [T(\vec{k})]_C \,\right]$

Or
$$T(\vec{i}) = T(1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$T(\vec{j}) = T(0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$T(\vec{k}) = T(0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) = -1\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

Rép.: $[T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\vec{u} \in Ker(T) \iff T(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\iff (y-z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k} = \vec{0}$

$\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\iff x = -y$ et $z = y$

Donc $\vec{u} \in Ker(T)$ ssi $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où $x = -y$ et $z = y$

ssi $\vec{u} = -y\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$ $\quad y \in \mathbb{R}$

ssi $\vec{u} = y(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ $\quad y \in \mathbb{R}$

Ainsi le vecteur $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ engendre $Ker(T)$ et comme ce vecteur est non nul il est libre. Il constitue donc une base de $Ker(T)$

Rép.: Base de $Ker(T) = \{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\}$.

c) Puisque la base de Ker(T) contient 1 seul vecteur, alors dim Ker(T) = 1. Le théorème de la dimension entraîne donc rang(T) = 3 − dim Ker(T) = 3 − 1 = 2.
Puisque les colonnes de $[T]_C$ engendrent l'image de T, il suffit de choisir parmi celles-là 2 colonnes linéairement indépendantes, par exemple, les colonnes 1 et 2.

__Rép:__ Base de Im(T) = $\{ \vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+\vec{k} \}$.

d) Notons $A = [T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$
  Les valeurs propres sont donc $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, chacune simple.
- Les vecteurs propres correspondants sont
  - pour $\lambda = 0$ $\quad -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ $\quad$ obtenu en b)
  - pour $\lambda = 1$ $\quad \vec{j}+\vec{k}$ $\quad$ obtenu en résolvant $(A-I)X = 0$
  - pour $\lambda = -1$ $\quad \vec{i}-\vec{j}$ $\quad$ obtenu en résolvant $(A+I)X = 0$

e) T est diagonalisable car toutes ses valeurs propres sont réelles et pour chacune, mult. géométrique = mult. algébrique.
Si $B = (-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{i}-\vec{j})$, alors

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit $T: V^3 \to V^3$ une application linéaire telle que

$$T(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) = x\vec{\imath} + (2x + y - 2z)\vec{\jmath} + (2x - z)\vec{k}.$$

**a)** Donner $[T]_C$, la matrice représentatrice de $T$ dans la base $C = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

**b)** Donner une base de l'image de $T$.

**c)** Donner le noyau de $T$, $Ker(T)$.

**d)** Calculer $[T \circ T]_C$.

**e)** Est-ce que $T$ est inversible ? Justifier. Si oui, donner $T^{-1}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$.

$$T(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = x\vec{i}+(2x+y-2z)\vec{j}+(2x-z)\vec{k}$$

a) $T(\vec{i}) = \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ , $T(\vec{j}) = \vec{j}$ et $T(\vec{k}) = -2\vec{j}-\vec{k}$

et ainsi $[T]_C = \left[\,[T(\vec{i})]_C \; [T(\vec{j})]_C \; [T(\vec{k})]_C\,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\det [T]_C = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}([T]_C) = 3$.

Rép : Base de $Im(T) = C$ ou encore n'importe quelle base de $V^3$
On peut aussi affirmer que $T(\vec{i})$, $T(\vec{j})$ et $T(\vec{k})$ forment une telle base

c) $\dim \text{Ker}(T) = 3 - rg(T) = 3-3 = 0 \iff \text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$

d) $[T\circ T]_C = [T]_C\,[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $T$ est inversible puisque $T$ est régulière, car $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.
Puisque $[T\circ T]_C = I$, il s'ensuit que $T\circ T = id$, ou encore que $T = T^{-1}$

Rép. $T^{-1}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = x\vec{i}+(2x+y-zk)\vec{j}+(2x-z)\vec{k}$