Exercice-Diagonalisation

A. Ramadane, Ph.D.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Trouver les valeurs propres de A.

b) Pour chaque valeur propre de A, donner une base du sous-espace propre qui lui est associé.

c) A est-elle diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, diagonaliser A, donner la matrice P qui diagonalise A et expliciter le lien entre ces matrices.

QUESTION #2 (suite)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Les valeurs propres sont les racines (réelles) du polynôme caractéristique de A, $p_A(\lambda)$

On $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(-4-\lambda)(3-\lambda) + 10\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 2\right]$$

$$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

Rép :

Valeur propre	$\lambda = 1$	$\lambda = -2$
multiplicité algébrique	2	1

b) • $\lambda = 1$ $\quad E_1 = \ker(A - I)$

Il suffit de résoudre $(A - I)X = 0$

On obtient le système

$$\begin{cases} -5x - 2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

i.e. $y = 0$ et $5x = -2z$

De sorte que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2/5)z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Ce dernier vecteur est non nul, donc libre et il engendre E_1, il en forme donc une base

• $\lambda = -2$ $\qquad E_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2I)$

Il suffit de résoudre $(A + 2I)X = 0$.

On obtient le système

$$\begin{cases} -2x & & -2z = 0 \\ & 3y & = 0 \\ 5x & + y & + 5z = 0 \end{cases}$$

Le système échelonné est

$$\begin{cases} x & & + z = 0 \\ & y & = 0 \end{cases}$$

i.e. $x = -z$ et $y = 0$

De sorte que

$$X = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Ce dernier vecteur engendre donc E_{-2}, est non nul, donc libre : il constitue donc une base de E_{-2}.

Rép: $\qquad$ Base de $E_1 = \{ [-2 \quad 0 \quad 5]^t \}$

$\qquad$ Base de $E_{-2} = \{ [-1 \quad 0 \quad 1]^t \}$

c) A n'est pas diagonalisable car pour la valeur propre 1, la multiplicité géométrique est 1 (car $\dim E_1 = 1$) alors que sa multiplicité algébrique est 2

Soit T une application linéaire de V^3 dans V^3 définie par :

$$T\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = (y-z)\vec{\imath} + (x+z)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}$$

a) Donner $[T]_C$ la matrice représentative de T dans la base de $C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

b) Trouver une base de noyau de T.

c) Déterminer une base de l'image T.

d) Donner les valeurs propres de T ainsi que leurs vecteurs propres.

e) Est-ce que T est diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, donner une base B telle que $[T]_B$ est diagonale et préciser alors $[T]_B$.

$$T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (y-z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

a) On sait que $[T]_C = \left[\, [T(\vec{i})]_C \;\; [T(\vec{j})]_C \;\; [T(\vec{k})]_C \,\right]$

On
$$T(\vec{i}) = T(1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$T(\vec{j}) = T(0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$
$$T(\vec{k}) = T(0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) = -1\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

Rép. : $[T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\vec{u} \in Ker(T) \iff T(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\iff (y-z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k} = \vec{0}$

$\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\iff x = -y$ et $z = y$

Donc $\vec{u} \in Ker(T)$ ssi $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où $x = -y$ et $z = y$

ssi $\vec{u} = -y\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$ $\quad y \in \mathbb{R}$

ssi $\vec{u} = y(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ $\quad y \in \mathbb{R}$

Ainsi le vecteur $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ engendre $Ker(T)$ et comme ce vecteur est non nul, il est libre. Il constitue donc une base de $Ker(T)$

Rép. : Base de $Ker(T) = \{-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\}$.

c) Puisque la base de $Ker(T)$ contient 1 seul vecteur, alors $\dim Ker(T) = 1$. Le théorème de la dimension entraîne donc $rang(T) = 3 - \dim Ker(T) = 3 - 1 = 2$.

Puisque les colonnes de $[T]_C$ engendrent l'image de T, il suffit de choisir parmi celles-là 2 colonnes linéairement indépendantes, par exemple, les colonnes 1 et 2.

<u>Rép</u>: Base de $Im(T) = \{ \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k} \}$

d) Notons $A = [T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

  les valeurs propres sont donc $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$, chacune simple.

- les vecteurs propres correspondants sont

  - pour $\lambda = 0$ $\quad -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ obtenu en b)
  - pour $\lambda = 1$ $\quad \vec{j} + \vec{k}$ obtenu en résolvant $(A - I)X = 0$
  - pour $\lambda = -1$ $\quad \vec{i} - \vec{j}$ obtenu en résolvant $(A + I)X = 0$

e) T est diagonalisable car toutes ses valeurs propres sont réelles et pour chacune, mult. géométrique = mult. algébrique

Si $B = (-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{i}-\vec{j})$, alors

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Donner le polynôme caractéristique de A.

b) Vérifier que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ est un vecteur propre de A.

c) Donner les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité algébrique.

d) Pour chaque valeur propre de A, donner une base du sous-espace propre qui lui est associé.

e) Est-ce que A est diagonalisable? Si non, justifier. Si oui, donner une matrice P qui diagonalise A ainsi que la matrice diagonale D associée.

f) Soit $T : V^3 \longrightarrow V^3$ une application linéaire telle que

$$[T]_C = A \quad \text{où} \quad C = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$$

Donner une interprétation géométrique de T.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$

b) $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & -2\\2 & -1 & -2\\2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-2-2\\2-1-2\\2-2-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est bien un vecteur propre de A et il est associé à la valeur propre -1.

c) Puisque -1 est une valeur propre de A, $p_A(\lambda)$ est divisible par $(\lambda+1)$. En factorisant $p_A(\lambda)$, on obtient

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+2\lambda-1)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

<u>Rép</u>:			
	valeur propre	$\lambda = -1$	$\lambda = 1$
	mult. algébrique	simple	double

d) $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$: sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

- pour $\lambda = -1$:
puisque λ est de mult. alg. 1, elle est de mult. géo 1 et donc le vecteur non nul $[1 \; 1 \; 1]^t$ en constitue une base

- pour $\lambda = 1$:
il suffit de résoudre $(A - I)X = 0$
i.e
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Ce qui entraîne $x - y - z = 0$, de sorte que
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Puisque les vecteurs colonnes $[1 \; 1 \; 0]^t$ et $[1 \; 0 \; 1]^t$ sont libres, ils forment une base de E_1.

Rép.: Base de $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Base de $E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

c) A est diagonalisable, puisque toutes ses valeurs propres sont réelles et pour chacune, multiplicité géométrique égale multiplicité géométrique ($\dim E_{-1} = 1$, $\dim E_1 = 2$).

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{est telle que} \quad P^{-1}AP = D$$

où $$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) Puisque $A = [T]_C$, où $C = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, et puisque

A est semblable à D, alors $D = [T]_B$ où

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{k})$.

On a donc $T(\vec{b}_1) = -\vec{b}_1$, $T(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$ et $T(\vec{b}_3) = \vec{b}_3$

le plan engendré par $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$ demeure inchangé, alors que le vecteur $\vec{b}_1$ est envoyé sur son opposé.

On a donc une symétrie par rapport au plan $[\vec{b}_2, \vec{b}_3]$ (Π: $x - y - z = 0$) parallèlement à la droite $[\vec{b}_1]$ (D: $x = t$, $y = t$, $z = t$ $t \in \mathbb{R}$)