Exercices

A. Ramadane, Ph.D.

QUESTION # 1

Soit l'espace muni du système de coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$. Soit $A = A(1,2,0)$, $B = B(3,1,1)$ et $C = C(2,1,2)$ trois points.

a) Donner l'équation cartésienne du plan Π_1, passant par A, B et C.

b) Donner des équations paramétriques de la droite D_1 passant par A et B.

c) Donner l'équation cartésienne du plan Π_2 contenant la droite D_1 et perpendiculaire au plan Π_1. En déduire des équations cartésiennes de la droite D_1.

d) Soit $P_0 = P(2,-2,0)$.

i) Vérifier que $P_0 \in \Pi_2$.

ii) Donner le point Q_0 de Π_1 le plus proche de P_0.

iii) Vérifier que $Q_0 \in D_1$.

iv) En déduire la distance du point P_0 à la droite D_1.

QUESTION # 2

Soit $\vec{v}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{v}_2 = \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{v}_3 = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\vec{v}_4 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ des vecteurs de V^3.

a) Justifier le fait que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont nécessairement liés.

b) Exprimer au moins un vecteur de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ comme combinaison linéaire des autres.

c) Donner une base de $U = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4]$.

d) Quelle est la dimension de U ?

QUESTION # 3

Soit $\vec{v}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\vec{v}_3 = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$ des vecteurs de V^3.

a) Montrer que $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est un ensemble orthogonal.

b) Justifier le fait que S est une base de V^3.

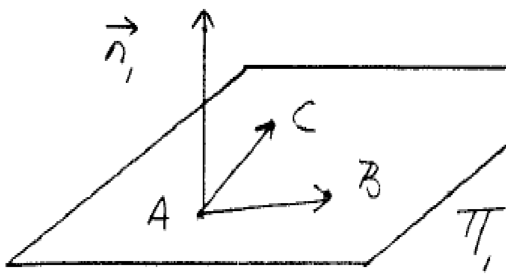
c) Soit $W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ et soit $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}$. Écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ où $\vec{w}_1 \in W$ et $\vec{w}_2 \in W^{\perp}$.

d) Donner une description algébrique de W.

QUESTION # 1

$A = A(1,2,0)$, $B = B(3,1,1)$ et $C = C(2,1,2)$.

a)



$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{n}_1$ est normal à π_1

On $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(3) + \vec{k}(-1)$

$= -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Puisque $A \in \pi_1$, alors $\pi_1 : \; -(x-1) - 3(y-2) - (z-0) = 0$

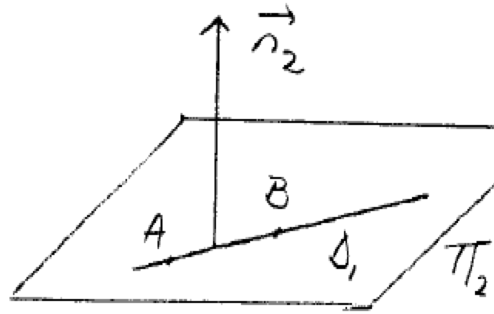
c'est-à-dire $\pi_1 : \; -x - 3y - z = -1 - 6$

Rép. : $\pi_1 : \quad x + 3y + z = 7$

6) $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et A appartient à $\mathcal{D}_1$, on a donc

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

c)



Puisque $\Pi_1 \perp \Pi_2$, $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ et puisque Δ_1 est contenue dans Π_2, $\vec{d} \perp \vec{n}_2$

On peut donc choisir comme vecteur $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{d}$

On obtient $\vec{n}_2 : -4\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ le point A appartient à Π_2 de sorte que

$$\Pi_2 : -4(x-1) - (y-2) + 7(z-0) = 0$$

c'est-à-dire $\Pi_2 : -4x - y + 7z = -6$

QUESTION # 1

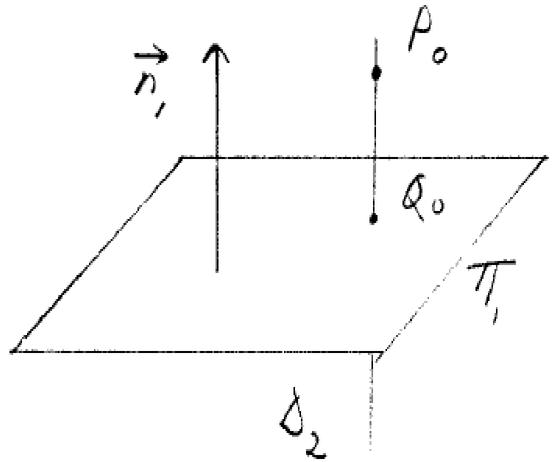
Rép.: $\quad \Pi_2 : \ 4x + y - 7z = 6$

d) Par a) Δ_1 est contenue dans Π_1 et par c) Δ_1 est contenue dans Π_2, ainsi donc $\Delta_1 = \Pi_1 \cap \Pi_2$

Rép.: $\quad \Delta_1 : \begin{cases} x + 3y + z = 7 \\ 4x + y - 7z = 6 \end{cases}$

e) i) $P_0 \in \Pi_2$ car pour P_0, $4x + y - 7z = 4(2) + (-2) - 7(0) = 6$

ii)



Soit Δ_2 la droite passant par P_0 et normale à Π_2, i.e. parallèle à $\vec{n}_1$. Q_0 est le point d'intersection de Π_1 et Δ_2

On a donc:

$$\Pi_1 : \quad x + 3y + z = 7 \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 - 3t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour Q_0, on a donc

$$x + 3y + z = (2-t) + 3(-2-3t) + (-t) = 7$$

i.e. $\quad -t - 9t - t = 7 - 2 + 6$

i.e. $\quad -11t = 11$

i.e. $\quad t = -1$

i.e. $\quad Q_0 = Q(-1) = Q(3, 1, 1)$

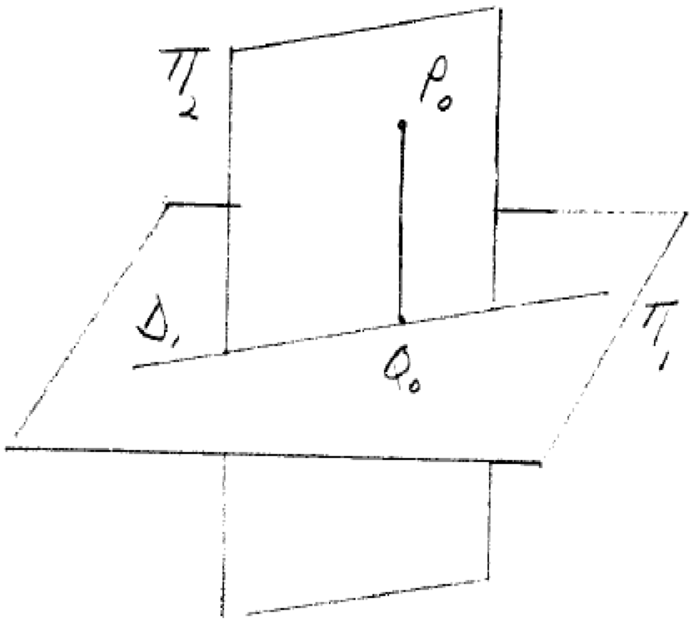
<u>Rép</u> $\quad Q_0 = Q(3, 1, 1)$

QUESTION # 1

iii) $Q_0 \in \mathcal{D}$, ssi il existe un t tel que

$$\begin{cases} 3 = 1+2t \\ 1 = 2-t \\ 1 = t \end{cases} \quad \text{ssi} \quad t=1.$$

$Q_0 \in \mathcal{D}$, car il correspond à la valeur $t=1$ du paramètre iv)



Etant donné les positions respectives de Π_1 et Π_2, et le fait que $P_0 \in \Pi_2$, $Q_0 \in \Pi_1$ et Δ_1, il s'ensuit que

distance de P_0 à Δ_1

$$= \| \overrightarrow{Q_0 P_0} \|$$

$$= \| \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k} \|$$

$$= \sqrt{11}.$$

$\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{v}_4 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

a) Ces 4 vecteurs appartiennent à V^3. Or V^3 est de dimension 3 et ne peut donc contenir plus de 3 vecteurs libres. Ainsi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est lié.

b) Résolvons l'équation

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4 = \vec{0} \qquad (*)$$

i.e. $a(\vec{i} - \vec{j}) + b(\vec{j} - \vec{k}) + c(\vec{i} - \vec{k}) + d(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$

$$(a + c + d)\vec{i} + (-a + b + d)\vec{j} + (-b - c + d)\vec{k} = \vec{0}$$

On a donc le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b} + c + d = 0 \\ -a + b \phantom{{}+c} + d = 0 \\ - b - c + d = 0 \end{cases},$$

qui, échelonné devient

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b} + c + d = 0 \\ \phantom{a+{}} b + c - d = 0 \\ \phantom{a+b+c+{}} d = 0 \end{cases}.$$

Les solutions sont donc $d = 0$, $b = -c$ et $a = -c$

Ainsi l'équation $(*)$ devient

$$-c\vec{v}_1 - c\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

ou encore $\quad c(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{0} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

ce qui entraine $\quad -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

On peut donc dire $\quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad$ (ce qui se vérifie aisément)

<u>Rép.</u> : $\qquad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

c) Puisque $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, on peut rejeter $\vec{v}_3$ si on conserve $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (principe du rejet d'un générateur)

Ainsi $U = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4]$. Les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ forment un système libre (car aucune relation n'existe entre ces vecteurs par b)).

Puisque $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ est un système générateur de U et est libre, il en est une base

<u>Rép</u>: Base de $U = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$.

d) dimension de U = nombre de vecteurs d'une base de U = 3

(on peut dire que $U = V^3$, par théo. 7.)

QUESTION # 3

$$\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

a) Vérifions que ces vecteurs sont perpendiculaires 2 à 2:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 + 2 - 3 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 5 - 4 - 1 = 0$ et $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 5 - 8 + 3 =$

Ainsi $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est un ensemble orthogonal.

b) Par le théo. 8 S étant orthogonal et ne contenant pas le vecteur $\vec{0}$ est libre. S contient 3 vecteurs de V^3 et la dimension de V^3 est 3, on peut faire appel au théo. 6. Puisque S est libre, S est une base de V^3.

c) On sait que si $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ avec $\vec{w}_1 \in W$ et $\vec{w}_2 \in W^{\perp}$, alors $\vec{w}_1 = proj_W \vec{u}$ et $\vec{w}_2 = proj_{W^{\perp}} \vec{u}$.

Or, si $W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$, il s'en suit que $\vec{v}_3$ est une base de $W^{\perp}$ (par a))

Ainsi $\vec{w}_2 = proj_{W^{\perp}} \vec{u} = proj_{\vec{v}_3} \vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}_3}{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} \vec{v}_3 = \dfrac{1}{7} \vec{v}_3$

$$= \frac{5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}}{7}$$

et $\vec{w}_1 = \vec{u} - \vec{w}_2 = \dfrac{2\vec{i} - 3\vec{j} - 22\vec{k}}{7}$

d) Puisque $W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ est de dimension 2 ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont libres) il est associé à un plan passant par l'origine. Le vecteur $\vec{v}_3$ étant perpendiculaire à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$ est donc perpendiculaire à ce plan. Ainsi donc

$$W = \{ \vec{v} \in V^3 \mid \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ où } 5x - 4y + z = 0 \}$$